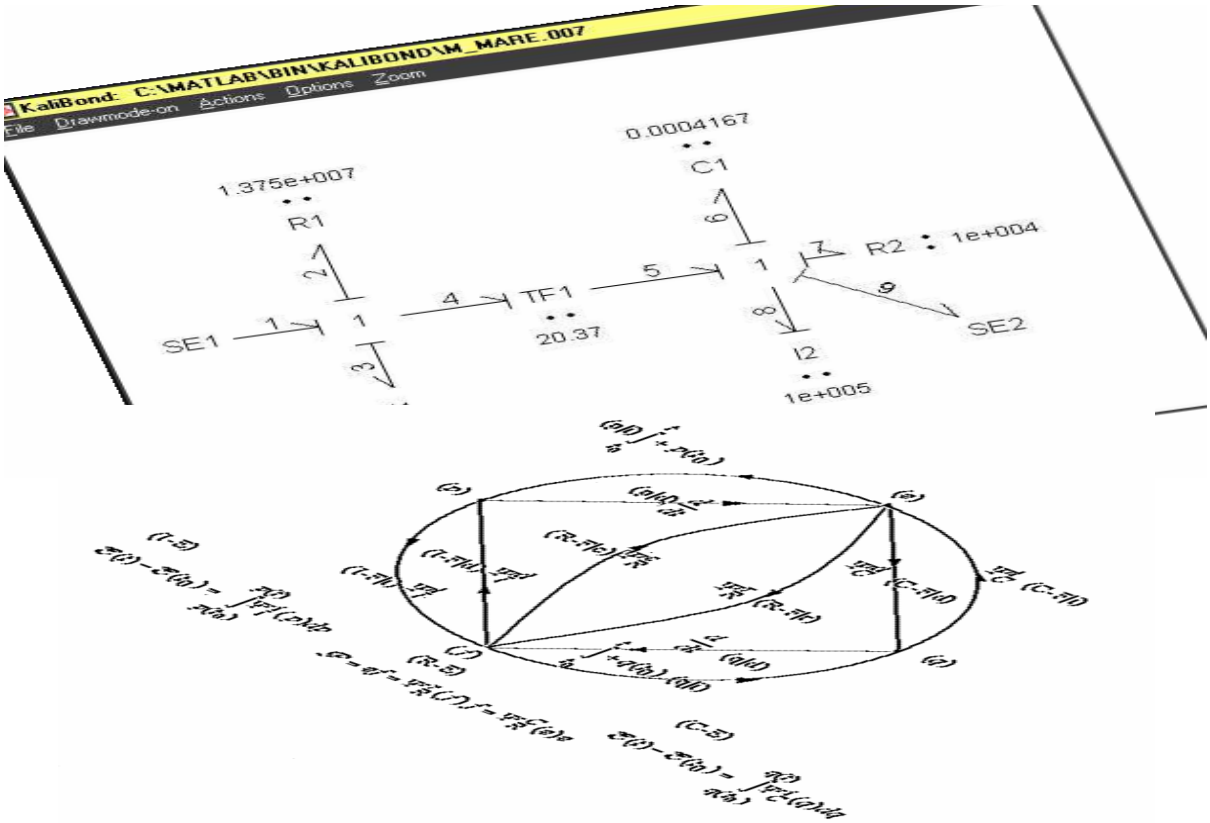
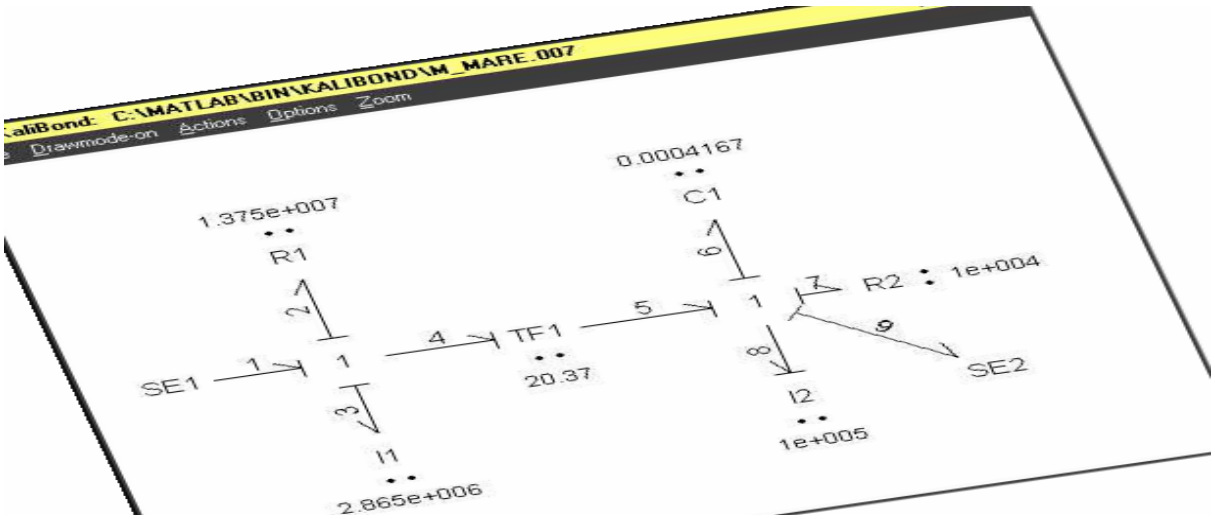
OCTAVIAN PĂSTRĂVANU RADU IBĂNESCU

LIMBAJUL BOND-GRAPH ÎN MODELAREA ŞI SIMULAREA SISTEMELOR FIZICO-TEHNICE



Editura Gh. Asachi

2001


KaliBond: C:\MATLAB\BIN\KALIBOND\M_MARE_007
Drawmode-on
Actions
Options
Zoom
0.0004167
C1
1.375e+007
R1
6
2
R2 : 1e+004
7
SE1
1
1
4
TF1
5
1
9
SE2
8
3
20.37
I2
I1
1e+005
2.865e+006

OCTAVIAN PĂSTRĂVANU **RADU IBĂNESCU**

LIMBAJUL BOND-GRAPH ÎN MODELAREA ŞI SIMULAREA SISTEMELOR FIZICO-TEHNICE

Editura Gh. ASACHI

2001

Referenţi:

Prof. dr. doc. ing. Alfred Braier

Prof. dr. ing. Eugen Balaban

Conf. dr. fiz. Mariana Istrate

ISBN: 973-8292-12-3

© Octavian PĂSTRĂVANU

Radu IBĂNESCU

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Bd. D. Mangeron 53A, 6600 Iaşi
email: opastrav@delta.ac.tuiasi.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Facultatea de Construcții de Maşini
Bd. D. Mangeron 63, 6600 Iaşi
email: ribanesc@tau.mec.tuiasi.ro

Tehnoredactare: Dana Serbeniuc

În amintirea lui Emilian–Decebal

Prefață

O componentă fundamentală a activității inginereşti moderne (care în cvasi-totalitate se bazează pe analiza şi proiectarea asistate de calculator), o constituie construirea modelelor matematice capabile să surprindă esența comportărilor fizice din universul tehnic explorat. Drept urmare, efortul investit pe plan internațional în ultimele decenii s-a axat pe dezvoltarea unor tehnici de modelare care să asigure o abordare sistemică în interpretarea fenomenelor fizice concrete, prin crearea unui cadru unificator pentru descrierile matematice.

În acest context, la începutul anilor '60 a apărut limbajul sau metoda bond-graph, propunând, ca principiu fundamental pentru elaborarea modelelor, investigarea modului de procesare a energiei, ce se consideră furnizată de una sau mai multe surse şi transferată către toate componentele participante la funcționarea unui sistem fizic real. Viziunea de factură energetică introdusă de metoda bond-graph a avut drept suport definirea unor prototipuri de comportare pentru toate elementele simple care alcătuiesc structura de ansamblu a oricărui sistem, indiferent de natura fizică concretă a acestor elemente. Astfel, activitatea de modelare cu specific tehnico-ingineresc a căpătat o orientare riguroasă, ce elimină arbitrarietatea soluțiilor ad-hoc, prin tratarea unitară a transferului de energie şi operarea, la nivel conceptual, cu clase de obiecte izomorfe ca manieră de descriere a dinamicii. Izomorfismul amintit a avut în vedere caracterizarea prin parametri

concentraţi a diverse fenomene fizice, pornind de la analogia dintre comportarea circuitelor electrice şi a sistemelor mecanice de puncte materiale, pe care metoda bond-graph a generalizat-o spre a încorpora aproximări finit dimensionale pentru dinamica unor sisteme cu parametri distribuiţi (cum ar fi, de exemplu, dinamica rigidelor, a fluidelor, sau a proceselor termice). Altminteri spus, s-au creat premise metodologice complete pentru ca două persoane dispunând de cunoştinţe inginereşti adecvate, care se ocupă independent de aceeaşi problemă de modelare şi o abordează prin limbajul bond-graph, să ajungă, în final, în posesia unor descrieri matematice finit dimensionale echivalente, dacă nu chiar identice.

În perioada ce a urmat şi cu precădere după 1980, limbajul bond-graph s-a impus în practica modelării în diverse domenii ale ingineriei, făcând, totodată, obiectul a numeroase extinderi, care îi dovedesc totala compatibilitate cu instrumentele de modelare specializate, de tip intrare-stare-ieşire, sau intrare-ieşire, elaborate separat în sfera de interes a automaticii. În plus, reprezentările grafice asociate bond-graph-urilor îsi aduc o contribuţie majoră la antrenarea laturii intuitive a demersului cognitiv. Aceste aspecte au fost amplu investigate şi comentate în numeroase articole şi rapoarte de cercetare, la care se adaugă şi existenţa câtorva lucrări cu caracter monografic, publicate de edituri internaţionale de mare prestigiu.

Ideea de a scrie cartea de faţă s-a născut pe fondul absenţei unui material în limba română dedicat în exclusivitate modelării pe principii fizice a sistemelor tehnico-inginereşti, beneficiind de iniţiativa celor doi autori de a plasa tratarea standard a limbajului bond-graph într-un cadru informaţional mult mai generos, organizat pe opt capitole, după cum urmează. Prima parte a lucrării, recte Capitolele 1 şi 2, oferă o scurtă introducere în problematica modelării, urmată de prezentarea detaliată a modelelor cauzale cu cea mai frecventă utilizare în descrierea matematică a dinamicii sistemelor. Partea a doua, alcătuită din Capitolele 3 şi 4, realizează o trecere în revistă sistematizată a unor noţiuni fundamentale din fizică, care, prin aducerea în prim plan a aspectelor energetice, permite formularea unor analogii comportamentale între diverse domenii ale fizicii. Partea a treia, constând în Capitolele 5, 6 şi 7, este dedicată limbajului bond-graph

în varianta standard, precum şi unor extinderi remarcabile ale acestuia, expunerea fiind dirijată în sensul exploatării acestui limbaj ca instrument ce asigură algoritmizarea operaţiunilor de construire a diverse tipuri de modele cauzale. Partea a patra este compusă din Capitolul 8 şi se ocupă de utilizarea modelelor în simulare, furnizând atât elemente teoretice specifice rezolvării numerice a ecuaţiilor diferenţiale, cât şi informaţii de ordin practic, legate de exploatarea facilităţilor software existente în mediul MATLAB-Simulink.

Întregul material a fost de aşa manieră conceput încât să asigure o arie de adresabilitate cât mai largă în sfera cititorilor de formaţie tehnico-ştiinţifică, incluzând specialişti, cercetători, cadre didactice, studenţi şi doctoranzi din diverse domenii ale ingineriei. Dat fiind caracterul autonom al expunerii care oferă, într-un dozaj adecvat, toate informaţiile de factură teoretică utilizate de construcţiile aplicative şi studiile de caz, angajarea lecturii nu necesită, drept cunoştinţe preliminare, decât capitolele de matematică şi fizică uzual predate în învăţământul universitar tehnic, indiferent de profil. Totodată, modul de structurare al lucrării discutat anterior nu obligă la parcurgerea integrală a textului, permiţând o lectură selectivă, orientată în conformitate cu nivelul de pregătire şi problematica de interes a fiecărui cititor în parte, ghidarea realizându-se cu multă uşurinţă pe seama cuprinsului anume elaborat cu un grad relevant de detaliere.

În particular, lucrarea de faţă (*în totalitate, ori anumite porţiuni ale ei*) *poate servi şi drept suport pentru cursuri destinate studenţilor din diverse profile tehnice sau pentru cursuri de perfecţionare destinate absolvenţilor, stilul de prezentare bazându-se pe principiile instruirii graduale, cu acordarea unei ponderi importante exemplelor, aplicaţiilor practice şi utilizării facilităţilor software. Utilizarea cărţii într-un astfel de scop merită o încurajare suplimentară deoarece studierea metodei bond-graph este actualmente inclusă în planurile de învăţământ a numeroare universităţi din Europa Occidentală, S.U.A., Canada şi Japonia.*

Rod al unei colaborări interdisciplinare de lungă durată dintre două cadre didactice ale Universităţii Tehnice "Gh. Asachi" din Iaşi, şi anume prof. dr. ing. Octavian Păstrăvanu de la Catedra de automatică şi informatică industrială şi conf. dr. ing. Radu Ibănescu de la Catedra de mecanică teoretică, prezentul studiu

monografic pune în valoare atât viziunea proprie a autorilor, creată în urma consultării unui vast material bibliografic, cât şi experienţa dobândită de aceştia în domeniul modelării şi analizei asistate de calculator a dinamicii sistemelor. Cartea reflectă totodată şi preocupările educaţionale ale celor doi autori care au pregătit cursuri şi şedinţe de aplicaţii dedicate utilizării limbajului bond-graph în modelare şi simulare pentru studenţii facultăţilor de Automatică şi Calculatore, respectiv Construcţii de Maşini ale Universităţii Tehnice "Gh. Asachi" din Iaşi.

Din scurta trecere în revistă a elementelor definitorii pentru această lucrare nu poate fi omis faptul că software-ul Kalibond, care permite construirea şi exploatarea bond-graph-urilor direct în mediul MATLAB, a fost obţinut prin amabilitatea profesorului Peter Jőrgl de la Universitatea de Tehnologie din Viena.

În încheiere, autorii doresc să îşi exprime gratitudinea faţă de cei trei referenţi, ale căror personalităţi academice marcante au girat apariţia acestei cărţi, precum şi faţă de colectivul Editurii "Gh. Asachi" care a inclus volumul în planul său editorial.

Mulţumiri deosebite sunt aduse colegei Dana Mihaela Serbeniuc pentru înaltul profesionalism de care a dat dovadă în tehnoredactarea manuscrisului.

Publicarea cărţii s-a bucurat de suportul financiar al Consiliului Naţional pentru Finaţarea Învăţamântului Superior, prin intermediul proiectului LICAP ("Laborator de instruire în domeniul conducerii asistate de calculator a proceselor").

Septembrie 2001 *Autorii*

CUPRINS

Prefaţă I

Cuprins V

Abstract and Contents XI

Cap.1. Introducere în problematica modelării 1

1.1. Concepte fundamentale şi terminologie 1

1.1.1. Sistem şi model 2

1.1.2. Modelele matematice în analiza asistată de calculator 3

1.1.3. Construcția şi validarea modelelor 3

1.1.4. Clasificarea modelelor matematice 4

1.2. Modelarea bazată pe principiile fizicii 6

1.2.1. Legi fizice şi semnale 6

1.2.2. Modele cauzale şi acauzale 8

1.2.3. Transferul de energie şi modelarea cauzală. Conceptul de sursă ideală de putere 9

Cap. 2. Tipuri de modele cauzale şi proprietăţi 11

2.1. Modele de tip proporțional 12

2.1.1. Tranziția cauzală intrare-ieşire 12

2.1.2. Comentarii asupra cauzalității unui model de tip proporțional 12

2.2. Modele de tip integrator sau derivator 14

2.2.1. Tranziția cauzală intrare-ieşire pentru modele de tip integrator 14

2.2.2. Descrierea operațională asociată modelului de tip integrator 16

2.2.3. Tranziția cauzală intrare-ieşire pentru modele de tip derivator 16

2.2.4. Descrierea operațională asociată modelului de tip derivator 17

2.2.5. Comentarii asupra cauzalității modelelor de tip integrator sau derivator 18

2.3. Modele liniare de tip ecuație diferențială de ordinul I, cu coeficienți constanți 22

2.3.1. Tranziția cauzală intrare-ieşire 23

2.3.2. Comportare de regim liber şi de regim forțat 25

2.3.3. Dinamica de regim forțat pentru semnale de intrare standard 27

2.3.3.1. Răspunsul forțat la semnal treaptă 27

2.3.3.2. Răspunsul forțat la semnal sinusoidal 31
2.3.3.3. Comentarii asupra unor aspecte comportamentale ale sistemelor puse în evidență de răspunsul forțat 36
2.3.4. Dinamica de regim liber 37
2.3.5. Răspunsul complet pentru semnale de intrare standard 38
2.3.6. Tratarea operațională cu ajutorul transformării Laplace 40
2.3.6.1. Răspunsul complet în tratarea operațională 40
2.3.6.2. Răspunsul forțat în tratarea operațională. Modelul de tip funcție de transfer 43

2.4. Modele liniare de tip intrare-stare-ieşire 44
2.4.1. Tranziția cauzală intrare-stare-ieşire 44
2.4.1.1. Modele intrare-stare-ieşire de ordinul doi 44
2.4.1.2. Modele intrare-stare-ieşire de ordinul n 45
2.4.2. Răspuns complet, răspuns liber şi răspuns forțat 48
2.4.3. Dinamica de regim liber 51
2.4.4. Dinamica de regim forțat pentru semnale de intrare standard 54
2.4.4.1. Semnale de intrare standard 54
2.4.4.2. Tratarea operațională a transferului intrare-stare-ieşire 54
2.4.4.3. Răspunsul forțat la semnale de intrare polinomiale 56
2.4.4.4. Răspunsul forțat la semnale de intrare sinusoidale 61
2.5. Extinderi ale modelelor liniare intrare-stare-ieşire 66
2.5.1. Sisteme cu mai multe intrări şi/sau mai multe ieşiri (Sisteme multivariabile) 66
2.5.2. Reprezentări intrare-stare-ieşire în formă implicită (Modele de tip descriptor) 68
2.6. Modele neliniare intrare-stare-ieşire 72
2.6.1. Reprezentări neliniare de stare 72
2.6.2. Liniarizarea reprezentărilor neliniare de stare. Modele liniare în mici variații 75
2.6.3. Reprezentări neliniare de stare în formă implicită 80
2.7. Modele de tip diagramă bloc 82
2.7.1. Diagrame bloc cu blocuri descrise în domeniul timp 82
2.7.2. Diagrame bloc cu blocuri descrise în domeniul complex 89
2.8. Modele variante în timp 91
2.9. Noțiuni privind stabilitate sistemelor 93
2.9.1. Problematica stabilității interne 94
2.9.1.1. Definirea conceptelor fundamentale 94
2.9.1.2. Criterii utilizate în cazul reprezentărilor de stare liniare 101
2.9.1.3. Criterii utilizate în cazul reprezentărilor de stare neliniare 103
2.9.2. Problematica stabilității externe 105
2.9.2.1. Conceptul de stabilitate externă 105
2.9.2.2. Criteriu de stabilitate externă în cazul reprezentărilor liniare 107
2.9.3. Criteriul Hurwitz privind poziția rădăcinilor unui polinom în planul complex 109

Cap. 3. Trecere în revistă sistematizată a unor relaţii fundamentale din fizică 113

3.1. Circuite electrice 115

3.2. Sisteme mecanice 122

3.2.1. Sisteme mecanice în mişcare de translație 122

3.2.2. Sisteme mecanice în mişcare de rotație 130

3.3. Fluide necompresibile 138

3.4. Sisteme termice 147

3.4.1. Prezentarea de principiu a sistemelor termice bazate pe entropie 147

3.4.2. Prezentarea sistemelor termice bazate pe cantitatea de căldură 148

3.5. Transferul puterii între subsisteme de natură fizică diferită 154

3.5.1. Elemente de tip transformator 154

3.5.1.1. Exemplu de transformare a parametrilor puterii între un sistem mecanic în mişcare de translație şi un sistem hidraulic 154

3.5.1.2. Exemplu de transformare a parametrilor puterii mecanice ai mişcării de translație în parametrii puterii mecanice ai mişcării de rotație 155

3.5.2. Elemente de tip girator 156

3.5.2.1. Exemplu de transformare a parametrilor puterii între un sistem electric şiunul mecanic în mişcare de translație 156

3.5.2.2. Exemplu de transformare între parametrii puterii mişcării de translație şi cei corespunzători mişcării mecanice de rotație prin intermediul unui girator 157

Cap. 4. Analogii între diverse domenii ale fizicii 161

4.1. Studiu comparativ al mărimilor (variabilelor) specifice diferitelor domenii ale fizicii 161

4.2. Studiul comparativ al elementelor cu acțiuni tipice în procesarea energiei 164

4.2.1. Elemente ce realizează acumularea de tip inerțial (inductiv) a energiei (elemente I) 164

4.2.2. Elemente ce realizează acumularea de tip capacitiv a energiei (elemente C) 164

4.2.3. Elemente ce realizează disiparea energiei (elemente R) 169

4.2.4. Elemente care funcționează ca surse ideale de putere (elemente S_e şi S_f) 169

4.2.5. Elemente ce conservă energia realizând transferul puterii după principiul transformatorului (elemente TF) 173

4.2.6. Elemente ce conservă energia realizând transferul puterii după principiul giratorului (elemente GY) 173

4.3. Studiul comparativ al modalităților tipice de conectare (joncțiuni) 173

4.3.1. Conectarea elementelor ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*e*) (Joncțiuni J0) 176

4.3.2. Conectarea elementelor ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*f*) (Joncțiuni J1) 176

4.4. Prezentare sintetică a exprimărilor cauzale ale legilor fizicii 176
4.5 Exemple de sisteme fizice ilustrând analogii comportamentale 180
4.5.1. Sisteme conținând elemente S_e, R, C conectate prin J1 180
4.5.2. Sisteme conținând elemente S_e, R, I conectate prin J1 185
4.5.3. Sisteme conținând elemente S_e, R, I, C conectate prin J1 188

Cap. 5. Modelarea fizică a proceselor cu ajutorul limbajului bond–graph 195
5.1. Concepte specifice limbajului bond-graph 196
5.1.1. Elemente standard pentru procesarea energiei utilizate în metoda bond-graph 196
5.1.2. Bonduri (Legături între elementele standard) 197
5.1.3. Porturi 199
5.2. Construcția bond-graph-ului 199
5.2.1. Construcția bond-graph-ului acauzal 199
5.2.1.1. Cazul sistemelor electrice, hidraulice şi termice 210
5.2.1.2. Cazul sistemelor mecanice cu elemente în mişcare de translație sau de rotație 215
5.2.1.3. Reguli de simplificare a bond-graph-urilor acauzale 218
5.2.2. Construcția bond-graph-ului cauzal 221
5.3. Construcția modelelor bazată pe bond-graph-uri fără cauzalitate derivativă 224
5.3.1. Construcția unui model intrare-stare-ieşire 224
5.3.2. Construcția unui model tip diagramă bloc 238
5.4. Exemple ilustrative de modelare în cazul bond-graph-urilor fără cauzalitate derivativă 240
5.5. Construirea modelelor bazată pe bond-graph-uri conținând cauzalitate derivativă 272

Cap. 6. Extinderi ale limbajului bond–graph 285
6.1. Elemente controlate (modulate) în limbajul bond-graph 285
6.1.1. Bond-uri active 286
6.1.2. Elemente uniport controlate 286
6.1.2.1. Elemente inerțiale controlate 286
6.1.2.2. Elemente capacitive controlate 287
6.1.2.3. Elemente rezistive controlate 287
6.1.2.4. Surse controlate 287
6.1.3. Elemente diport controlate 288
6.1.3.1. Transformatoare controlate 288
6.1.3.2. Giratoare controlate 288
6.1.4. Exemple 288
6.2. Câmpuri multiport 302
6.2.1. Câmpuri C 303
6.2.2. Câmpuri I 306
6.2.3. Câmpuri mixte IC 309
6.2.4. Câmpuri R 309

6.2.5. Exemple 311
6.3. Structuri tip joncțiune şi sisteme multiport 313
6.3.1. Definirea conceptelor 313
6.3.2. Sisteme multiport cu cauzalitate integrală 313
6.3.3. Sisteme multiport cu cauzalitate mixtă 314
6.3.4. Exemple 316
6.4. Comutatoare şi sisteme hibride 318
6.4.1. Modelarea comutatoarelor ca elemente rezistive controlate 318
6.4.2. Modelarea comutatoarelor ca surse ideale de putere nulă 320
6.4.3. Exemple 322

Cap. 7. Studii de caz – Modelarea unor sisteme din diverse domenii tehnice 329
7.1. Incintă încălzită cu radiator 329
7.2. Servomotor hidraulic 332
7.3. Pompă cu piston 336
7.4. Punte Wheatstone 338
7.5. Termometru 339
7.6. Manipulator cu două grade de libertate 340
7.7. Absorbitor dinamic cu amortizare vâscoasă 347
7.8. Sistem de reglare 351
7.9. Motor de curent continuu cu excitație separată 353
7.10. Convertor de putere rezonant 358

Cap. 8. Utilizarea modelelor în simularea numerică 365
8.1. Elemente fundamentale ale calculului în virgulă flotantă 366
8.1.1. Surse de erori în rezolvarea numerică a problemelor 366
8.1.2. Aritmetica în virgulă mobilă (flotantă) 367
8.1.3. Condiționarea problemelor 375
8.1.4. Performanțele algoritmilor numerici 376
8.2. Simularea bazată pe integrarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale 379
8.2.1. Aspecte generale privind precizia metodelor de integrare numerică 380
8.2.2. Criterii de clasificare a algoritmilor de integrare numerică 381
8.2.3. Metode de integrare directe 383
8.2.3.1. Algoritmi de tip Taylor 384
8.2.3.2. Algoritmi de tip Runge-Kutta 385
8.2.3.3. Metode directe cu pas adaptiv 388
8.2.4. Metode de integrare indirecte 390
8.2.4.1. Algoritmi indirecți cu pas constant 390
8.2.4.2. Algoritmi de tip Adams 391
8.2.4.3. Algoritmi indirecți cu pas adaptiv 396
8.2.4.4. Metode de startare pentru algoritmi de integrare multipas 396
8.2.4.5. Stabilitatea algoritmilor de integrare multipas 396
8.2.5. Metode de tip Richardson (Metode de extrapolare) 397

8.2.6. Metode de tip Gear pentru ecuații stiff 397
8.2.7. Alegerea metodei de integrare utilizată în simulare 399
8.3. Utilizarea mediului MATLAB în simularea sistemelor descrise prin reprezentări intrare stare ieşire 400
8.3.1. Caracteristici generale ale mediului 401
8.3.1.1. Lansarea în execuție şi interfațarea cu sistemul de operare 401
8.3.1.2. Help "on-line" 402
8.3.1.3. Variabile şi spațiul de lucru 402
8.3.1.4. Fişiere program 403
8.3.1.5. Facilități de control logic 403
8.3.2. Vectori şi matrice 407
8.3.2.1. Introducerea şi referirea masivelor 407
8.3.2.2. Operatori aritmetici şi funcții pentru lucrul cu masive 409
8.3.3. Reprezentări grafice 2-D 411
8.3.4. Funcții destinate integrării numerice 414
8.3.4.1. Funcții ce utilizează descrierea de tip reprezentare intrare-stare-ieşire 414
8.3.4.2. Funcții ce utilizează descrierea de tip sistem de ecuații diferențiale ..417
8.4. Utilizarea mediului SIMULINK în simularea sistemelor descrise prin scheme bloc 428
8.4.1. Lansarea simulatorului SIMULINK 428
8.4.2. Construcția modelului de simulare sub formă de schemă bloc 429
8.4.3. Surse de semnale şi blocuri de vizualizare pentru un model SIMULINK 430
8.4.4. Salvarea, încărcarea şi actualizarea modelelor SIMULINK 430
8.4.5. Execuția simulării 431
8.5. Construirea automată a modelelor în mediul MATLAB folosind software-ul KALIBOND 435
8.5.1. Apelarea software-ului KALIBOND 436
8.5.2. Meniul File 437
8.5.3. Meniul Drawmode-on / Drawmode-off 437
8.5.4. Meniul Actions 438
8.5.5. Meniul Options 439
8.5.6. Meniul Zoom 440

Anexe 443
Anexa I - Transformarea Laplace 443
Anexa II - Conversia numerelor întregi din reprezentare binară în reprezentare hexazecimală 447
Anexa III - Comenzi MATLAB uzuale 448

Bibliografie 451
Index şi dicţionar român–englez 455

BOND-GRAPH LANGUAGE IN MODELING AND SIMULATION OF PHYSICAL – TECHNICAL SYSTEMS

Abstract and Contents

During the last decades, a large body of work has been invested for developing modeling techniques able to ensure a systematic approach to the interpretation of physical phenomena, by creating a unified framework for mathematical descriptions. Within this context, the bond-graph method appeared in the early sixties, relying on the fundamental principle of energy processing and on a series of behavioral prototypes existing in different areas of Physics, such that a rigorous orientation could be given to the construction of lumped parameter models in Engineering. At the conceptual level, the method operates with classes of objects isomorphic as dynamics, regardless of their concrete physical nature, fact which permits avoiding arbitrariness in the usage of physical laws for model building. In the middle eighties, the bond-graph language was already recognized as a standard tool, compatible with the causal models (input-output and input-state-output) exploited in various fields of Engineering and open to further developments. Therefore this book is not limited to a simple presentation of the bond-graph language, but it founds the exposure on a very generous background, laid out so as to cover important knowledge belonging to several closely related domains, as resulting from the Contents:

Preface I

Contents (in Romanian) V

Abstract and contents (in English) XI

Cap.1. Introduction to modeling problems 1

1.1. Fundamental concepts and terminology 1

1.1.1. System and model 2

1.1.2. Mathematical models in computer-aided analysis 3

1.1.3. Model construction and validation 3

1.1.4. Classification of mathematical models 4

1.2. Modeling based on physical principles 6

1.2.1. Physical laws and signals 6

1.2.2. Causal and acausal models 8
1.2.3. Energy transfer and causal modeling. Concept of ideal power-source 9

Chap. 2. Types of causal models and properties 11
2.1. Proportional models 12
2.1.1. Input-output causal transition 12
2.1.2. Comments on the causality of proportional models 12
2.2. Integration versus derivative models 14
2.2.1. Input-output causal transition for integration models 14
2.2.2. Laplace-transform description for integration models 16
2.2.3. Input-output causal transition for derivative models 16
2.2.4. Laplace-transform description for derivative models 17
2.2.5. Comments on the causality of integration and derivative models 18
2.3. Linear models defined by first order differential equations with constant coefficients 22
2.3.1. Input-output causal transition 23
2.3.2. Free and forced dynamics 25
2.3.3. Forced response for standard input signals 27
2.3.3.1. Forced response for step input 27
2.3.3.2. Forced response for harmonic input 31
2.3.3.3. Comments on some behavioral aspects highlighted by the forced response 36
2.3.4. Free response 37
2.3.5. Complete response for standard input signals 38
2.3.6. Operation approach based on Laplace transform 40
2.3.6.1. Complete response in operation approach 40
2.3.6.2. Forced response in operation approach. Transfer-function model 43
2.4. Linear models defined by state-space representations 44
2.4.1. Input-output causal transition 44
2.4.1.1. State-space models of the second order 44
2.4.1.2. State-space models of the n-th order 45
2.4.2. Complete response, free response and forced response 48
2.4.3. Free dynamics 51
2.4.4. Forced dynamics for standard input signals 54
2.4.4.1. Standard input signals 54
2.4.4.2. Laplace-transform approach to input-state-output transition 54
2.4.4.3. Forced response for polynomial inputs 56
2.4.4.4. Forced response for harmonic inputs 61
2.5. Extensions of state-space linear models 66
2.5.1. Multi-input and/or multi-output systems (Multivariable systems) 66
2.5.2. State-space representations in implicit form (Descriptor-type models) 68
2.6. Nonlinear state-space models 72
2.6.1. Nonlinear state representations 72

2.6.2. Linearization of nonlinear state representations. Linear models in small variations75
2.6.3. Nonlinear state representations in implicit form....80
2.7. Block-diagram models....82
2.7.1. Block diagrams in time domain....82
2.7.2. Block diagrams in complex domain....89
2.8. Time-variant models....91
2.9. Basic concepts in system stability....93
2.9.1. Internal (asymptotic) stability....94
2.9.1.1. Fundamentals....94
2.9.1.2. Conditions for internal stability of linear systems....101
2.9.1.3. Conditions for internal stability of nonlinear systems....103
2.9.2. External (bounded input - bounded output) stability....105
2.9.2.1. Concept of external stability....105
2.9.2.2. Condition for external stability of linear systems....107
2.9.3. Hurwitz theorem on root location for polynomials....109

Chap. 3. Systematical overview of some fundamental laws in Physics . 113
3.1. Electrical circuits....115
3.2. Mechanical systems....122
3.2.1. Mechanical translation....122
3.2.2. Mechanical rotation....130
3.3. Incompressible fluids....138
3.4. Thermal systems....147
3.4.1. Brief presentation based on the entropy concept....147
3.4.2. Approach based on the heat energy....148
3.5. Power transfer between subsystems of different physical nature....154
3.5.1. Transformers....154
3.5.1.1. An example of power parameter transformation between mechanical translation and hydraulics....154
3.5.1.2. An example of power parameter transformation between mechanical translation and mechanical rotation....155
3.5.2. Gyrators....156
3.5.2.1. An example of power parameter transformation between electrical circuits and mechanical translation....156
3.5.2.2. An example of power parameter transformation between mechanical translation and mechanical rotation....157

Chap. 4. Analogies between various physical domains....161
4.1. Comparative study of the variables used in various physical domains....161
4.2. Comparative study of the elements with typical actions in energy processing164
4.2.1. Storing elements of inertial (inductive) type (I elements)....164
4.2.2. Storing elements of capacitive type (C elements)....164
4.2.3. Dissipative (resistive) elements (R elements)....169
4.2.4. Ideal power sources (S_e and S_f elements)....169

4.2.5. Energy conserving elements via transformer law (TF elements)....173
4.2.6. Energy conserving elements via gyrator law (GY elements) 173
4.3. Comparative study of typical connections between elements (junctions)..173
4.3.1. Connecting elements with a common (*e*)-type variable (J0 junctions)....176
4.3.2. Connecting elements with a common (*f*)-type variable (J1 junctions)....176
4.4. Comments on the causal formulation of physical laws 176
4.5. Examples of physical systems illustrating behavioral analogies....180
4.5.1. Systems containing S_e, R, C elements connected by J1 180
4.5.2. Systems containing S_e, R, I elements connected by J1 185
4.5.3. Systems containing S_e, R, I, C elements connected by J1....188

Chap. 5. Physical modeling of processes by the bond-graph language 195
5.1. Specific concepts of the bond-graph language 196
5.1.1. Standard elements in energy processing used by the bond-graph method...196
5.1.2. Bonds....197
5.1.3. Ports....199
5.2. Bond-graph construction....199
5.2.1. Acausal bond-graph construction....199
5.2.1.1. Case of electrical, hydraulic and thermal systems 210
5.2.1.2. Case of mechanical translation and mechanical rotation 215
5.2.1.3. Simplifications in acausal bond graphs 218
5.2.2. Causal bond-graph construction....221
5.3. Model construction based on bond graphs without derivative causality 224
5.3.1. Construction of a state-space model....224
5.3.2. Construction of a block diagram model 238
5.4. Illustrative examples for model construction based on bond graphs without derivative causality....240
5.5. Model construction based on bond graphs with derivative causality....272

Chap. 6. Extensions of the bond-graph language....285
6.1. Controlled (modulated) elements in the bond-graph language....285
6.1.1. Active bonds....286
6.1.2. Controlled one-port elements....286
6.1.2.1. Controlled inductive elements 286
6.1.2.2. Controlled capacitive elements....287
6.1.2.3. Controlled resistive elements 287
6.1.2.4. Controlled sources 287
6.1.3. Controlled two-port elements 288
6.1.3.1. Controlled transformers....288
6.1.3.2. Controlled gyrators....288
6.1.4. Examples....288
6.2. Multiport fields....302
6.2.1. C fields 303
6.2.2. I fields 306

6.2.3. IC mixed fields....309
6.2.4. R fields....309
6.2.5. Examples....311
6.3. Junction structures and multiport systems....313
6.3.1. Defining concepts....313
6.3.2. Multiport systems with integral causality....313
6.3.3. Multiport systems with mixed causality....314
6.3.4. Examples....316
6.4. Switches and hybrid systems....318
6.4.1. Switch modeling as controlled resistive elements....318
6.4.2. Switch modeling as ideal sources of null power....320
6.4.3. Examples....322

Chap. 7. Case studies - Modeling systems belonging to various technical domains....329
7.1. Radiator-heated tank....329
7.2. Hydraulic servomotor....332
7.3. Pump with piston....336
7.4. Wheatstone bridge....338
7.5. Thermometer....339
7.6. Two-degrees of freedom manipulator....340
7.7. Dynamic absorber with viscous dumping....347
7.8. Control system....351
7.9. D.C. motor with separately excited field....353
7.10. Resonant power converter....358

Chap. 8. Model usage in numerical simulation....365
8.1. Fundaments of floating point computation....366
8.1.1. Sources of errors in computer-based problem resolution....366
8.1.2. Floating point arithmetic....367
8.1.3. Problem conditioning....375
8.1.4. Performance of numerical algorithms....376
8.2. Simulation based on numerical integration of differential equation systems379
8.2.1. General aspects regarding the accuracy of numerical integration methods.380
8.2.2. Classification of algorithms for numerical integration....381
8.2.3. Single-step methods....383
8.2.3.1. Taylor algorithms....384
8.2.3.2. Runge-Kutta algorithms....385
8.2.3.3. Step-size adaptive control....388
8.2.4. Multi step methods....390
8.2.4.1. Algorithms with constant stepsize....390
8.2.4.2. Adams-type algorithms....391
8.2.4.3. Algorithms with adaptive stepsize....396

8.2.4.4. Starting methods for multistep algorithms 396
8.2.4.5. Stability of multi-step algorithms....396
8.2.5. Richardson-type methods (Extrapolation methods)....397
8.2.6. Gear-type methods for stiff equations....397
8.2.7. Choice of the integration method used in simulation....399
8.3. MATLAB environment in system simulation based on state-space representations....400
8.3.1. General characteristics of the environment....401
8.3.1.1. Starting MATLAB and the interface with the operating system 401
8.3.1.2. On-line help 402
8.3.1.3. Variables and workspace 402
8.3.1.4. M files 403
8.3.1.5. Flow control 403
8.3.2. Vectors and matrices 407
8.3.2.1. Working with matrices 407
8.3.2.2. Arithmetical operations and matrix functions 409
8.3.3. 2-D graphical representations....411
8.3.4. Functions for numerical integration....414
8.3.4.1. Functions using the state-space representation 414
8.3.4.2. Functions using differential equation systems 417
8.4. SIMULINK environment in system simulation based on block diagrams....428
8.4.1. Starting SIMULINK 428
8.4.2. Construction of the simulation model in a block diagram form 429
8.4.3. Signal sources and visualization blocks for a SIMULINK model 430
8.4.4. Saving, loading and updating SIMULINK models....430
8.4.5. Simulation running 431
8.5. Automatic model construction in MATLAB using KALIBOND 435
8.5.1. Starting KALIBOND 436
8.5.2. File menu....437
8.5.3. Drawmode-on / Drawmode-off menu 437
8.5.4. Actions menu....438
8.5.5. Options menu 439
8.5.6. Zoom menu....440

Appendices 443
Appendix I - Laplace transform....443
Appendix II - Integer number conversion from binary to hexadecimal representation 447
Appendix III - Frequently used MATLAB commands....448

References 451

Index and Romanian-English dictionary....455

1 - Introducere în problematica modelării

Modelarea constituie o activitate indispensabilă pentru conceperea şi exploatarea eficientă a echipamentelor şi tehnologiilor specifice diferitelor ramuri ale ingineriei. Modelele elaborate în acest scop fac apel, cu precădere, la un limbaj matematic riguros şi caută să pună în valoare aplicabilitatea legilor fizicii pentru a surprinde cât mai precis esența fenomenelor. Atenția acordată în prezent modelării este potențată de facilitățile mediilor software dezvoltate în ultimul deceniu, care permit operarea cu modele tot mai complexe, în condițiile unei precizii ridicate a calculelor şi a creşterii continue a vitezei de lucru.

În acest context, efortul investit recent în perfecționarea tehnicilor de modelare a fost dirijat (pe lângă alte direcții) şi către explorarea legăturilor dintre interpretarea cauzală a fenomenelor (care se bucură de o îndelungată tradiție, creată în cadrul ştiinței sistemelor) şi modul în care este transferată şi procesată energia (ca suport nemijlocit al funcționării echipamentelor). Investigarea acestor legături a contribuit la fundamentarea, în termeni algoritmici, a metodei *bond-graph* de construire a modelelor, care se bazează pe o sistematizare a legilor fizicii (rezultată din analogii comportamentale) şi este capabilă să reducă drastic arbitrarietatea descrierilor (tipică soluțiilor ad-hoc, practicate frecvent în modelare).

Expunerea materialului din acest capitol introductiv este structurată pe două secțiuni după cum urmează:

1.1. Concepte fundamentale şi terminologie.

1.2. Modelarea bazată pe principiile fizicii.

1.1. Concepte fundamentale şi terminologie

Având o utilizare largă în limbajul cotidian, substantivul "model" îşi restrânge sfera noțională în cazul preocupărilor tehnico-inginereşti, concentrându-se pe adecvanța descrierii modului în care se comportă diverse entități fizice. Din această adecvanță decurge însuşi interesul prezentat de activitatea de "modelare" pentru practică, deoarece numeroase constatări privind detaliile de funcționare sau soluțiile de proiectare pot fi formulate pe baza modelului (ca substitut comportamental al entității fizice concrete).

Paragrafele conținute în secțiunea curentă îşi propun punctarea elementelor definitorii în construcția de modele, urmând ca aceste elemente să fie rafinate, prin abordări de

profunzime, pe parcursul întregului text al lucrării. Accentul este pus pe specificitatea modelelor de factură matematică, care, prin conținutul lor informațional (atât calitativ cât şi cantitativ) se dovedesc cele mai performante descrieri pentru investigațiile din domeniul ingineriei şi al ştiințelor exacte.

1.1.1. Sistem şi model

Prin conceptul de *sistem* vom înțelege un obiect fizic (o colecție de obiecte fizice care interacționează) ale cărui (căror) proprietăți intenționăm sa le studiem. O serie din aceste proprietăți pot fi investigate prin intermediul experiențelor efectuate asupra sistemelor; această manieră de studiu a caracterizat, pe parcursul timpului, dezvoltarea ştiințelor naturii, în general. Există totuşi anumite limitări, destul de severe, pentru cunoaşterea strict empirică (bazată numai pe organizarea şi desfăşurarea experiențelor). Dacă ne referim numai la experiențele costisitoare din punct de vedere financiar, sau la acelea ce comportă acțiuni, manevre periculoase, posibil distructive, este suficient a ne crea o imagine elocventă privind limitările cunoaşterii strict empirice. În fine, experiențele sunt imposibil de efectuat asupra unor sisteme care nu există încă, aflându-se doar în faza de proiect şi necesitând analiza unor proprietăți.

În toate situațiile amintite anterior, când cunoaşterea bazată pe experiențe nu este posibilă, pentru investigarea proprietăților unui sistem se face apel la *un model* al acestuia. În general vorbind, modelul unui sistem ne permite să răspundem la întrebări legate de comportarea sistemului, fără a trebui să efectuăm experiențe.

Cunoaşterea umană face apel la mai multe tipuri de modele, pe care le vom trece în revistă succint în cele ce urmează.

Angrenarea individului în ansamblul social al vieții cotidiene se realizează pe baza unor *modele mentale* care oferă individului *premise* pentru interacțiunea cu alți indivizi (de exemplu, cunoaşterea modului de a reacționa a diferitor persoane, în anumite situații) sau pentru utilizarea unor obiecte (de exemplu, cunoaşterea modului în care răspund la comenzi unele vehicule).

Comportarea unui sistem în diferite condiții poate fi descrisă în cuvinte, cu ajutorul unui *model verbal* (de exemplu, formularea unor principii de funcționare a unui vehicul căruia i se aplică anumite comenzi). Trebuie remarcată distincția dintre un model mental şi unul verbal (de exemplu, o persoană poate cunoaşte pentru sine modul de utilizare a unui vehicul, fără a formula în cuvinte principiile de funcționare pe care se bazează cunoaşterea proprie). Un model mental poate fi transformat într-un model verbal dacă informațiile conținute de către modelul mental sunt exprimate sub formă de unități sintactice coerente (propoziții, fraze). Calitatea unui model mental nu este automat transmisă şi modelului verbal, în sensul că o serie de informații disponibile în modelul mental nu se regăsesc în cel verbal (de exemplu, o persoană ştie foarte bine să manevreze un vehicul, dar nu este capabilă să furnizeze toate cunoştințele sale sub forma unor principii de utilizare care să servească şi altor persoane). Un model verbal poate fi formalizat sub forma unor reguli *If*, *then* sau *If*, *then*, *else* (formalizare ce este exploatată în prezent de către diferite domenii ale inteligenței artificiale).

Un alt tip de model îl constituie *modelul fizic* sau *macheta*, care îşi propune să reducă la o anumită scară caracteristicile unui sistem dat (de exemplu, macheta unei clădiri, a unui vehicul etc).

Dezvoltarea, de-a lungul timpului, a ştiinţelor fizico-tehnice s-a bazat pe *modelul matematic* care exprimă sub formă de relaţii matematice legăturile existente între diferite mărimi sau cantităţi ce prezintă interes pentru funcţionarea sistemului (de exemplu, legile studiate de către anumite domenii ale fizicii). Complexitatea unui model matematic este dictată, în general, de acurateţea (precizia) dorită în descrierea comportării sistemului, în sensul că un model simplu neglijează sau idealizează anumite aspecte ale comportării.

Pe parcursul acestei cărţi vom utiliza numai modele matematice, motiv pentru care se va renunţa frecvent la atributul "matematice", neexistând pericolul creării de confuzii în exprimare. De asemenea, ca terminologie, vom folosi în anumite situaţii substantivul "proces" drept sinonim al substantivului "sistem" în sensul de obiect fizic (sau colecţie de obiecte fizice) precizat la începutul acestui paragraf.

1.1.2. Modele matematice în analiza asistată de calculator

Modelul matematic al unui sistem poate fi exploatat prin intermediul unor prelucrări analitice care conduc la formulări sau expresii noi (de exemplu, rezolvarea unor ecuaţii algebrice sau a unor ecuaţii diferenţiale). Dar prelucrările analitice nu sunt întotdeauna posibile şi, în atare situaţii, se apelează la metode specifice calculului numeric. Aceste metode sunt, în general, uşor de utilizat într-unul din multiplele limbaje sau medii de programare disponibile, în prezent, pe diverse calculatoare. Astfel, investigarea unor proprietăţi ale sistemului studiat revine la rezolvarea numerică a unor probleme, procedeele de investigare de atare natură fiind referite în totalitatea lor sub denumirea de *analiză asistată de calculator*. Dintre acestea un rol important este deţinut de tehnicile de *simulare numerică*. Precizăm faptul că termenul "simulare" poate avea o semnificaţie mai largă (de exemplu, simularea unor defecţiuni pe un anumit echipament) şi de aceea s–a adăugat atributul "numerică". Totuşi, în contextele unde nu există pericol de confuzii, se poate renunţa la acest atribut, subînţelegându-se că activitatea de simulare se desfăşoară cu ajutorul calculatorului.

Prin intermediul simulării numerice, se pot desfăşura experienţe sau experimente de simulare care nu necesită nici un fel de manipulare fizică a sistemului concret studiat. Astfel, experimentele de simulare înlătură limitările experienţelor practice, cu acţiune nemijlocită asupra sistemului fizic, despre care s-a vorbit în paragraful anterior. Trebuie însă subliniat faptul că informaţiile furnizate de experimentele de simulare depind de *calitatea modelului matematic* utilizat, adică de fidelitatea cu care acest model surprinde elementele specifice comportării reale. Din acest motiv, problema construcţiei unor modele performante, cât mai precise, deţine o poziţie cheie în dezvoltarea actuală a ştiinţelor fizico-tehnice.

1.1.3. Construcţia şi validarea modelelor

Există două modalități fundamentale de abordare a construcției unui model matematic pentru un sistem fizic dat:

1. *Modelarea bazată pe principii fizice*, care face apel la legile constitutive sau de conservare cunoscute din fizică, aplicate adecvat subsistemelor ce compun sistemul în cauză.
2. *Identificarea* sau *modelarea bazată pe date experimentale*, care constă în alegerea unui model ce se "potriveşte" cât mai bine datelor experimentale, conform unui anumit criteriu.

Discutând la nivel general, cele două proceduri enunțate anterior trebuie privite ca exploatând informații comportamentale despre sistemul fizic studiat. Prima procedură presupune accesul în detaliu la structura sistemului, în timp ce a doua face uz de rezultatele concrete ale unor experimente. Mai trebuie subliniat faptul că există unele situații când sistemul studiat are o structură complexă, greu de investigat conform primei proceduri, motiv pentru care procedura a doua rămâne singura cale practică de abordare a construcției unui model. Într-o astfel de tratare a problematicii modelării, sistemul fizic este privit ca o "cutie neagră" (*eng*. black box), fără interesul de a "deconspira interiorul cutiei", preocupările axându-se numai pe găsirea unei exprimări matematice a relației cauză – efect.

Din punctul de vedere istoric al dezvoltării cunoaşterii umane, legile fizicii (care astăzi se prezintă sub forma unor adevăruri incontestabile, cu o exprimare matematică fermă) au fost inițial formulate ca probleme de identificare, necesitând un număr mare de observații experimentale (de exemplu, stabilirea legăturii dintre curentul electric ce parcurge un conductor şi diferența de potențial dintre extremitățile conductorului).

După cum am semnalat deja în paragraful anterior, utilizarea eficientă a unui model (de exemplu, pentru simulare numerică) este condiționată de *calitatea* modelului, adică de posibilitatea reproducerii cu ajutorul modelului a comportării sistemului real. Cu cât o atare reproducere se realizează în termeni mai fideli, cu atât se poate acorda o mai mare încredere raționamentelor şi observațiilor bazate pe substituirea sistemului fizic cu modelul său. Este totodată important să se înțeleagă că un model bun înseamnă o *bună aproximare* a realității, aproximare exploatabilă sub raport fizico-tehnic, dar care *nu poate substitui integral* realitatea însăşi, datorită unor *limitări inerente ale modelului*. Aceste limitări definesc *un domeniu de validitate al modelului*, adică un set de ipoteze asupra contextului experimental în care proprietățile concrete evidențiate de sistemul fizic sunt în bună concordanță cu constatările obținute prin intermediul modelului. Pentru o serie de legi ale fizicii, domeniul de validitate este mai restrictiv (de exemplu, legile din hidraulică bazate pe ipoteza curgerii laminare), iar pentru altele este suficient de larg (de exemplu, legile mecanicii clasice pot fi aplicate pentru foarte multe situații fără a fi nevoie să apelăm la legile mecanicii relativiste). De asemenea, mai merită de remarcat faptul că, uzual, pentru domenii de validitate restrânse se pot construi modele simple, în timp ce pentru domenii de validitate extinse este necesară utilizarea unor modele mai complicate (din care, modelele simple pot fi obținute drept cazuri particulare corespunzătoare anumitor restricționări pentru domeniul de validitate).

1.1.4. Clasificarea modelelor matematice

Modelele matematice pot fi grupate în clase pe baza unor caracteristici care se referă la descrierea realizată de model pentru comportarea corectă a sistemului. În paragraful curent vom prezenta numai câteva modalități de clasificare şi anume acelea necesare pentru parcurgerea lucrării de față. Aceste modalități de clasificare induc o terminologie specifică, ce permite diferențierea unor tipuri fundamentale de modele, cu ajutorul perechilor de antonime detaliate mai jos:

1. Modele deterministe – modele stohastice

Un model *determinist* furnizează o relație (relații) între mărimile utilizate pentru descrierea matematică. Un model *stohastic* furnizează o relație (relații) între caracterizări de tip probabilistic ale mărimilor utilizate pentru descrierea matematică. Altfel spus, un model determinist se bazează pe ipoteza totalei certitudini în cunoaşterea mărimilor, în timp ce un model stohastic permite existența incertitudinilor în cunoaşterea mărimilor. Subliniem faptul că incertitudinile nu se referă la încrederea în corectitudinea sau validitatea modelului, ci la maniera în care pot fi cunoscute anumite mărimi.

2. Modele statice – modele dinamice

Un model *static* furnizează o relație (relații) între valorile instantanee al mărimilor utilizate pentru descrierea matematică. Un model *dinamic* furnizează o relație (relații) între valori instantanee şi valori anterioare ale mărimilor utilizate pentru descrierea matematică. În general, modelele statice sunt exprimate prin ecuații algebrice (de exemplu, relația dintre tensiunea la extremitățile unui conductor şi curentul care circulă prin conductorul respectiv), iar modelele dinamice sunt exprimate prin ecuații diferențiale, integrale sau integro-diferențiale (de exemplu, relația dintre tensiunea la bornele unui condensator şi curentul care circulă prin condensatorul respectiv).

3. Modele liniare – modele neliniare

Un model *liniar* furnizează o relație (relații) de tip liniar între mărimile utilizate pentru descrierea matematică. Un model *neliniar* furnizează o relație (relații) de tip neliniar între mărimile utilizate pentru descrierea matematică.

4. Modele invariante în timp – modele variante în timp

Un model *invariant în timp* furnizează o relație (relații) între mărimile utilizate pentru descrierea matematică, în care toți coeficienții au valori constante în timp. Un model *variant* în timp furnizează o relație (relații) între mărimile utilizate pentru descrierea matematică, în care unul sau mai mulți coeficienți îşi modifică valoarea dependent de timp (de exemplu, relațiile dintre tensiunea la bornele unui rezistor şi curentul care circulă prin acesta, în condițiile modificării în timp a rezistenței electrice a rezistorului datorită creşterii temperaturii).

5. Modele cu parametrii concentrați – modele cu parametrii distribuiți

Un model cu *parametrii concentrați* furnizează o relație (relații) între mărimile utilizate pentru descrierea matematică, în care toate funcțiile utilizate depind de o singură variabilă independentă, care, în contextul acestei lucrări, are semnificație temporală. Uzual, astfel de modele sunt formulate cu ajutorul ecuațiilor diferențiale ordinare sau a sistemelor de ecuații diferențiale ordinare (de exemplu, ecuațiile dinamicii punctului material). Un

model cu *parametrii distribuiți* furnizează o relație (relații) între mărimile utilizate pentru descrierea matematică, în care cel puțin o parte din funcțiile utilizate depind (pe lângă variabila independentă cu semnificație temporală) de una sau mai multe variabile independente, de regulă cu semnificație spațială. Uzual, astfel de modele sunt formulate cu ajutorul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale sau a sistemelor de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (de exemplu, ecuația propagării căldurii într-un corp omogen şi izotrop).

În specificarea tipului unui model matematic se pot folosi unul sau mai mulți termeni din perechile de antonime prezentate anterior (evident câte un singur termen, din fiecare pereche). Astfel se poate vorbi despre modele statice liniare şi modele statice neliniare, modele dinamice liniare şi modele dinamice neliniare, modele dinamice liniare invariante în timp şi modele dinamice liniare variante în timp etc. Facem precizarea că în exprimarea curentă, dacă nu există pericolul unor confuzii, unii termeni pot lipsi, fiind subînțeleşi din contextul discuției. De pildă, dacă ne plasăm într-un cadru determinist pentru construcția de modele, atunci pentru toate tipurile de modele menționate în fraza de mai sus vom înțelege că sunt deterministe.

1.2. Modelarea bazată pe principiile fizicii

Edificiul legităților fizice, atâtea câte sunt în prezent dezvăluite cunoaşterii umane, este clădit pe principiul fundamental al conservării energiei, care, totodată, pune la dispoziție numeroase relații derivate din acest principiu (nu toate echivalente cu principiul însuşi) care sunt frecvent preferate (datorită simplității de manevrare) în elaborarea modelelor. Secțiunea de față îşi propune o discuție introductivă, cu caracter general, asupra modelării bazate pe relații fizice, punând accentul pe necesitatea asigurării, într-o manieră riguroasă, a compatibilității dintre principiul conservării energiei şi uşurința de construcție şi manipulare a modelului (destinat fie investigațiilor analitice, fie prelucrărilor numerice prin simulare). Această discuție motivează atenția acordată, în Capitolul 2, studierii unor tipuri de modele, considerate de referință pentru ştiințele tehnico-inginereşti, precum şi focalizarea Capitolelor 3 - 7 pe aprofundarea legilor fizicii printr-o abordare unificatoare, capabilă să evidențieze multiple analogii între diverse domenii.

1.2.1. Legi fizice şi semnale

În modelare, noțiunea de *semnal* posedă un conținut semantic larg, echivalent termenilor *mărime* sau *variabilă*, care sunt utilizați în descrierea funcționării unui sistem (indiferent de natura fizică concretă a acestuia). Din punct de vedere matematic, în această lucrare, orice semnal trebuie privit ca o funcție $f(t):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, în care argumentul (variabila independentă) t are *semnificație temporală*, permițând, astfel, exprimarea modului în care o anumită cantitate (cu înțeles fizic) se modifică în timp. Aşadar, utilizând termenul de semnal, ne putem referi la *evoluția în timp* a oricărei mărimi fizice, cum ar fi, de exemplu:

temperatura dintr-o incintă, viteza unui mobil, volumul de fluid dintr-un rezervor, tensiunea la bornele unui rezistor electric etc.

În funcție de complexitatea sistemului studiat, nu toate semnalele sunt accesibile măsurătorilor sau înregistrărilor, dar imposibilitatea accesului practic la aceste semnale nu înseamnă inexistența lor ca entități ce corespund, la nivel conceptual, caracterizării de mai sus. Cu alte cuvinte, chiar dacă construcția obiectului nu permite efectuarea de măsurători în structura internă, ne putem imagina că, într-o altă variantă constructivă (cu aceeaşi funcționalitate), măsurătorile ar deveni posibile cu un echipament adecvat, adică am putea obține descrieri de tipul $f(t)$.

În studierea dinamicii unui sistem, există două categorii de semnale care sunt nemijlocit accesibile măsurării sau înregistrării, datorită rolului pe care îl dețin în comportarea sistemului:

- *semnale de intrare* (semnale cauză, sau, simplu, *intrări*) care provin din universul exterior sistemului şi acționează asupra acestuia;
- *semnale de ieşire* (semnale efect, sau, simplu, *ieşiri*) care sunt furnizate de sistem către universul exterior acestuia.

Construcția modelelor prin identificare (prezentată sumar în paragraful 1.1.3) utilizează date experimentale conținând rezultatele măsurătorilor efectuate *numai* asupra intrărilor şi ieşirilor.

În schimb, modelarea bazată pe principiile fizicii (prezentată sumar în paragraful 1.1.3) realizează legături între intrări şi ieşiri prin intermediul unor relații analitice care includ şi semnalele interne din structura sistemului. Toate semnalele implicate în elaborarea modelului nu trebuie cunoscute experimental, dar informațiile de factură cantitativă (valori numerice) provin, de această dată, de la parametrii constructivi ai sistemului. În condițiile când pentru parametrii constructivi nu sunt disponibile valori numerice concrete, modelul obținut realizează doar o *descriere calitativă* a comportării sistemului. O atare descriere este valabilă pentru o clasă largă de obiecte, cu principii de funcționare identice, dar cu valori diferite pentru parametrii constructivi ce caracterizează elementele componente.

Relațiile analitice exprimând legăturile dintre semnale sunt, de fapt, relații din diverse domenii ale fizicii aplicate adecvat în contextul problemei de modelare. Întrebuințarea concretă şi eficientă a acestor legi depinde de experiența şi profunzimea abordării dovedită de cel ce construieşte modelul. Din nefericire, nu există algoritmi sau rețete detaliate care să ghideze modul de aplicare a legilor fizicii, garantând calitatea modelului obținut. În literatură sunt semnalate erori frecvente care se comit în elaborarea modelelor (de exemplu tipul de erori comentate în (Cellier *et al.*, 1996)). Dintre acestea, cea mai periculoasă (prin însăşi sorgintea ei) o constituie utilizarea unor *consecințe* sau *forme derivate* ale legilor fundamentale din fizică, care conduc la o tratare doar parțială sau incompletă a interconexiunilor dintre semnale. Edificatoare în acest sens sunt situațiile generate prin ignorarea *principiului conservării energiei* (care este universal valabil în toate domeniile fizicii) şi folosirea unor relații între diferite semnale care nu sunt echivalente cu principiul menționat (decurg din acesta, fără ca satisfacerea lor să asigure realizarea bilanțului energetic). Deşi nedorite, astfel de abordări defectuoase apar suficient de des, datorându-se, în principal, următoarelor trei motive:

- Semnalele ce pot fi individualizate în funcţionarea sistemului sunt aparent uşor de manevrat prin intermediul unor relaţii simple, a căror legături (ca şi proveniență) cu substratul energetic se pierd uzual din vedere;
- Exploatarea directă a conservării energiei este, în general laborioasă, iar abilitățile dobândite pe parcursul studierii diverselor capitole din fizică nu creează un punct de vedere global, unitar, la care să se apeleze comod în practică;
- Pornind de la concepția sistemică care descrie realitățile fizice prin asigurarea unei cauzalități în propagarea semnalelor, de la cauze către efecte, stabilirea lanțului cauzal complet (de la semnalele de intrare până la semnalele de ieşire) poate prezenta inadvertențe, datorate unor elemente componente ale obiectului pentru care rolurile de cauze şi respectiv de efecte se desemnează eronat.

1.2.2. Modele cauzale şi acauzale

În ştiinţele tehnico-inginereşti, activitatea de modelare s-a bazat, de-a lungul timpului, pe *modele cauzale*, care descriu comportarea sistemului printr-o legătură între două categorii de semnale: semnale de intrare (privite drept funcţii a căror dependenţă de timp poate fi precizată analitic, întrucât sunt furnizate din exterior către sistem) şi semnale de ieşire (privite drept funcţii a căror dependenţă de timp nu este cunoscută analitic, deoarece sunt produse de sistem, ca rezultat al stimulilor prezentaţi la intrare). Un astfel de model permite determinarea dependenței de timp a semnalelor de ieşire fie prin *calcul analitic*, fie prin *procedee numerice* (făcându-se apel la simularea într-un mediu software adecvat).

Un avantaj care este intens exploatat la modelele cauzale îl constituie posibilitatea conectării mai multor modele de acest tip, pe baza constatării că ieşirea unuia dintre modele constituie intrarea pentru un alt model, sau chiar pentru mai multe modele. Conectările de modele cauzale dau posibilitatea conceperii unor *structuri modulare* complexe, cărora li se pot asocia reprezentări grafice denumite *scheme* sau *diagrame* bloc, deoarece sunt alcătuite din blocuri cauzale, asociate modulelor.

Având în vedere larga răspândire a modelelor cauzale, în studiile teoretice, precum şi în cele bazate pe simulare, ştiinţele inginereşti operează, actualmente, cu câteva tipuri de descrieri matematice a tranziției intrare-ieşire, acceptate drept standarde pentru activitățile de analiză şi proiectare. Din acest motiv, capitolul următor este dedicat în totalitate prezentării tipurilor de modele cauzale cu utilizarea cea mai frecventă, ilustrând prin exemple şi aplicarea lor în practică.

După cum am semnalat deja la finele paragrafului anterior, în construcția de modele cauzale, compuse din blocuri (submodule) cauzale, pot interveni erori în atribuirea rolurilor de intrare, respectiv ieşire pentru anumite semnale ce servesc conectărilor de blocuri (submodule). Atare erori provin uzual din faptul că legile fizicii sunt, în general, *descrieri* sau *modele acauzale*, care leagă relațional două sau mai multe mărimi (semnale), fără nici o precizare privind cauzalitatea.

Transformarea unei descrieri acauzale într-un model cauzal (prin asignarea semnificațiilor de cauză şi efect pentru semnalele implicate în acea descriere) devine o problemă mai delicată atunci când se ține cont de bilanțul energetic care asigură funcționarea

obiectului real. În asemenea situații, universul exterior furnizează sistemului, în fiecare moment, o anumită putere (energie pe unitatea de timp), care poate fi exprimată în toate domeniile fizicii, ca produs a două semnale pereche, după cum urmează: în electricitate – tensiune şi curent, în mecanica mişcării liniare – forță şi viteză, în mecanica mişcării de rotație – moment al cuplului şi viteză unghiulară, în fluidică – presiune şi debit, în căldură – temperatură şi flux al entropiei. Cu alte cuvinte, cauza este puterea însăşi, adică produsul ambelor semnale, iar pericolul unei abordări superficiale constă în a desemna drept cauză doar un singur semnal, fără a înțelege exact rolul celui de-al doilea din perechea caracteristică domeniului respectiv.

Poziția cea mai recentă adoptată de comunitatea ştiințifică internațională față de modelarea bazată pe principiile fizice, vizează tocmai eliminarea neajunsurilor semnalate anterior cu privire la utilizarea modelelor cauzale. Se poate vorbi, în mare, de existența a două soluții, ambele exploatând, într-o primă fază a construirii modelului, descrierile acauzale. Prima soluție conduce în final la un model cauzal standard (de tipul celor semnalate la începutul acestui paragraf), compus din blocuri (submodele) acauzale, care este construit în deplină concordanță cu principiul conservării energiei, şi poate face obiectul prelucrărilor atât analitice, cât şi numerice (prin simulare). A doua soluție a fost concepută anume pentru prelucrări numerice şi constituie suportul simulatoarelor de ultima oră, realizate ca medii de programare orientată pe obiecte; blocurile (submodelele) sunt descrise şi conectate în manieră acauzală, revenind în sarcina simulatorului (transparent pentru utilizator) să asigure cauzalitatea în momentul efectuării calculelor aferente unui bloc sau grup de blocuri (Cellier *et al*., 1996).

Pe parcursul capitolelor viitoare vom prezenta detaliat prima din cele două soluții, care prezintă avantajul compatibilității totale cu cadrul tradițional al modelării, bazat pe descrieri cauzale, dar creează şi o viziune de ansamblu în abordarea profundă a fenomenelor fizice.

1.2.3. Transferul de energie şi modelarea cauzală. Conceptul de sursă ideală de putere

Conform celor discutate în paragraful anterior, transferul de energie (putere) dinspre universul exterior către sistem este cel care asigură funcționarea sistemului, adică ambele semnale pereche, ce definesc prin produsul lor puterea într-un domeniu al fizicii, contribuie la realizarea dinamicii sistemului. Astfel sistemul trebuie privit ca fiind conectat la o *sursă de putere*, iar înțelegerea deplină a modului cum se transferă puterea de la sursă către sistem constituie premisa cheie în modelarea cauzală.

În toate domeniile fizicii, în bună concordanță cu exploatarea normală a unei surse reale de putere, se poate considera că aceasta furnizează sistemului puterea necesară funcționării, *impunând* sistemului unul din cele două semnale pereche (adică intrare pentru sistem), iar celălalt semnal pereche *rezultând* din consumul concret de putere al sistemului (adică ieşire pentru sistem). De exemplu, funcționarea oricărui echipament electrocasnic se caracterizează prin aceea ca rețeaua electrică (sursa de putere) impune o tensiune alternativă

de 220V echipamentului (aşadar cauză), iar curentul este rezultatul consumului de putere de către echipament (aşadar efect): zecimi de amperi pentru un bec de veioză, în jur de un amper pentru o plită de gătit, câțiva amperi pentru un radiator etc. În exemplul considerat, rețeaua electrică funcționează ca o sursă ideală de tensiune, atributul "ideală" referindu-se la faptul că rețeaua este capabilă să furnizeze, la o tensiune alternativă de 220V, orice curent (implicit orice putere) solicitat de un echipament electro-casnic. Evident, această comportare desemnată drept ideală se limitează practic, la o gamă de curenți până în 10-15 A, corespunzătoare consumului de putere al tuturor echipamentelor electrocasnice aflate în funcțiune la un moment dat într-un apartament, valoarea maximă a curentului fiind controlată printr-o siguranță de protecție (cu rolul de a decupla alimentarea cu energie electrică atunci când se depăşeşte acea valoare maximă a curentului). Constatăm aşadar că luând în considerare ansamblul format din sursa ideală de tensiune şi un echipament electrocasnic, funcționarea acestuia din urmă poate fi descrisă printr-un model cauzal, având, drept intrare, tensiunea impusă de sursă şi drept ieşire, curentul necesitat de exploatarea normală a echipamentului.

Observațiile din exemplul anterior cu privire la modul în care un sistem primeşte, de la o sursă, puterea necesară funcționării sunt general valabile astfel încât, în toate domeniile fizicii putem vorbi de surse ideale cum ar fi: surse ideale de forță, surse ideale de cuplu, surse ideale de presiune, surse ideale de temperatură etc. Aşadar, având drept bază transferul de energie, construcția de modele poate fi abordată riguros, în manieră cauzală, utilizând metoda bond-graph prezentată în lucrarea de față. Metoda porneşte de la descrierea transferului de putere dintre o sursă ideală (sau mai multe surse ideale) şi un sistem, iar apoi propagă cauzalitatea impusă de tipul sursei (surselor), din aproape în aproape, pentru fiecare element component, ținând seama de principiul conservării energiei şi de specificul comportării elementelor constitutive. Această specificitate comportamentală are tot fundament energetic, şi anume modul în care se utilizează puterea (disipare, acumulare sau transformare). Totodată fundamentul energetic face ca specificitatea comportamentală să poată fi tratată unificat, pentru toate domeniile de interes, evidențiind o serie de analogii în exprimarea legilor fizicii care asigură rigurozitatea de fond a metodei bond-graph.

2. Tipuri de modele cauzale şi proprietăţi

Obiectivul acestui capitol constă în prezentarea graduală ca nivel de complexitate a unor tipuri de modele cauzale cu utilizare frecventă în practică. Nu se vor lua în discuție, datorită formulărilor matematice mai complicate, modelele stohastice şi modele cu parametri distribuiți (a se vedea clasificarea din paragraful 1.1.4. al capitolului precedent). Modul de tratare urmăreşte ca principiu general de expunere generalizarea noțiunilor discutate în etape anterioare, de aşa manieră încât cititorul să realizeze cu uşurință extinderea capacității de modelare survenită în urma creşterii gradului de complexitate a descrierii matematice. Pentru modelele liniare invariante în timp sunt formulate atât descrieri in domeniul timp, cât şi în domeniul complex, folosind metoda operațională a transformatei Laplace (care se bucură de o utilizare frecventă în diverse domenii conexe ingineriei electrice). Exemplele practice însoțesc prezentarea fiecărui tip de model pentru a-i ilustra utilitatea, dar şi pentru a crea un fundament de sorginte intuitivă în demersul cognitiv propriu-zis. Atragem atenția că în acest capitol accentul este pus pe tipologia şi proprietățile modelelor, fără a ne ocupa de tehnicile de construcție a acestor modele (care sunt abordate sistematic in capitolele 5, 6, 7, după o consolidare a cunoştințelor de fizică pe parcursul capitolelor 3 şi 4). Tot în scopul explorării dinamicii modelate de diverse tipuri de descrieri matematice, a fost introdusă o ultimă secțiune dedicată problematicii stabilității.

Comentarii privind tipurile de modele studiate în acest capitol şi proprietățile lor pot fi găsite in numeroase manuale sau monografii din aria automaticii, care prin excelență, este un domeniu de activitate inginerească preocupat de descrierea riguroasă a realității fizico-tehnice. Precizăm, totuşi, că organizarea prezentului capitol nu este specifică lucrărilor de automatică ce, în general, urmăresc nu numai modelarea proceselor, dar şi utilizarea respectivelor modele în proiectarea unor strategii de conducere (aspect care nu intră în sfera de interes a acestei cărți). De aceea structurarea materialului pe secțiuni a urmărit planul de mai jos, orientat, în exclusivitate, pe înțelegerea cât mai detaliată a caracteristicilor comportamentale proprii fiecărei clase de modele:

2.1. Modele de tip proporțional.
2.2. Modele de tip integrator sau derivator.
2.3. Modele liniare de tip ecuație diferențială de ordinul I, cu coeficienți constanți.
2.4. Modele liniare de tip reprezentare intrare-stare-ieşire.
2.5. Extinderi ale modelelor liniare intrare-stare-ieşire.
2.6. Modele neliniare intrare-stare-ieşire.
2.7. Modele de tip diagramă bloc.
2.8. Modele variante în timp.

2.9. Noţiuni privind stabilitatea sistemelor.

2.1. Modele de tip proporţional

Tratarea separată pe parcursul acestei secţiuni, a modelelor de tip proporţional, va permite să insistăm asupra problematicii cauzalităţii care este comod de investigat datorită simplităţii descrierii matematice. Discuţia face apel la exemple binecunoscute în fizică.

2.1.1. Tranziţia cauzală intrare-ieşire

Sistemele cu comportare proporţională pot fi descrise printr-un model matematic de tip *ecuaţie algebrică* liniară de ordinul I de forma:

$$y(t) = c\,u(t), \quad c \neq 0, \tag{2.1.1}$$

unde $u(t)$ notează mărimea (variabila sau semnalul) cauză (sau de intrare), iar $y(t)$ notează mărimea efect (sau de ieşire). Denumirea de "model de tip proporţional" se datorează faptului că la orice moment de timp t valoarea instantanee a mărimii efect $y(t)$ poate fi determinată din valoarea instantanee a mărimii cauză $u(t)$ prin multiplicare cu factorul (sau coeficientul) de proporţionalitate $c \neq 0$. Factorul de proporţionalitate trebuie privit drept o constantă ce caracterizează funcţionarea sistemului fizic modelat prin intermediul ecuaţiei (2.1.1). Unitatea de măsură prin care se exprimă valoarea lui $c \neq 0$ este corelată cu unităţile de măsură ale semnalelor $u(t)$ şi $y(t)$.

2.1.2. Comentarii asupra cauzalităţii unui model de tip proporţional

În sens larg, ecuaţia (2.1.1) poate fi privită sub forma implicită:

$$y(t) - c\,u(t) = 0, \qquad c \neq 0, \tag{2.1.2}$$

unde $u(t)$ şi $y(t)$ sunt două mărimi fizice ale căror valori instantanee sunt proporţionale prin intermediul factorului $c \neq 0$. Una dintre aceste două mărimi este furnizată din exterior către sistem şi reprezintă *mărimea cauză*, iar cealaltă este furnizată de sistem către exterior şi reprezintă *mărimea efect*. Deoarece în exprimarea implicită (2.1.2) nu se precizează mărimea cauză, se spune că ecuaţia (2.1.2) constituie o *formă acauzală* a modelului de tip proporţional. Prin convenţie, modul de scriere folosit în (2.1.1.) reprezintă o *formă cauzală* a modelului de tip proporţional şi semnifică faptul că semnalul din membrul drept, adică $u(t)$, este intrare, iar semnalul din membrul stâng, adică $y(t)$, este ieşire. Menţionăm că, tot prin convenţie, notaţia $u(t)$ desemnează uzual un semnal cauză, iar notaţia $y(t)$ desemnează uzual un semnal efect. (Convenţiile la care se face referire mai sus sunt specifice ingineriei sistemelor care operează numai cu descrieri cauzale, precizând ferm mărimile de intrare şi respectiv de ieşire ale modelelor.)

În finalul acestor comentarii, subliniem ideea că în cazul multor sisteme fizice forma

acauzală dată de ecuația (2.1.2) poate fi utilizată atât cu cauzalitate $u \to y$, cât şi cu cauzalitate $y \to u$. Asemenea situații sunt specifice sistemelor care disipă energie, semnalele $u(t)$ şi $y(t)$ fiind caracterizate prin aceea că produsul lor, $u(t)\ y(t)$, are semnificație de putere. Atragem însă atenția asupra faptului că pentru unele sisteme fizice se pot construi numai modele proporționale cauzale, întrucât orientarea transferului intrare-ieşire este impusă de însăşi funcționarea obiectului.

Numeroase legi din fizică sunt formulate ca model de tip proporțional, făcând apel la o exprimare acauzală de forma (2.1.2). Odată ce una din cele două mărimi din (2.1.2) este considerată cauză, cealaltă joacă rolul de efect. Exemplele de mai jos punctează aceste aspecte pentru câteva tipuri de sisteme concrete, binecunoscute cititorului în urma studierii disciplinei "Fizică". Toate sistemele luate în discuție au drept caracteristică comună faptul că, din punct de vedere energetic, disipă o anumită putere, egală numeric cu produsul celor două mărimi (semnale) din descrierea (2.1.2).

Exemplul 2.1.1.

Se consideră un *rezistor electric* având rezistența R [Ω], parcurs de un curent $i(t)$ [A], între ale cărui extremități există diferența de potențial (tensiunea) $u(t)$ [V], conform fig. 2.1.1. Modelul de tip proporțional în *forma acauzală* este dat de legea lui Ohm:

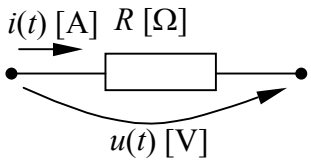


Fig. 2.1.1. Rezistor electric pentru care se utilizează un model proporțional

$$u(t) - Ri(t) = 0\,,$$

din care se poate obține *forma cauzală rezistivă* (rolul constantei este jucat de o rezistență):

$$u(t) = Ri(t)$$

şi *forma cauzală conductivă* (rolul constantei este jucat de o conductanță):

$$i(t) = (1/R)u(t)\,.$$

Exprimările cauzale evidențiate mai sus trebuie privite în corelare cu maniera de furnizare a energiei electrice utilizate de rezistor. Forma cauzală rezistivă presupune că rezistorul primeşte energia de la o *sursă ideală de curent* care *impune* $i(t)$ prin rezistor, iar $u(t)$ *rezultă* la bornele rezistorului. Forma cauzală conductivă presupune că rezistorul primeşte energia de la o *sursă ideală de tensiune* care *impune* $u(t)$ la bornele rezistorului, *rezultând* $i(t)$ care parcurge rezistorul.

Exemplul 2.1.2.

Se consideră un amortizor cu frecare vâscoasă, conform fig. 2.1.2. Asupra acestuia se exercită forța $F(t)$ [N], iar extremitatea sa liberă se deplasează cu viteza $v(t)$ [m/s]. Mişcarea extremității libere poate fi descrisă cu un model de tip proporțional în *forma acauzală*

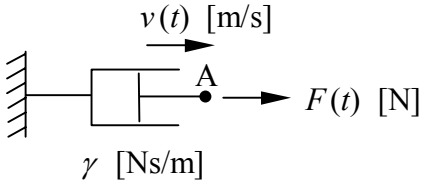


Fig. 2.1.2 Amortizor mecanic cu frecare vâscoasă pentru care se utilizează un model proporțional

$$F(t) - \gamma\, v(t) = 0,$$

unde γ [Ns/m] notează coeficientul de amortizare vâscoasă. Din exprimarea acauzală se poate obține *forma cauzală rezistivă* (rolul constantei de

proporţionalitate fiind jucat de coeficientul de amortizare vâscoasă):

$$F(t) = \gamma\, v(t)$$

şi forma *cauzală conductivă* (rolul constantei de proporţionalitate fiind jucat de inversul coeficientului de amortizare vâscoasă):

$$v(t) = (1/\gamma)F(t)\,.$$

Exprimările cauzale trebuie privite în corelare cu maniera de furnizare a energiei mecanice utilizate pentru deplasarea extremităţii libere a amortizorului. Forma cauzală rezistivă presupune că energia este furnizată de o *sursă ideală de viteză* care impune $v(t)$ drept cauză, iar $F(t)$ rezultă drept efect. Forma cauzală conductivă presupune că energia este furnizată de o *sursă ideală de forţă* care impune $F(t)$ drept cauză, iar $v(t)$ rezultă drept efect.

2.2. Modele de tip integrator sau derivator

Un număr mare de sisteme fizice, de naturi diferite sunt descrise prin legi care evidenţiază legătura dintre o *mărime fizică derivată* şi o altă *mărime fizică nederivată*. Interpretarea tranziţiei cauzale intrare-ieşire pentru o astfel de lege se poate face apelând la modele de tip integrator sau de tip derivator. Prin parcurgerea acestei secţiuni, cititorului i se crează posibilitatea unui studiu comparativ al aplicabilităţii celor două tipuri de modele (integrator sau derivator) prin referiri la funcţionarea unor sisteme fizice frecvent întâlnite în practica tehnico-inginerească.

2.2.1. Tranziţia cauzală intrare-ieşire pentru modele de tip integrator

Modele de tip integrator sunt descrise de o ecuaţie diferenţială având forma particulară:

$$a\dot{y}(t) = u(t); \quad y(0) = y_0, \qquad a \neq 0\,, \tag{2.2.1}$$

unde $u(t)$ este o funcţie continuă, notând *mărimea* (*variabila* sau *semnalul*) *cauză* (sau *de intrare*), iar $y(t)$ notează *mărimea efect* (sau *de ieşire*). Denumirea "model de tip integrator" se datorează faptului că $y(t)$ poate fi exprimat drept:

$$y(t) = (1/a)\int_0^t u(\tau)d\tau + y(0). \tag{2.2.2}$$

Exprimarea integrală (2.2.2) pune în evidenţă *funcţionarea de tip acumulativ* în raport cu mărimea de intrare $u(t)$, în sensul că integrarea utilizează toate valorile semnalului u de pe întreg intervalul $[0, t]$.

Forma integrală (2.2.2) posedă avantajul că poate fi utilizată şi în cazul mai general când $u(t)$ este *continuă pe porţiuni* (cu discontinuităţi de speţa întâia). De exemplu dacă $u(t)$ este definită cu o discontinuitate de speţa întâia în t_1, prin:

$$u(t)=\begin{cases}u_1(t), & 0\le t<t_1,\\ u_2(t), & t_1\le t,\end{cases} \tag{2.2.3}$$

unde $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ sunt funcţii continue, atunci, conform relaţiei (2.2.2), se poate scrie

$$y(t)=\begin{cases}(1/a)\int_0^t u_1(\tau)d\tau+y(0), & 0\le t<t_1,\\ (1/a)\left(\int_0^{t_1} u_1(\tau)d\tau+\int_{t_1}^t u_2(\tau)d\tau\right)+y(0), & t_1\le t.\end{cases} \tag{2.2.4}$$

Este evident că acest exemplu poate fi formulat şi în spiritul ecuaţiei (2.2.1), definind modelul astfel:

- pentru $0\le t<t_1$, modelul este: $a\dot{y}(t)=u_1(t); y(0)=y_0$;
- pentru $t_1\le t$, modelul este $a\dot{y}(t)=u_2(t);\quad y(t_1)=\lim\limits_{\substack{t\to t_1\\ t<t_1}} y(t)$.

Cu alte cuvinte, condiţia finală de pe intervalul [0, t_1), exprimată prin $y(t_1)=\lim\limits_{\substack{t\to t_1\\ t<t_1}} y(t)$, devine condiţie iniţială pentru intervalul [t_1, ∞).

În final, facem precizarea că majoritatea textelor inginereşti consideră drept subînţeleasă posibilitatea ca $u(t)$ să prezinte discontinuităţi de speţa întâia în condiţiile exprimării de forma (2.2.1) (fără a mai furniza explicaţiile anterioare privitoare la transformarea condiţiei finale în condiţie iniţială).

Răspunsul $y(t)$ al modelului de tip integrator la semnalul de intrare $u(t)$ exprimat prin relaţia (2.2.2) evidenţiază două componente şi anume:

- un termen depinzând numai de mărimea de intrare $u(t)$ şi nedepinzând de condiţia iniţială $y(0)$, de forma:

$$y_f(t)=\frac{1}{a}\int_0^t u(\tau)d\tau, \tag{2.2.5}$$

care poartă denumirea de *răspuns forţat* la semnalul de intrare $u(t)$ (indicele *f* din formula de mai sus provine din abrevierea adjectivului "forţat").

- un termen depinzând numai de condiţia iniţială $y(0)$ (fiind chiar *identică* cu aceasta) şi nedepinzând de mărimea de intrare $u(t)$, de forma:

$$y_l(t)=y(0), \tag{2.2.6}$$

care poartă denumirea de *răspuns liber* (indicele *f* din formula de mai sus provine din abrevierea adjectivului "liber").

În baza acestei constatări, se spune despre expresia (2.2.2) că defineşte *răspunsul complet* al modelului de tip integrator, care reprezintă o superpoziţie (suprapunere) a răspunsului forţat şi răspunsului liber:

$$y(t)=y_f(t)+y_l(t), \tag{2.2.7}$$

mai spunându-se despre $y_f(t)$ că descrie *componenta de regim forţat*, iar despre $y_l(t)$ că descrie *componenta de regim liber*. Examinând relaţia (2.2.2) mai putem afirma următoarele:

- vom avea de a face cu un *răspuns forţat* ori de câte ori se va aplica un semnal de intrare neidentic nul ($u(t)\neq 0$ pe anumite intervale de timp), iar condiţia iniţială va fi nulă ($y(0)=0$);

- vom avea de a face cu un *răspuns liber* ori de câte ori semnalul de intrare va fi identic nul pe întreg intervalul de observație ($u(t)\equiv 0$), iar condiția inițială va fi nenulă ($y(0)\neq 0$).

Este evident faptul că, din punct de vedere experimental, dacă atât semnalul de intrare cât şi condiția inițială sunt nenule, *nu putem identifica separat* componenta de regim forțat şi componenta de regim liber. Totuşi, separat, se pot efectua experimente de regim forțat, de regim liber şi de regim complet ale căror rezultate să ateste valabilitatea principiului suprapunerii efectelor descris prin relația (2.2.7).

Din discuția de mai sus se degajă şi următoarea observație importantă ce caracterizează evoluția de regim liber a integratorului: în regim liber (adică în absența semnalului de intrare), semnalul de ieşire $y(t)$ nu tinde să se anuleze, ci păstrează constantă valoarea sa inițială $y(0)$.

2.2.2. Descrierea operaţională asociată modelului de tip integrator

Prin aplicarea *transformării Laplace* (vezi Anexa I) ecuației (2.2.1), sau echivalent, ecuației (2.2.2), *imaginea* semnalului de ieşire L $\{y(t)\}=Y(s)$ poate fi exprimată în funcție de *imaginea* semnalului de intrare L $\{u(t)\}=U(s)$, sub forma:

$$Y(s)=\frac{1}{as}U(s)+y(0)\frac{1}{s}, \tag{2.2.8}$$

care furnizează o *descriere operațională,* sau o *descriere în domeniul complex* a transferului intrare-ieşire pentru modelul de tip integrator. Această terminologie punctează faptul că variabila independentă s din ecuația (2.2.8) nu mai are *semnificația temporală* a variabilei independente t din ecuațiile (2.2.1) sau (2.2.2), ecuații care constituie *descrieri în domeniul timp* a transferului intrare-ieşire pentru modelul de tip integrator. Cu alte cuvinte, descrierea operațională furnizează conexiuni între imaginile semnalelor (prin transformată Laplace) şi nu conexiuni între semnalele propriu-zise (ca funcții de variabilă temporală t). Facem precizarea foarte importantă că, în ciuda unor similitudini de scriere, în ecuația (2.2.8), factorul $1/s$ cu care se înmulțeşte $U(s)$ corespunde unui *operator* (sau unei *operații*) în domeniul timp (şi anume, operatorului $\int_0^t \mathrm{d}\tau$ aplicat funcției $u(t)$), în timp ce factorul $1/s$ cu care se înmulțeşte $y(0)$ corespunde unui *semnal* în domeniul timp (şi anume, semnalului treaptă de amplitudine unitate). Cu alte cuvinte relația (2.2.8) oferă o descriere de tip operațional *a dinamicii de regim complet*.

În cazul când condiția inițială este nulă, $y(0)=0$, adică avem de a face *cu dinamica de regim forțat*, relația (2.2.8) se reduce la:

$$Y(s)=\frac{1}{as}U(s), \tag{2.2.9}$$

unde funcția rațională

$$G(s)=\frac{1}{as} \tag{2.2.10}$$

în variabila independentă s permite definirea *funcției de transfer* asociate modelului de tip integrator. Această denumire pentru $G(s)$ este justificată de faptul că face posibilă scrierea unei relații foarte simple, $Y(s)=G(s)U(s)$, între imaginea semnalului de intrare $U(s)$ şi imaginea semnalului de ieşire $Y(s)$, pentru situația când $y(0)=0$, adică în regim forțat.

2.2.3. Tranziţia cauzală intrare-ieşire pentru modele de tip derivator

Modelele de tip derivator sunt descrise de o ecuaţie liniară de forma:

$$y(t) = b\dot{u}(t), \quad b \neq 0, \tag{2.2.11}$$

unde $u(t)$ este o funcţie netedă (de clasă $\boldsymbol{C}^1$ cu derivata de ordinul I continuă) notând *variabila* (sau *semnalul*) *cauză* (sau *de intrare*), iar $y(t)$ notează *variabila* (sau *semnalul*) *efect* (sau *de ieşire*).

Facem precizarea că în unele texte inginereşti exprimarea (2.2.11) este utilizată şi în sensul mai larg când $u(t)$ este derivabilă pe porţiuni, rezultând că $y(t)$ va avea un număr de puncte de discontinuitate de speţa întâia (corespunzătoare punctelor unghiulare ale lui $u(t)$). De asemenea, modelul (2.2.11) poate fi folosit şi în cazul când semnalul de intrare $u(t)$ prezintă discontinuităţi de primă speţă, dar, în acest caz, derivarea trebuie înţeleasă în *sensul distribuţiilor* (Kecs, 1981).

Exprimarea derivativă (2.2.11) pune în evidenţă *funcţionarea de tip anticipativ* în raport cu mărimea de intrare $u(t)$, în sensul că definiţia derivatei ca limită a raportului incremental $\dot{u}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left(u(t) - u(t_0)\right)/(t - t_0)$ presupune cunoaşterea valorilor lui $u(t)$ şi la momente de timp caracterizate prin $t > t_0$. Cu alte cuvinte, calculul lui $\dot{u}(t_0)$ face apel la valori ale semnalului u(t) care nu pot fi cunoscute la momentul curent t_0, decât dacă se acceptă ipoteza anticipării acestor valori.

2.2.4. Descrierea operaţională asociată modelului de tip derivator

Presupunând că în ecuaţia (2.2.11) funcţia $u(t)$ este de clasă $\boldsymbol{C}^1$ şi satisface condiţia $u(0)=0$, prin aplicarea *transformării Laplace* (vezi Anexa I) *imaginea* semnalului de ieşire $\boldsymbol{L}\{y(t)\}=Y(s)$ poate fi exprimată în funcţie de *imaginea* semnalului de intrare L $\{u(t)\}=U(s)$, sub forma:

$$Y(s) = bsU(s). \tag{2.2.12}$$

Relaţia (2.2.12) furnizează o *descriere operaţională,* sau o *descriere în domeniul complex* a transferului intrare-ieşire pentru modelul de tip derivator. Această terminologie punctează faptul că variabila independentă s din ecuaţia (2.2.12) nu mai are *semnificaţia temporală* a variabilei independente t din ecuaţiile (2.2.11), ecuaţie care constituie o *descriere în domeniul timp* a transferului intrare-ieşire pentru modelul de tip derivator. Cu alte cuvinte, descrierea operaţională furnizează conexiuni între imaginile semnalelor (prin transformată Laplace) şi nu conexiuni între semnalele propriu-zise (ca funcţii de variabilă temporală t). Funcţia

$$G(s) = b.s \tag{2.2.13}$$

în variabila independentă s permite definirea *funcţiei de transfer* asociate modelului de tip derivator.

Această denumire pentru $G(s)$ este justificată de faptul că face posibilă scrierea unei relații foarte simple, $Y(s)=G(s)U(s)$, între imaginea semnalului de intrare $U(s)$ şi imaginea semnalului de ieşire $Y(s)$.

Expresia (2.2.13) a funcției de transfer corespunzătoare modelului de tip derivator îşi păstrează valabilitatea şi în cazul când $u(0) \neq 0$, dar $u(0-) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} u(t) = 0$, adică $u(t)$ prezintă o discontinuitate de prima speță în $t = 0$. În această situație, transformata Laplace se aplică ecuației (2.2.11) în sensul teoriei distribuțiilor (Kecs, 1981).

2.2.5. Comentarii asupra cauzalităţii modelelor de tip integrator sau derivator

Un număr mare de legi întâlnite în diverse domenii ale fizicii posedă exprimări în forma implicită:

$$k\dot{v}(t) - w(t) = 0, \qquad k \neq 0, \tag{2.2.14}$$

unde $v(t)$ şi $w(t)$ sunt două *mărimi* (*variabile* sau *semnale*) dependente, ca evoluție în timp, una de cealaltă. Din punctul de vedere al construcției unui model, una din cele două mărimi trebuie privită drept *cauză*, iar cealaltă drept *efect*. În unele situații, modul de funcționare al procesului fizic modelat, dă informații precise privind care din cele două variabile $v(t)$ sau $w(t)$ reprezintă cauza şi care efectul. Există însă numeroase situații când rămâne la latitudinea modelatorului *asignarea cauzalității*, adică desemnarea variabilei cu rol de cauză şi a celei cu rol de efect. Vor exista atunci două opțiuni:

(*i*) $w(t)$ cauză şi $v(t)$ efect, caz când modelul este de tip integrator, cu exprimarea de forma (2.2.1) sau (2.2.2).

(*ii*) $v(t)$ cauză şi $w(t)$ efect, caz când modelul este de tip derivator, cu exprimarea de forma (2.2.11).

În condițiile când se utilizează opțiunea (*i*), se spune că legea (2.2.14) este exprimată în *cauzalitate de tip integral*, sau, mai simplu, în *cauzalitate integrală*. În condițiile când se utilizează opțiunea (*ii*), se spune că legea (2.2.14) este exprimată în *cauzalitate de tip derivativ* sau mai simplu, în *cauzalitate derivativă*. În baza celor discutate în paragrafele precedente, *se preferă* (ori de câte ori este posibil) exprimarea legii (2.2.14) în cauzalitate integrală, datorită următoarelor aspecte (anterior deja semnalate pentru fiecare tip de model, separat):

- Cauzalitatea integrală evidențiază o funcționare de tip acumulativ care este în deplină concordanță cu sensul fizic intuitiv, spre deosebire de caracterul anticipativ al exprimării cauzale derivative.
- Exprimarea în cauzalitate integrală, adică forma (2.2.1) sau (2.2.2), impune mai puține restricții de factură matematică asupra mărimii de intrare (funcție continuă pe porțiuni), spre deosebire de exprimarea (2.2.11) de tip derivativ (care necesită ca mărimea de intrare să fie o funcție netedă).

Un alt motiv (de altfel, deosebit de important) pentru care se preferă utilizarea cauzalității integrale îl constituie faptul că *în simulare*, calcularea mărimii de ieşire (prin metode aproximative, specifice analizei numerice - adică nu analitic, exact!) se realizează cu *precizie mult mai bună* pentru o descriere de forma (2.2.1) sau (2.2.2), decât pentru o descriere de forma (2.2.11).

Încheiem această secțiune prin a exemplifica aspectele discutate pentru câteva tipuri de sisteme concrete, binecunoscute cititorului în urma studierii disciplinei "Fizică". Toate sistemele luate în discuție au drept caracteristică comună faptul că, din punct de vedere energetic, *procesează o anumită putere*, egală numeric cu produsul semnalelor (variabilelor) $v(t)$ şi $w(t)$ din descrierea acauzală (2.2.14)

Exemplul 2.2.1.

Se consideră un condensator electric având capacitatea C_e [F], parcurs de curentul $i(t)$ [A], între ale cărui terminale există diferența de potențial (tensiunea) $u(t)$ [V], conform fig. 2.2.1. Modelul în exprimarea acauzală (2.2.14) este de forma:

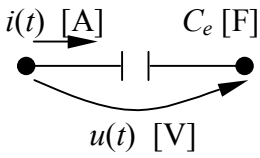


Fig. 2.2.1. Condensator electric pentru care se utilizează o descriere de forma (2.2.14)

$$C_e\dot{u}(t) - i(t) = 0\,,$$

din care se poate obține modelul de tip integrator (2.2.1):

$$C_e\dot{u}(t) = i(t)\,,$$

în care $i(t)$ este intrare, iar $u(t)$ ieşire şi modelul de tip *derivator* (2.2.11):

$$i(t) = C_e\dot{u}(t)\,,$$

în care $u(t)$ este intrare, iar $i(t)$ ieşire.

Exprimările cauzale evidențiate mai sus trebuie privite în corelare cu maniera de furnizare a energiei electrice utilizate de condensator. Modelul de tip integrator presupune că energia este primită de la o sursă ideală de curent, care impune $i(t)$ prin condensator, iar $u(t)$ rezultă între terminalele condensatorului conform (2.2.2). Modelul de tip derivator presupune că energia este primită de la o sursă ideală de tensiune care impune $u(t)$ între terminalele condensatorului, rezultând $i(t)$.

Exemplul 2.2.2.

Utilizăm condensatorul electric din exemplul 2.2.1 conectat la o sursă ideală de curent $i(t)$, conform circuitului din fig. 2.2.2. La momentul inițial, tensiunea pe condensator este $u(0) \neq 0$.

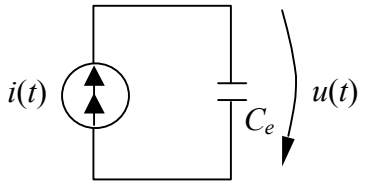


Fig. 2.2.2. Reprezentarea grafică a circuitului electric utilizat în Exemplul 2.2.2

În baza celor discutate în Exemplul 2.2.1, funcționarea condensatorului va fi descrisă de un model de tip integrator, cu $i(t)$ mărime de intrare iar, din relația 2.2.2 va rezulta mărimea de ieşire:

$$u(t) = \frac{1}{C_e}\int_0^t i(\tau)d\tau + u(0)\,,$$

care definește *răspunsul complet*. Acesta poate fi privit prin prisma suprapunerii efectelor descrisă de o egalitate de forma (2.2.7):

$$u(t) = u_f(t) + u_l(t)\,,$$

considerând că răspunsul forțat:

$$u_f(t) = \frac{1}{C_e}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

se obține dintr-un experiment cu același curent $i(t)$ şi condensatorul neîncărcat inițial $u(0) \equiv 0$, iar *răspunsul liber*

$$u_l(t) = u(0)$$

se obține dintr-un experiment cu condensatorul încărcat cu aceeaşi tensiune inițială $u(0) \neq 0$ şi curentul nul $i(t) \equiv 0$ pe întreg intervalul de observație.

În descrierea operațională, comportarea de regim forțat este caracterizată prin *funcția de transfer*

$$G(s) = \frac{1}{C_e s},$$

care leagă $\mathsf{L}\{i(t)\} = I(s)$ de $\mathsf{L}\{u(t)\} = U(s)$ prin relația:

$$U(s) = \frac{1}{C_e s} I(s).$$

Se constată imediat că funcția de transfer are semnificația unei impedanțe complexe $Z(s) = 1/(C_e s)$ asociate condensatorului, fapt care este binecunoscut cititorului familiarizat cu elementele de teoria circuitelor electrice.

Exemplul 2.2.3.

Ne plasăm în contextul Exemplului 2.2.2 cu singura deosebire că inițial condensatorul nu este încărcat, $u(0) = 0$. Având în vedere simplitatea legăturii dintre mărimea de intrare $i(t)$ şi mărimea de ieşire $u(t)$, existența unei reprezentări grafice pentru $i(t)$ permite construcția grafică a lui $u(t)$ într-o manieră directă, care exploatează semnificația geometrică de arie a integratei.

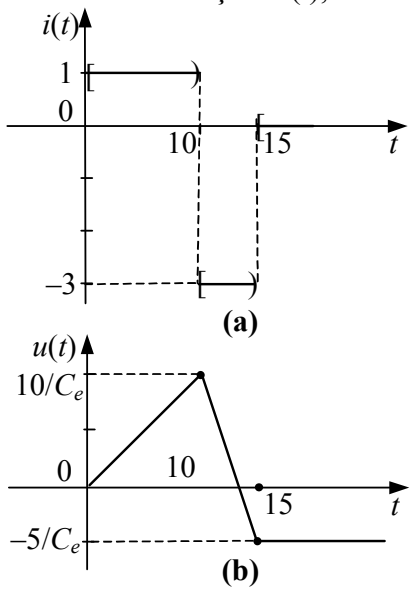


Fig. 2.2.3. Comportarea de regim forțat a sistemului considerat în exemplul 2.2.3
(a) mărimea de intrare $i(t)$
(b) mărimea de ieşire $u(t)$

Ilustrăm procesul de construcție grafică a lui $u(t)$ în fig. 2.2.3(b), pornind de la graficul lui $i(t)$ dat în fig. 2.2.3(a). Marcarea axelor în graficele din fig. 2.2.3 este generică, fără a preciza exact unitățile de măsură.

În intervalul de timp [0, 10), $u(t)$ va fi o rampă cu panta $1/C_e$, astfel încât $u(10) = 10/C_e$. Pe intervalul de timp [10, 15), $u(t)$ va fi o rampă cu panta $-3/C_e$, astfel încât $u(15) = -5/C_e$. Pentru $t \geq 15$, $i(t) \equiv 0$ şi, în consecință, $u(t) = -5/C_e$, condensatorul păstrând tensiunea existentă la momentul anulării curentului prin el. Se constată că punctelor de discontinuitate ale mărimii de intrare $i(t)$, le corespund puncte unghiulare în evoluția mărimii de ieşire $u(t)$.

Similar modului în care a fost trasat graficul răspunsului forțat din fig. 2.2.3(b), se poate construi şi graficul răspunsului complet cu $u(0) \neq 0$, care, de fapt,

revine la translarea pe verticală a graficului lui $u(t)$ cu valoarea constantă $u(0) \neq 0$.

Exemplul 2.2.4.

Utilizăm condensatorul electric din Exemplul 2.2.1 conectat la o sursă ideală de tensiune $u(t)$, conform circuitului din fig. 2.2.4. La momentul inițial, condensatorul nu este încărcat.

Este evident faptul că pe orice interval de timp se efectuează observarea, tensiunea pe condensator va fi identică cu cea a sursei, adică $u(t)$.

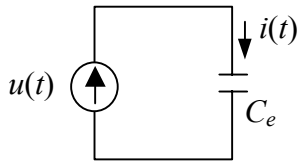


Fig. 2.2.4. Reprezentarea grafică a circuitului electric utilizat în Exemplul 2.2.4

În cazul când $u(t)$ este o funcție netedă ($u(t) \in \mathbf{C}^1$) pentru intervalul de timp considerat, în baza celor discutate în Exemplul 2.2.1, funcționarea condensatorului va fi descrisă de un model de tip derivator, cu $u(t)$ mărime de intrare iar drept mărime de ieşire rezultând curentul:

$$i(t) = C_e \dot{u}(t) .$$

În descriere operațională, pentru $u(0) = 0$, putem scrie:

$$I(s) = (C_e s)U(s) ,$$

de unde rezultă că funcția de transfer $G(s) = C_e s$ are semnificația unei *admitanțe operaționale*, legând $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ de $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$.

Observăm că modelul de tip derivator poate fi folosit şi în cazul mai relaxat când $u(t)$ este *continuă* şi *derivabilă pe porțiuni* pe intervalul de timp afectat observației. De exemplu, dacă sursa ideală de tensiune ar furniza semnalul $u(t)$, reprezentat grafic în fig. 2.2.3(b), atunci, pentru $i(t)$ ca mărime de ieşire, ar rezulta evoluția trasată grafic în fig. 2.2.3(a), cu singura deosebire că nu vom putea preciza valori numerice pentru $i(t)$ în punctele $t = 10$ şi $t = 15$ (adică, pentru momentele de timp corespunzătoare punctelor unghiulare ale intrării $u(t)$). În această situație, se poate folosi un procedeu de trasare grafică a mărimii de ieşire $i(t)$, pornind de la graficul mărimii de intrare $u(t)$, care exploatează semnificația derivatei $\dot{u}(t)$ ca pantă a tangentei la graficul lui $u(t)$.

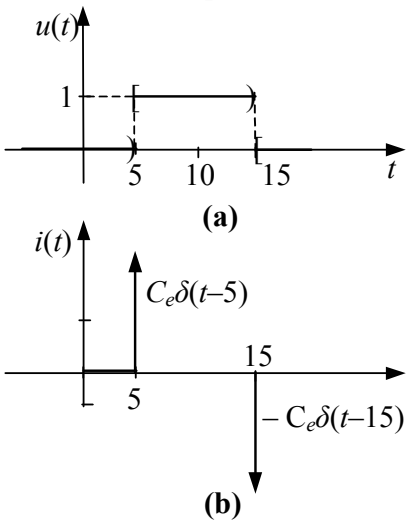


Fig. 2.2.5. Comportarea circuitului de tip derivator pentru circuitul electric din Exemplul 2.2.4
(a) mărimea de intrare $u(t)$
(b) mărimea de ieşire $i(t)$

În cazul când mărimea de intrare $u(t)$ prezintă discontinuități de speța întâia ca în fig. 2.2.5(a), modelul de tip derivator rămâne valabil în spațiul distribuțiilor şi va furniza mărimea de ieşire $i(t)$ din fig. 2.2.5(b) care conține două impulsuri delta – Dirac la $t = 5$ şi respectiv $t = 15$. Marcarea axelor în cele două grafice din fig. 2.2.5 este generică, fără a preciza exact unitățile de măsură.

Se constată că informațiile furnizate de model sunt în bună concordanță cu desfăşurarea unui experiment practic. Presupunând că prin sursa ideală de tensiune am crea, între terminalele condensatorului, tensiunea reprezentată grafic în fig. 2.2.5(a), dacă experimentul nu este distructiv se va constata un "şpiț" pozitiv de curent la

$t = 5$ (corespunzător *încărcării instantanee* a condensatorului) şi un "şpiţ" negativ de curent la $t = 15$ (corespunzător descărcării instantanee a condensatorului), în rest, curentul prin condensator fiind nul (deoarece tensiunile pe sursă şi condensator sunt identice). Este evident faptul că, în practică, neoperând cu elemente ideale de circuit, vor exista unele rezistenţe parazite, care vor face ca cele două "şpiţuri" să aibă amplitudini finite (dar suficient de mari, încât, din punct de vedere practic, să poată afecta integritatea componentelor).

În urma parcurgerii Exemplelor 2.2.1 – 2.2.4, cititorul ce posedă bune cunoştinţe de "Fizică" îşi poate formula o problematică similară pentru sisteme neelectrice, cu o comportare perfect analogă condensatorului, ca, de exemplu:

- pentru un resort elastic, cu una dintre extremităţi mobile – studierea legăturii dintre viteza extremităţii mobile şi forţa elastică din resort.
- pentru un rezervor cu secţiune circulară, cu alimentare la baza rezervorului – studierea legăturii dintre debitul de alimentare şi presiunea la baza rezervorului, în condiţii de curgere laminară.

Exemplul 2.2.5.

Se consideră un punct material de masă m [kg], care se deplasează liniar, fără frecare, conform fig. 2.2.6. Deplasarea se caracterizează prin viteza $v(t)$ şi forţa $F(t)$.

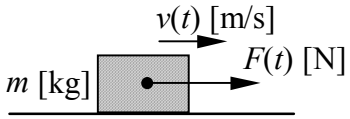


Fig. 2.2.6. Punct material în mişcare pentru care se utilizează o descriere de forma (2.2.14)

Modelul în exprimare acauzală (2.2.14) este de forma:

$$m\dot{v}(t) - F(t) = 0,$$

din care se poate obţine modelul de tip integrator (2.2.1):

$$m\dot{v}(t) = F(t),$$

în care $F(t)$ este intrare, iar $v(t)$ ieşire şi modelul de tip derivator (2.2.11):

$$F(t) = m\dot{v}(t),$$

în care $v(t)$ este intrare, iar $F(t)$ ieşire.

Exprimările cauzale evidenţiate mai sus trebuie privite în corelare cu maniera de furnizare a energiei mecanice utilizate în deplasare. Modelul de tip integrator presupune că energia este primită de la o *sursă ideală de forţă*, care *impune* forţa $F(t)$, iar $v(t)$ *rezultă* ca viteză de deplasare. Modelul de tip derivator presupune că energia este primită de la o *sursă ideală de viteză*, care *impune* viteza $v(t)$, *rezultând* forţa $F(t)$.

Pornind de la acest ultim exemplu de sorginte mecanică, similar la nivel conceptual Exemplului 2.2.1, cititorul poate relua, *mutatis mutandis*, aspectele detaliate în Exemplele 2.2.2, 2.2.3 şi 2.2.4. De asemenea, este invitat să transpună întreaga problematică pentru studierea legăturii dintre curentul electric ce parcurge o bobină fără miez şi tensiunea la bornele acesteia.

2.3. Modele liniare de tip ecuaţie diferenţială de ordinul I, cu coeficienţi constanţi

O serie de sisteme fizice întâlnite frecvent în practică prezintă structuri simple, a căror funcţionare poate fi modelată prin ecuaţii diferenţiale de ordinul I, liniare, cu coeficienţi constanţi. Astfel de modele permit analiza detaliată a dinamicii sistemului fizic atât sub raport calitativ (specificitatea comportării nedepinzând de valori numerice concrete), cât si din punct de vedere cantitativ (descrierea evoluţiei prin informaţii numerice cât mai precise, făcând apel, eventual şi la studii de simulare). Simplitatea structurilor şi implicit a modelelor constituie o premiză valoroasă pentru crearea de conexiuni cu suportul intuitiv, fenomenologic, ce poate fi dezvoltat cu uşurinţă pe baza cunoştinţelor dobândite prin studierea diferitelor capitole ale fizicii. Din aceste raţiuni şi, totodată, în perspectiva introducerii în viitor a unor modele mai complexe (care generalizează problematica abordată în secţiunea curentă), intenţionăm să oferim o tratare teoretică cât mai completă, însoţită de numeroase exemple (capabile să ilustreze aspectele comportamentale cele mai relevante).

2.3.1. Tranziţia cauzală intrare-ieşire

Un model de acest tip este definit printr-o ecuaţie diferenţială de forma:

$$a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=u(t), \qquad a_1>0,\ \ a_0>0,\ \ y(t_0)=y_0\,, \tag{2.3.1}$$

unde $u(t)$ este o funcţie continuă, notând *mărimea* (*variabila* sau *semnalul*) *cauză* (sau de *intrare*), iar $y(t)$ notează *mărimea efect* (sau de *ieşire*). Pentru un semnal de intrare $u(t)$ precizat şi o condiţie iniţială $y(t_0) = y_0$, semnalul de ieşire este dat de soluţia problemei Cauchy asociate ecuaţiei diferenţiale (2.3.1):

$$y(t)=e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-t_0)}y(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-\tau)}\frac{1}{a_1}u(\tau)d\tau\ \ ,\qquad t\in[t_0,\infty)\,. \tag{2.3.2}$$

Semnificaţia condiţiei de pozitivitate impusă coeficienţilor a_1, şi a_0 va fi discutată în secţiunea 2.9. care încheie acest capitol, întrucât, până la acel punct, cititorul va căpăta o sumă de cunoştinţe ce îi vor permite o viziune de ansamblu. În cazuri practice, semnalul de intrare $u(t)$ poate prezenta salturi de amplitudine finită (adică, din punct de vedere matematic, discontinuităţi de speţa întâia). Atare salturi nu sunt resimţite în semnalul de ieşire $y(t)$, datorită inerţiei manifestate de sistemul fizic, semnalul de ieşire păstrând valoarea din momentul premergător saltului. Această constatare de sorginte experimentală permite formularea următoarei ipoteze de continuitate asupra semnalului de ieşire $y(t)$ în situaţia când $u(t)$ suferă un salt. Dacă $u(t)$ este definită cu o discontinuitate de speţa întâia în t_1 prin:

$$u(t)=\begin{cases}u_1(t), & t_0\le t<t_1,\\ u_2(t), & t_1\le t,\end{cases}$$

unde $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ sunt funcţii continue pe intervalele considerate, atunci, $y(t)$ este continuă la stânga în t_1, adică putem scrie egalitatea:

$$y(t_1) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t < t_1}} y(t).$$

Astfel, condiţia impusă neomogenităţii $u(t)$ în teoria ecuaţiilor diferenţiale poate fi relaxată, în sensul că este suficient ca $u(t)$ să fie *continuă pe porţiuni*, cu discontinuităţi de speţa întâia. Relaxarea considerată dă posibilitatea construirii unui model pentru $t \in [t_0, \infty)$, în ciuda discontinuităţii lui $u(t)$, sub forma:

- pentru $t_0 \le t < t_1$, modelul este: $a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u_1(t), \quad y(t_0) = y_0$,
- pentru $t_1 \le t$, modelul este: $a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u_2(t), \quad y(t_1) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t < t_1}} y(t)$.

Cu alte cuvinte, în baza ipotezei de continuitate a semnalului $y(t)$ în t_1, condiţia finală de pe intervalul [0, t_1), exprimată prin $y(t_1) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t < t_1}} y(t)$, devine condiţie iniţială pentru intervalul [t_1, ∞).

Facem precizarea că majoritatea textelor inginereşti consideră drept subînţeleasă posibilitatea ca $u(t)$ să prezinte discontinuităţi de speţa întâia în condiţiile exprimării de forma (2.3.1) (fără a mai furniza explicaţiile anterioare privitoare la transformarea condiţiei finale în condiţie iniţială).

Din punct de vedere energetic, un model de forma (2.3.1) descrie în general, comportarea unui sistem fizic alcătuit dintr-un element care *acumulează energie* (cu o comportare de tip *integrator* - vezi secţiunea 2.2 a acestui capitol) şi un element care *disipă energie* (cu o comportare de tip *proporţional* – vezi secţiunea 2.1 a acestui capitol). Elementul integrator nu îşi poate modifica energia acumulată prin salt şi astfel se asigură *condiţia de continuitate* presupusă pentru $y(t)$ în cele prezentate mai sus.

Exemplul 2.3.1.

Se consideră un sistem mecanic alcătuit dintr-un resort cu constanta de elasticitate k_e, conectat în paralel cu un amortizor cu frecare vâscoasă, având coeficientul γ, conform fig. 2.3.1

În punctul A se aplică o forţă $F(t)$, care se modifică în timp după o lege precizată. Sub acţiunea lui $F(t)$, punctul A îşi modifică poziţia $x(t)$ măsurată în raport cu punctul fix O (ce corespunde situaţiei când arcul nu este tensionat $F(t) \equiv 0$ şi resortul este nedeformat). Sensul pozitiv al axei Ox este dat de alungirea resortului (adică spre dreapta, corespunzând săgeţii asociate lui $F(t)$).

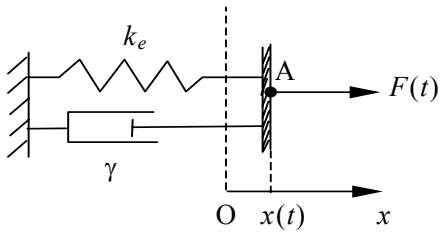


Fig. 2.3.1. Sistemul mecanic utilizat în Exemplul 2.3.1

Construirea unui model cauzal având drept intrare forţa $F(t)$ şi drept ieşire deplasarea $x(t)$, se bazează pe exploatarea egalităţii:

$$F_r(t) + F_a(t) = F(t), \quad t \in [t_0, \infty),$$

în care $F_r(t) = k_e x(t)$ este forţa elastică corespunzătoare deformării resortului, iar

$F_a(t) = \gamma v(t) = \gamma \dot{x}(t)$ este forța elastică corespunzătoare amortizorului. Înlocuind aceste expresii, se obține ecuația diferențială:

$$\gamma \dot{x}(t) + k_e x(t) = F(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

care este de forma (2.3.1), condiția inițială x_0 având semnificația poziției punctului A în momentul t_0 (considerat drept moment de început pentru modelarea evoluției sistemului mecanic).

Utilizând modelul construit şi făcând apel la exprimarea analitică (2.3.2) a soluției ecuației diferențiale, intrăm în posesia unei dependențe a deplasării punctului A în raport cu timpul de forma:

$$x(t) = e^{-\frac{k_e}{\gamma}(t-t_0)} x(t_0) + \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{k_e}{\gamma}(t-\tau)} F(\tau)d\tau, \qquad t \in [t_0, \infty),$$

care evidențiază rolul următoarelor elemente:

- parametrii fizici ai sistemului mecanic (constantele de material k_e şi γ)
- deplasarea inițiala a punctului A ($x(t_0)$)
- forța ce acționează asupra punctului A ($F(t)$).

2.3.2. Comportare de regim liber şi de regim forţat

Soluția (2.3.2) a ecuației diferențiale (2.3.1) poate fi descompusă sub forma:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t), \quad t \in [t_0, \infty), \tag{2.3.3}$$

unde prima componentă:

$$y_l(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-t_0)} y(t_0), \quad t \in [t_0, \infty), \tag{2.3.4}$$

defineşte *comportarea de regim liber* sau *răspunsul liber* al sistemului (determinat numai de *condiția inițială* $y(t_0) = y_0$, considerând *semnalul de intrare nul*), iar cea de a doua componentă:

$$y_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-\tau)} \frac{1}{a_1} u(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{2.3.5}$$

defineşte *comportarea de regim forțat* sau *răspunsul forțat* al sistemului (determinat numai de *semnalul de intrare* $u(t)$, considerând *condiția inițială nulă*).

Descompunerea (2.3.3) pune în evidență următoarele aspecte:

- $y_l(t)$, exprimat prin (2.3.4), poate fi privit ca soluția ecuației diferențiale (2.3.1) în forma omogenă (adică $u(t) \equiv 0$) cu condiția inițială y_0, ceea ce conduce la *modelul de regim liber*:

$$a_1 \dot{y}_l(t) + a_0 y_l(t) = 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad y(t_0) = y_0; \tag{2.3.6}$$

- $y_f(t)$, exprimat prin (2.3.5), poate fi privit ca soluția ecuației diferențiale (2.3.1) în forma *neomogenă*, cu condiția inițială *nulă* (adică $y(t_0) = 0$), ceea ce conduce la *modelul de regim forțat*:

$$a_1\dot{y}_f(t)+a_0y_f(t)=u(t),\quad a_1>0,\ \ a_0>0,\quad y(t_0)=0. \tag{2.3.7}$$

Astfel, descompunerea (2.3.3), ne arată că modelul (2.3.1) considerat inițial, constituie un *model complet* al comportării sistemului fizic, iar $y(t)$ din (2.3.2) reprezintă *răspunsul complet*, care cuprinde informațiile privitoare atât la *evoluția liberă* cât şi la *evoluția forțată*. Subliniem faptul că, din punct de vedere *practic*, observarea semnalului $y(t)$ (prin măsurare, înregistrare etc.) nu permite evidențierea separată a celor două componente $y_l(t)$ şi respectiv $y_f(t)$ din descompunerea (2.3.3). Această descompunere are rolul de a preciza *la nivel conceptual*, faptul că evoluția în timp a semnalului de ieşire $y(t)$ este datorată *structurii sistemului* (sintetizată în coeficienții a_1, a_0) asupra căreia acționează, pe de o parte, *condiția inițială* (modelul de regim liber (2.3.6)), iar, pe de altă parte *semnalul de intrare* (modelul de regim forțat (2.3.7)). Trebuie remarcat faptul că descompunerea (2.3.3) este posibilă datorită *liniarității modelului*. În cazul când ipoteza de liniaritate a comportării este respectată practic cu suficientă acuratețe, se pot organiza trei tipuri de experimente:

1. experimente corespunzătoare modelului complet (2.3.1) pentru observarea $y(t)$;
2. experimente corespunzătoare modelului de regim liber (2.3.6) pentru observarea $y_l(t)$;
3. experimente corespunzătoare modelului de regim forțat (2.3.7) pentru observarea $y_f(t)$;

şi ulterior, se poate verifica validitatea descompunerii (2.3.3).

Este evident faptul că, în practică, majoritatea situațiilor necesită studierea răspunsului complet, dar există şi cazuri când obiectul studiului îl poate constitui fie numai răspunsul liber, fie numai răspunsul forțat.

Exemplul 2.3.2.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1. Să presupunem că la momentul inițial t_0 resortul este deformat şi $x(t_0)\neq 0$ (drept urmare a unui experiment premergător momentului t_0) şi că, începând cu momentul t_0, asupra punctului A nu se mai aplică nici o forță (adică $F(t)\equiv 0$ pentru $t\in[t_0,\infty)$). Condițiile de mai sus definesc *comportarea de regim liber* a sistemului mecanic, care poate fi modelată printr-o ecuație diferențială omogenă de forma (2.3.6):

$$\gamma\dot{x}_l(t)+k_ex_l(t)=0,\quad x_l(t_0)=x_0\neq 0.$$

Soluția problemei Chauchy ataşate acestei ecuații diferențiale este de forma (2.3.4):

$$x_l(t)=e^{-\frac{k_e}{\gamma}(t-t_0)}x_0,\quad t\in[t_0,\infty),$$

şi descrie dependența de timp a deplasării punctului A din x_0 către 0.

Să presupunem că la momentul inițial t_0 resortul nu este deformat ($x(t_0)=0$) şi că începând cu momentul t_0 asupra punctului A se aplică o forță $F(t)$ care nu este identic nulă pe intervalul $t\in[t_0,\infty)$. Condițiile formulate definesc comportarea de regim forțat a sistemului mecanic, care poate fi modelată printr-o ecuație diferențială neomogenă de forma (2.3.7):

$$\gamma\dot{x}_f(t)+k_ex_f(t)=F(t),\quad x_f(t)\equiv 0.$$

Soluția problemei Chauchy ataşate acestei ecuații diferențiale este de forma (2.3.5):

$$x_f(t) = \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{-k_e(t-\tau)/\gamma} F(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, \infty),$$

şi descrie dependența de timp a deplasării punctului A, pornind din 0, sub influența forței $F(t)$.

Ecuația diferențială neomogenă construită în Exemplul 2.3.1, împreună cu condiția inițială x_0 arbitrară furnizează un model complet al comportării sistemului mecanic. Soluția problemei Chauchy $x(t)$ determinate în Exemplul 2.3.1 defineşte *răspunsul complet* al sistemului mecanic, luând în considerare atât influența deplasării inițiale $x(t_0)$, cât şi a forței $F(t)$ pe intervalul $t \in [t_0, \infty)$. În acest caz, dependența de timp a deplasării punctului A poate fi privită şi prin prisma unei egalități de forma (2.3.3):

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t), \quad t \in [t_0, \infty),$$

care are semnificația suprapunerii efectelor (răspunsurilor) corespunzătoare regimului liber şi regimului forțat.

2.3.3. Dinamica de regim forţat pentru semnale de intrare standard

Dinamica de regim forțat corespunde modelului (2.3.7), care derivă din modelul complet (2.3.1), pentru cazul particular al condiției inițiale nule, adică $y(t_0) = 0$. Evoluția mărimii de ieşire $y(t)$ este dată de relația (2.3.5).

Din punct de vedere practic prezintă interes studierea efectelor datorate semnalelor de intrare de tip treaptă şi sinusoidal (ca un caz particular al unui semnal armonic mai complex).

Pentru simplificarea scrierii, vom considera drept moment inițial $t_0 = 0$, dar aspectele ce urmează a fi discutate, îşi păstrează valabilitatea pentru orice valoare $t_0 \neq 0$.

2.3.3.1. Răspunsul forţat la semnal treaptă

Se consideră semnalul de intrare

$$u(t) = \bar{u} = \text{constant}, \quad t \in [0, \infty), \tag{2.3.8}$$

care, conform (2.3.5) cu $t_0 = 0$, va conduce la semnalul de ieşire:

$$y_f(t) = \frac{1}{a_0}\bar{u} - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\frac{1}{a_0}\bar{u}, \quad t \in [0, \infty). \tag{2.3.9}$$

Introducând notația:

$$y_s = \frac{\bar{u}}{a_0} \tag{2.3.10}$$

se constată că, datorită condiției impuse asupra coeficienților $a_1 > 0$ şi $a_0 > 0$, se obține comportarea asimptotică

$$\lim_{t\to\infty}\left(y_f(t)-y_S\right)=0\,. \tag{2.3.11}$$

Egalitatea (2.3.11) arată că ieşirea evoluează spre valoarea y_S, definită prin (2.3.10), care poartă denumirea de *valoarea de regim staţionar* a răspunsului forţat şi care depinde de:

- structura sistemului prin intermediul a_0
- magnitudinea semnalului de intrare $\bar{u}$

Sub raport experimental, interesează, intuitiv vorbind, cât de "repede" se realizează "apropierea" lui $y_f(t)$ de valoarea de regim staţionar y_S, adică un criteriu pentru caracterizarea în timp a procesului de trecere la limită (2.3.11). Un atare criteriu se obţine considerând evoluţia în timp a raportului:

$$\varepsilon_S(t)=\frac{\left|y_f(t)-y_S\right|}{\left|y_f(0)-y_S\right|}=\frac{\left|y_f(t)-y_S\right|}{\left|y_S\right|}=e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\,, \tag{2.3.12}$$

care are semnificaţia unei *erori relative a ecartului curent* $\left|y_f(t)-y_S\right|$ faţă de *ecartul iniţial* $\left|y_f(0)-y_S\right|=\left|y_S\right|$. Eroarea relativă $\varepsilon_S(t)$, conform 2.3.12, depinde de:

- structura sistemului, caracterizată prin $a_1>0$, $a_0>0$;
- timpul curent t.

Pentru un sistem dat (deci $a_1>0$, $a_0>0$ precizate), se pot impune *praguri corelate cu acurateţea observaţiei* pentru a evalua *procentual* cantitatea $\varepsilon_S(t)$ din (2.3.12), având în vedere faptul că $\varepsilon_S(t)$ este o funcţie strict decrescătoare în raport cu t. De exemplu, pentru t luând valoarea:

$$t_S=3a_1/a_0 \tag{2.3.13}$$

se obţine $\varepsilon_S(t_S)=e^{-3}\cong 5/100=5\%$, iar pentru t luând valoarea:

$$t_S=4a_1/a_0 \tag{2.3.14}$$

se obţine $\varepsilon_S(t_S)=e^{-4}\cong 2/100=2\%$.

Cu alte cuvinte pentru $t\geq t_S$, cu t_S dat de (2.3.13) (respectiv (2.3.14)), ecartul curent $\left|y_f(t)-y_S\right|$ ajunge la 5% (respectiv 2%) din valoarea ecartului iniţial $\left|y_f(0)-y_S\right|=\left|y_S\right|$. Aşadar raportându-ne la un prag de acurateţe a observaţiei de 5% (respectiv 2%) din ecartul iniţial, se poate considera că sistemul ajunge în *regimul staţionar* după un *timp finit* $t_S=3(a_1/a_0)$ conform (2.3.13) (respectiv $t_S=4(a_1/a_0)$, conform (2.3.14)).

În intervalul de timp [0, t_S) se spune că sistemul se află în *regim tranzitoriu*, semnalul de ieşire $y_f(t)$ fiind suficient de îndepărtat de valoare y_S către care tinde (ecartul curent $\left|y_f(t)-y_S\right|$este mare în comparaţie cu ecartul final $\left|y_S\right|$).

În conformitate cu expresiile (2.3.13), respectiv (2.3.14) care definesc durata regimului tranzitoriu pentru o eroare de 5% (respectiv 2%), se constată că dinamica sistemului este caracterizată de raportul:

$$T=a_1/a_0\,[\text{secunde}] \tag{2.3.15}$$

denumit *constantă de timp* a sistemului. În consecință putem afirma că durata regimului tranzitoriu este cu atât mai mică cu cât constanta de timp a sistemului este mai mică, (indiferent de expresia (2.3.13) sau (2.3.14) care este utilizată pentru estimarea lui t_s).

În final, atragem atenția asupra unei alte modalități de scriere a modelului (2.3.1) care uzitează notația T din (2.3.15) şi care este preferată în majoritatea textelor de sorginte tehnică:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad T > 0, \quad K > 0, \quad y(0) = y_0, \tag{2.3.16}$$

în care constanta K poartă denumirea de *factor de amplificare* şi are valoarea:

$$K = 1/a_0 . \tag{2.3.17}$$

Această scriere evidențiază faptul că valoarea ieşirii în regim staționar y_s din (2.3.10) poate fi privită ca provenind din "amplificarea" valorii constante a semnalului de intrare $\overline{u}$. Subliniem faptul că termenul de "amplificare" este utilizat în *sens larg,* de proporționalitate, K putând lua orice valoare pozitivă (deci, inclusiv *subunitară*). Cu aceste notații, y_f(t) din (2.3.9) poate fi rescris drept:

$$y_f(t) = K(1 - e^{-t/T})\overline{u}. \tag{2.3.18}$$

Exemplul 2.3.3.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1, având valorile parametrilor $k_e = 2$ N/mm şi $\gamma = 20$ Ns/mm. Constanta de timp T are conform (2.3.15) valoarea

$$T = \frac{\gamma}{k_e} = 10\,\text{s}$$

iar factorul de amplificare K rezultă, în baza (2.3.17), ca fiind:

$$K = \frac{1}{k_e} = 0.5\,\text{mm/N}.$$

Pentru deplasare inițială nulă $x(0) = 0$, asupra punctului A se aplică o forță constantă $F(t) = \overline{F} = 10\,\text{N}$. Evoluția deplasării punctului A în funcție de timp este o expresie de forma (2.3.9)

$$x_f(t) = 5\left(1 - e^{-t/10}\right)\text{mm}$$

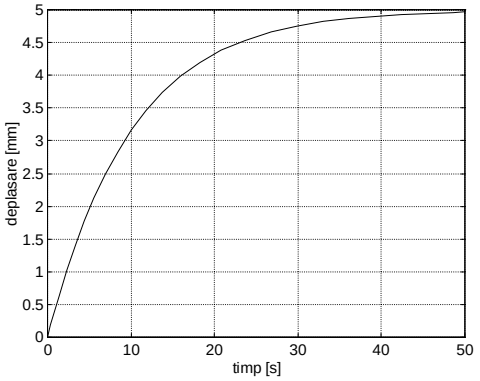


Fig. 2.3.2. Evoluția în timp a deplasării pentru regimul forțat al sistemului considerat în Exemplul 2.3.3

având reprezentarea grafică din fig. 2.3.2, corespunzătoare intervalului de timp [0, 50] secunde.

Pentru o eroare de 5%, durata regimului tranzitoriu este (conform (2.3.13)) $t_{s5\%} = 3T = 30$ secunde iar pentru o eroare de 2%, durata regimului tranzitoriu este (conform (2.3.14)) $t_{s2\%} = 4T = 40$ secunde ambele valori fiind confirmate de reprezentarea grafică din fig. 2.3.2. Totodată se constată că valoarea de regim staționar a deplasării punctului A este

$$y_s = K\overline{F} = 5\text{mm}.$$

Determinarea expresiei analitice a deplasării $x_f(t)$, permite şi exprimarea vitezei punctului A în funcție de timp:

$$v(t) = 0{,}5\, e^{-t/10} \text{mm/s}\,,$$

care are reprezentarea grafică din fig. 2.3.3, corespunzătoare intervalului de timp [0,50] secunde.

Cu notațiile introduse în Exemplul 2.3.1 se găseşte imediat exprimarea analitică a forței elastice corespunzătoare deformării resortului

$$F_r(t) = \gamma v(t) = 10e^{-t/10}\ \text{N}$$

şi respectiv a forței de frecare corespunzătoare amortizorului

$$F_a(t) = k_e x(t) = 10\left(1 - e^{-t/10}\right)\text{N}\,,$$

ambele fiind reprezentate grafic în fig. 2.3.4 pentru intervalul de timp [0,50] secunde. Graficul confirmă sugestiv următoarele detalii ale comportării sistemului mecanic (detalii care sunt presupuse ca familiare cititorului cu intuiție corectă a fenomenelor fizice):

- inițial întreaga forță de 10N este utilizată pentru a învinge frecarea din amortizor (resortul fiind nedeformat şi forța elastică fiind nulă),
- în regim staționar, întreaga forță de 10N este utilizată pentru a menține constantă alungirea resortului (punctul A fiind în repaus şi forța de frecare fiind nulă)
- pe întreaga durată a regimului tranzitoriu forța elastică este crescătoare în timp (resortul se alungeşte de la 0 la 5 mm), iar forța de frecare scade (viteza scade de la 0.5 mm/s la 0).

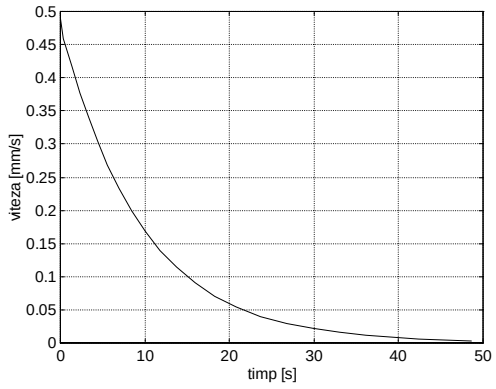


Fig. 2.3.3. Evoluția în timp a vitezei pentru regimul forțat al sistemului considerat în Exemplul 2.3.3

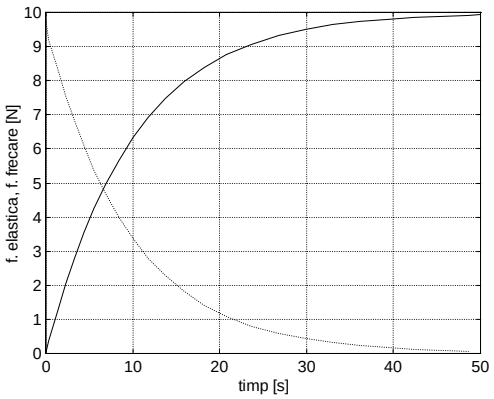


Fig. 2.3.4. Evoluția în timp a forței elastice (linie continuă) şi a forței de frecare (linie întreruptă) pentru regimul forțat al sistemului considerat în Exemplul 2.3.3

Exemplul 2.3.4.

Se consideră sistemul mecanic din exemplul 2.3.1 şi aceleaşi valori numerice pentru k_e şi $\overline{F}$ ca în Exemplul 2.3.3. Pentru coeficientul de frecare vâscoasă a amortizorului se consideră valoarea γ_1 = 10 Ns/mm.

Noua valoare γ_1 reprezintă exact jumătate din valoarea parametrului γ utilizată în Exemplul 2.3.3, fapt ce conduce la înjumătățirea constantei de timp a sistemului, adică:

$$T_1 = \frac{\gamma_1}{k_e} = \frac{10}{2} = 5\text{s}\,.$$

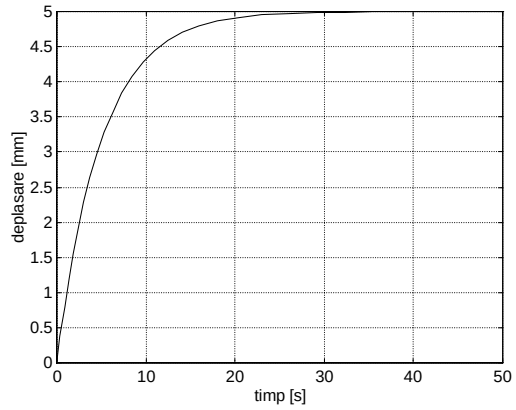


Fig. 2.3.5. Evoluția în timp a deplasării pentru regimul forțat al sistemului considerat în Exemplul 2.3.4

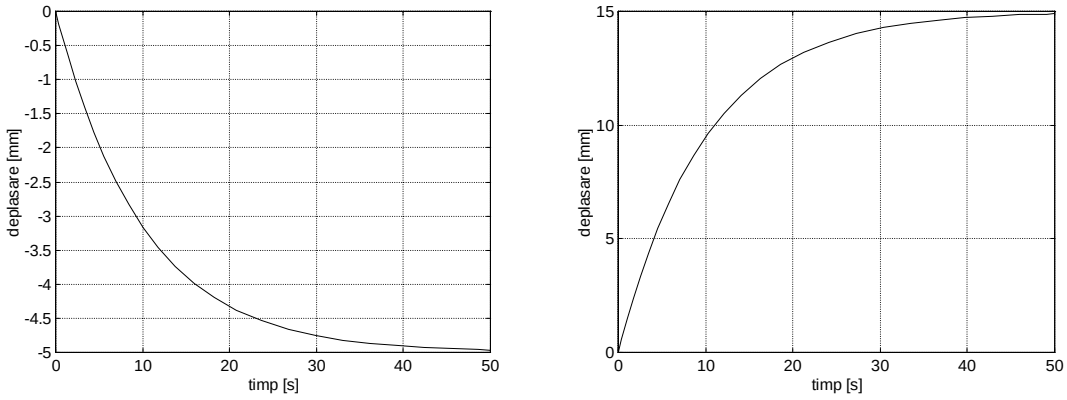
Drept consecință, durata regimului tranzitoriu (evaluată pentru o eroare de 5% sau 2%) se va reduce la jumătate din durata determinată în Exemplul 2.3.3, constatare vizibilă imediat şi din graficul $x(t)$ al deplasării punctului A, reprezentat în fig. 2.3.5 pentru intervalul de timp [0,50] secunde.

Tot din fig. 2.3.5 se observă ca valoarea de regim staționar pentru deplasarea punctului A rămâne aceeaşi ca în cazul Exemplului 2.3.3 (adică 5mm). Aceasta se datorează nemodificării valorii numerice pentru forța constantă $\overline{F} = 10\text{N}$ şi pentru factorul de amplificare al sistemului $K = 0.5\text{mm/N}$.

Exemplul 2.3.5.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1 şi aceleaşi valori numerice pentru parametrii k_e şi γ ca în Exemplul 2.3.3.

Dacă pentru forța constantă ce acționează din exterior se consideră valoarea $\overline{F}_1 = -10\text{N}$ adică forța egală şi de sens contrar cu cea din exemplul 2.3.3) efectul va consta în comprimarea resortului, deplasarea punctului A în regim staționar fiind de 5mm (adică egală cu cea din Exemplul 2.3.3, dar în sens contrar).



(a) **(b)**

Fig. 2.3.6. Evoluția în timp a deplasării pentru două regimuri forțate diferite ale sistemului din Exemplul 2.3.5: **(a)** mărimea de intrare este $\overline{F}_1 = -10\text{N}$; **(b)** mărimea de intrare este $\overline{F}_2 = 30\text{N}$

Dacă pentru forța constantă ce acționează din exterior se consideră valoarea $\overline{F}_2 = 30\text{N}$ (adică de acelaşi sens dar de trei ori mai mare ca în Exemplul 2.3.3), atunci, în regim staționar, deplasarea punctului A va fi de 15mm (adică în acelaşi sens şi de trei ori mai mare ca cea din Exemplul 2.3.3).

În ambele cazuri, durata regimului tranzitoriu rămâne aceeaşi ca în Exemplul 2.3.3, întrucât constanta de timp a rămas aceeaşi (parametrii k_e şi γ nefiind modificați).

Toate aceste constatări sunt vizibile şi pe graficul deplasării $x(t)$ reprezentat în fig. 2.3.6.

2.3.3.2. Răspunsul forţat la semnal sinusoidal

Se consideră semnalul de intrare:

$$u(t) = A\sin\omega t, \qquad A > 0, \omega > 0, t \in [0,\infty), \tag{2.3.19}$$

care, conform (2.3.5) cu $t_0 = 0$, va conduce (în urma calculelor pe care le lăsăm în seama cititorului drept exerciţiu) la semnalul de ieşire:

$$y_f(t) = AM(\omega)\sin\big(\omega t - \varphi(\omega)\big) + AR(\omega)e^{-\frac{a_0}{a_1}t}. \tag{2.3.20}$$

Notaţiile din (2.3.20) au semnificaţia următoare:

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2\omega^2}} \overset{\text{not(2.3.15),(2.3.17)}}{=} \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \tag{2.3.21}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_1}{a_0}\omega\right) \overset{\text{not(2.3.15),(2.3.17)}}{=} \operatorname{arctg}(T\omega), \tag{2.3.22}$$

$$R(\omega) = \frac{a_1\omega}{a_0^2 + a_1^2\omega^2} \overset{not(2.3.15),(2.3.17)}{=} \frac{KT\omega}{T^2\omega^2 + 1} \tag{2.3.23}$$

şi pun în evidenţă dependenţa lui $y_f(t)$ de:

- structura sistemului prin intermediul $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ sau, echivalent $T > 0$, $K > 0$;
- pulsaţia ω a semnalului de intrare (2.3.19).

Introducând notaţia

$$y_p(t) = AM(\omega)\sin\big(\omega t - \varphi(\omega)\big) \tag{2.3.24}$$

se constată că datorită condiţiei impuse asupra coeficienţilor $a_1 > 0$, $a_0 > 0$, se obţine comportarea asimptotică:

$$\lim_{t\to\infty}\big(y_f(t) - y_p(t)\big) = AR(\omega)\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{a_0}{a_1}t} = 0. \tag{2.3.25}$$

Egalitatea (2.3.25) arată că ieşirea evoluează către un *regim permanent* caracterizat prin *răspunsul în regim permanent sinusoidal* (2.3.24) care prezintă următoarele particularităţi:

- este un semnal sinusoidal de *aceeaşi pulsaţie* ω ca şi semnalul de intrare;
- are *amplitudinea* dependentă de ω (funcţie strict descrescătoare), prin intermediul coeficientului $M(\omega)$ (2.3.21);
- este defazat în urma semnalului de intrare (2.3.19) cu un unghi dependent de ω (funcţie strict crescătoare), precizat de $\varphi(\omega)$ (2.3.22).

Sub raport experimental, interesează, intuitiv vorbind cât de "repede" se realizează

"apropierea" lui $y_f(t)$ de răspunsul de regim permanent sinusoidal $y_p(t)$. Din relația (2.3.25) se constată că "modul de apropiere" are o descreştere exponențială de parametru $1/T = a_0/a_1$. Deci structura sistemului, prin intermediul constantei de timp T (2.3.15), dă informații privind durata *regimului tranzitoriu* necesar a fi traversat, înaintea instalării *regimului permanent*.

Drept criteriu de evaluare a "modului de apropiere" se poate utiliza evoluția în timp a raportului:

$$\varepsilon_p(t) = \frac{\left|y_f(t) - y_p(t)\right|}{\left|y_f(0) - y_p(0)\right|} = \frac{AR(\omega)e^{-\frac{a_0}{a_1}t}}{AR(\omega)} = e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \overset{\text{not (2.3.15)}}{=} e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (2.3.26)$$

Raportul $\varepsilon_p(t)$ din (2.3.26) are semnificația unei erori relative a ecartului curent $\left|y_f(t) - y_p(t)\right|$ față de ecartul inițial $\left|y_f(0) - y_p(0)\right| = AR(\omega)$. Cum $\varepsilon_p(t)$ este o funcție strict descrescătoare în raport cu t, putem face apel la *estimări pentru durata regimului tranzitoriu* care sunt perfect analoge estimărilor (2.3.13), respectiv (2.3.14), din cazul răspunsului la semnal treaptă. Astfel, pentru t luând valoarea:

$$t_p = 3\frac{a_1}{a_0} = 3T \qquad (2.3.27)$$

se obține $\varepsilon_p(t_p) = e^{-3} \cong 5\%$, iar pentru t luând valoarea:

$$t_p = 4\frac{a_1}{a_0} = 4T \qquad (2.3.28)$$

se obține $\varepsilon_p(t_p) = e^{-4} \cong 2\%$.

Cu alte cuvinte, din punctul de vedere al observației fizice se poate spune că regimul permanent se instalează după un timp finit t_p dat de (2.3.27) (respectiv (2.3.28)), cu o precizie de 5% (respectiv 2%) din ecartul inițial.

Exemplul 2.3.6.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1 şi aceleaşi valori numerice pentru parametrii k_e şi γ ca în Exemplul 2.3.3. Pentru deplasarea inițială nulă $x(0) = 0$, asupra punctului A se aplică o forță care variază în timp într-o manieră sinusoidală, conform legii

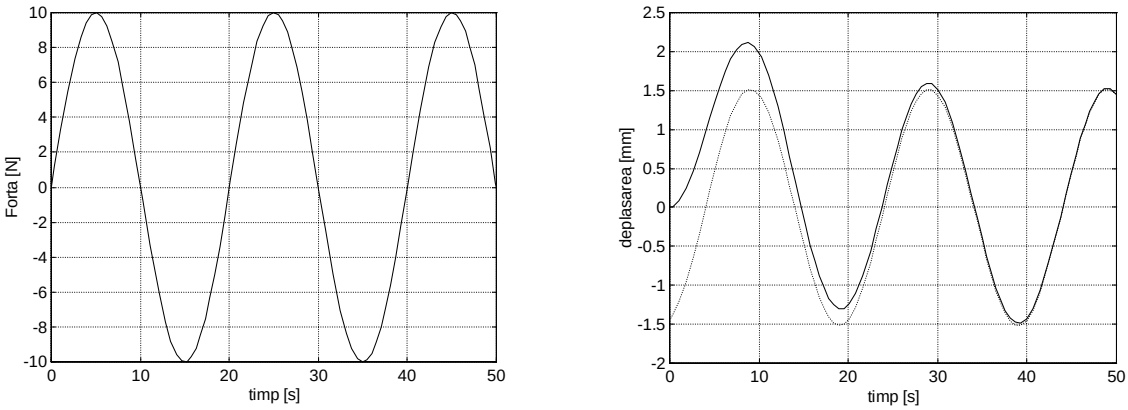
$$F(t) = 10\sin\frac{\pi}{10}t \text{ N}$$

care este reprezentată grafic în fig. 2.3.7(a).

Evoluția deplasării punctului A în funcție de timp este o expresie de forma (2.3.20)

$$x_f(t) = \frac{5}{\sqrt{\pi^2+1}}\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \text{arctg}\pi\right) + \frac{5}{\pi^2+1}e^{-t/10}$$

având reprezentarea grafică cu linie continuă din fig. 2.3.7(b), corespunzătoare intervalului de timp [0, 50] secunde.



(a) **(b)**

Fig. 2.3.7. Comportarea în regim forțat sinusoidal a sistemului considerat în Exemplul 2.3.6: **(a)** evoluția în timp a forței sinusoidale aplicate la intrare; **(b)** evoluția în timp a deplasării rezultată ca ieşire (linie continuă) şi componenta de regim permanent sinusoidal (linie întreruptă) către care tinde ieşirea după expirarea regimului tranzitoriu

Pe acelaşi grafic, cu linie întreruptă, este plotată şi componenta de regim permanent sinusoidal de forma (2.3.24)

$$x_p(t) = \frac{5}{\sqrt{\pi^2+1}}\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \text{arctg}\pi\right)$$

către care evoluează răspunsul forțat. Instalarea regimului permanent se realizează cu o eroare de 5%, conform (2.3.27), în

$$t_{p\,5\%} = 3T = 3\frac{\gamma}{k_e} = 30\text{secunde}$$

şi cu o eroare de 2%, conform (2.3.28), în

$$t_{p\,2\%} = 4T = 4\frac{\gamma}{k_e} = 40\text{secunde}\,.$$

Se constată că duratele regimului tranzitoriu (pentru eroare de 5% şi respectiv 2%) sunt aceleaşi ca şi în cazul răspunsului forțat la semnal treaptă din Exemplul 2.3.3., deoarece valorile parametrilor k_e şi γ fiind aceleaşi şi constanta de timp este aceeaşi ca în Exemplul 2.3.3.

Comparând semnalul de intrare $F(t)$ cu componenta permanentă a semnalului de ieşire $x_p(t)$ (sau, echivalent, cu $x_f(t)$, după instalarea regimului permanent sinusoidal) se verifică cu uşurință satisfacerea relațiilor (2.3.21) şi (2.3.22).

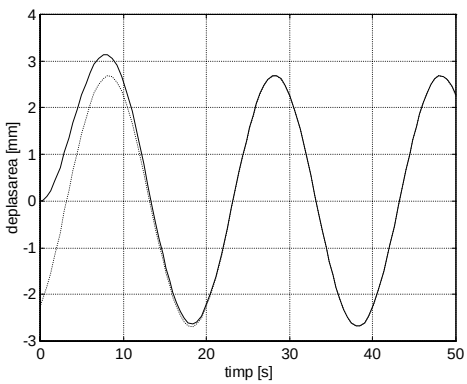


Fig. 2.3.8. Evoluția în timp a deplasării pentru regimul forțat sinusoidal al sistemului considerat în Exemplul 2.3.7

Exemplul 2.3.7.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1 cu aceeaşi valoare numerică pentru parametrul k_e şi aceeaşi expresie pentru

$F(t)$ ca în Exemplul 2.3.6. Pentru coeficientul de frecare vâscoasă a amortizorului se consideră

$$\gamma_1 = 10 \text{ NS/mm},$$

adică exact jumătate din valoarea utilizată în Exemplul 2.3.6. Drept consecinţă durata regimului tranzitoriu scade la jumătate, fapt evidenţiat şi de reprezentarea grafică din fig. 2.3.8 (cu linie continuă este reprezentată mărimea de ieşire $x_f(t)$, iar cu linie întreruptă este reprezentată componenta de regim permanent sinusoidal $x_p(t)$ către care tinde ieşirea după expirarea regimului tranzitoriu). Pentru această reprezentare grafică se constată şi efectul înjumătăţirii constantei de timp asupra elementelor ce caracterizează regimul permanent sinusoidal:

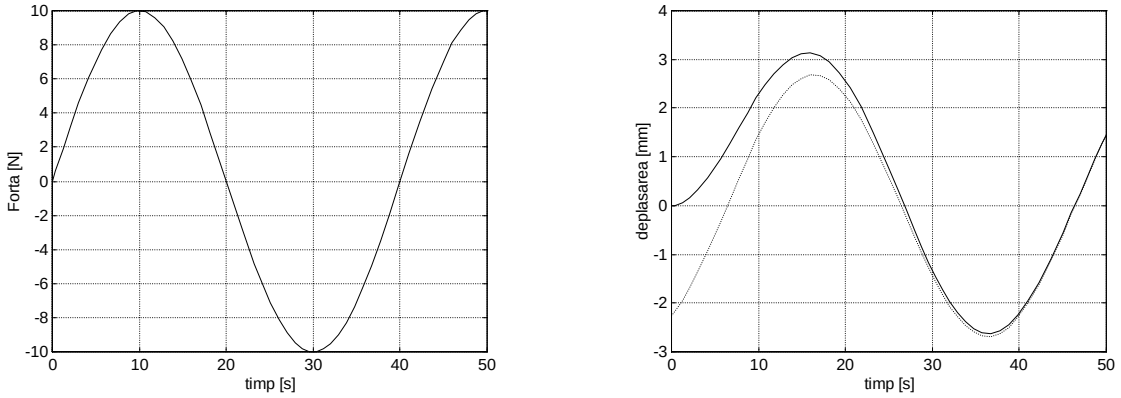
- raportul dintre amplitudinea semnalului de ieşire $x_f(t)$ după instalarea regimului permanent şi amplitudinea semnalului de intrare $F(t)$ este, conform (2.3.21) $0.5\Big/\sqrt{(\pi/4)^2+1}\,\text{mm/N},$ având o valoare mai mare decât în Exemplul 2.3.6;
- defazajul dintre semnalul de ieşire $x_f(t)$ după instalarea regimului permanent şi semnalul de intrare $F(t)$ este, conform (2.3.22), $\text{arctg}(\pi/2) \cong 1\text{rad} \cong 57^\circ$ având o valoare mai mică decât în Exemplul 2.3.6.

Exemplul 2.3.8.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1 cu aceeaşi valoare numerică pentru parametrii k_e şi γ ca în Exemplul 2.3.6., însă, pentru forţa ce acţionează din exterior, se consideră expresia:

$$F_1(t) = 10\sin\frac{\pi}{20}t \text{ N},$$

ceea ce înseamnă o înjumătăţire a valorii pulsaţiei, în raport cu exemplul 2.3.6.



(a) **(b)**

Fig. 2.3.9. Comportarea în regim forţat sinusoidal a sistemului considerat în Exemplul 2.3.8: **(a)** evoluţia în timp a forţei sinusoidale aplicate la intrare; **(b)** evoluţia în timp a deplasării rezultată ca ieşire (linie continuă) şi componenta de regim permanent sinusoidal (linie întreruptă) către care tinde ieşirea după expirarea regimului tranzitoriu

În fig. 2.3.9(a) se reprezintă grafic evoluția lui $F_1(t)$. În fig. 2.3.9(b), este plotată, cu linie continuă, evoluția punctului A în regim forțat, iar cu linie întreruptă, componenta de regim permanent.

Se constată că regimul tranzitoriu (evaluat pentru o eroare de 5% sau 2%) are aceeaşi durată ca în Exemplul 2.3.6, întrucât constanta de timp este aceeaşi.

În schimb înjumătățirea valorii pulsației semnalului de intrare $F(t)$ are următoarele efecte asupra elementelor caracteristice regimului permanent sinusoidal:

- raportul dintre amplitudinea semnalului de ieşire $x_f(t)$ după instalarea regimului permanent şi amplitudinea semnalului de intrare $F(t)$ este, conform (2.3.21) $1\Big/\left(2\sqrt{(\pi/4)^2+1}\right)$mm/N, având o valoare mai mare decât în Exemplul 2.3.6;
- defazajul dintre semnalul de ieşire $x_f(t)$ după instalarea regimului permanent şi semnalul de intrare $F(t)$ este, conform (2.3.22) $\operatorname{arctg}(\pi/2)\cong 1\text{rad}\cong 57^\circ$ având o valoare mai mică decât în Exemplul 2.3.6. ▬┤

2.3.3.3. Comentarii asupra unor aspecte comportamentale ale sistemelor puse în evidenţă de răspunsul forţat

Din analiza efectuată în subparagrafele anterioare 2.3.3.1 şi 2.3.3.2 se constată că după traversarea *regimului tranzitoriu*, în răspunsul de regim forțat se regăsesc *caracteristice esențiale* ale semnalului de intrare, şi anume:

- semnal constant y_s (2.3.10), în cazul intrării treaptă (2.3.8)
- semnal sinusoidal $y_p(t)$ (2.3.24), în cazul intrării sinusoidale (2.3.19), ambele posedând aceeaşi pulsație ω.

Din aceste motive se mai spune că în regim forțat, după expirarea regimului tranzitoriu, ieşirea "copie" forma semnalului de intrare. Această afirmație nu vizează numai semnalele de intrare treaptă sau sinusoidale, ea păstrându-şi valabilitatea pentru o clasă mai largă de semnale de intrare. De asemenea, mai precizăm că afirmația de mai sus este probată şi de modele liniare descrise prin ecuații diferențiale de ordin superior.

Durata regimului tranzitoriu este dependentă de *structura sistemului* conform (2.3.13), (2.3.14) sau (2.3.27), (2.3.28) şi constituie o *măsură a inerției* pe care o manifestă sistemul la părăsirea condiției inițiale nule $y(0) = 0$.

Încheiem comentariile din acest paragraf, subliniind faptul că termenul de "regim permanent" acoperă semantic şi cazul regimului staționar, în sensul unui echivalent ca exprimare de tipul "regim permanent constant" (spre deosebire, de exemplu, de "regim permanent sinusoidal"). Mai mult, din punct de vedere al formalizării matematice, se constată că atât $y_f(t)$ dat de (2.3.9) (pentru intrare treaptă), cât şi $y_f(t)$ dat de (2.3.20) (pentru intrare sinusoidală) pot fi scrise sub forma:

$$y_f(t) = y_p(t) + y_t(t), \tag{2.3.29}$$

cu următoarea semnificație a notațiilor:

- $y_p(t)$ notează *componenta permanentă* a răspunsului forțat $y_f(t)$, având expresia concretă $y_p(t) = y_s$ = constant (2.3.10) şi respectiv $y_p(t)$ din (2.3.24);

- $y_t(t)$ notează *componenta tranzitorie* a răspunsului forțat (cu semnificația evidentă, conform (2.3.29), că $|y_t(t)| = |y_f(t) - y_p(t)|$ reprezintă ecartul curent) având proprietatea

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0\,, \tag{2.3.30}$$

care asigură comportarea asimptotică a regimului forțat, *indiferent de tipul semnalului de intrare* (treaptă sau sinusoidal).

Inspectând modul în care s-a abordat anterior problema duratei regimului tranzitoriu, se observă că dependența acestei durate de constanta de timp T (2.3.15) (adică de structura sistemului) se datorează modului exponențial în care "se stinge" componenta tranzitorie $y_t(t)$. Astfel se justifică în *mod unitar* valorile obținute pentru t_s şi t_p ca estimări ale timpului necesar instalării regimului permanent, *indiferent de tipul semnalului de intrare*.

Aceste estimări sunt legate de evoluția în timp a unei erori relative, exprimabilă unitar prin:

$$\varepsilon(t) = \frac{|y_f(t) - y_p(t)|}{|y_f(0) - y_p(0)|} = \frac{|y_t(t)|}{|y_t(0)|} = e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \overset{not\,(2.3.15)}{=} e^{-\frac{t}{T}}, \tag{2.3.31}$$

din care se poate obține atât $\varepsilon_s(t)$ (2.3.12), cât şi $\varepsilon_p(t)$ (2.3.26).

2.3.4. Dinamica de regim liber

Dinamica de regim liber corespunde modelului (2.3.6), care derivă din modelul complet (2.3.1) pentru cazul particular al mărimii de intrare identic nule, adică $u(t) \equiv 0$.

Pentru simplificarea scrierii, vom considera drept moment inițial $t_0 = 0$, dar aspectele ce urmează a fi discutate îşi păstrează valabilitatea pentru orice valoare t_0.

Evoluția mărimii de ieşire $y(t)$ este dată de relația (2.3.4) cu $t_0 = 0$, conducând la

$$y_l(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1}t} y(0) \overset{not\,(2.3.15)}{=} e^{-\frac{t}{T}} y(0). \tag{2.3.32}$$

Relația (2.3.32) pune imediat în evidență comportarea asimptotică:

$$\lim_{t\to\infty} y_l(t) = 0, \tag{2.3.33}$$

pentru orice $y(0) \in \mathbf{R}$. Se spune că $y = 0$ reprezintă un *punct de echilibru asimptotic stabil* pentru sistemul considerat, în sensul că evoluția liberă a sistemului din orice condiție inițială $y(0) \neq 0$ se apropie asimptotic de punctul de echilibru. Subliniem faptul că această comportare este valabilă numai pentru restricția $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ impusă coeficienților ecuației diferențiale (2.3.1), constatare ce rezultă imediat din exprimarea lui $y_l(t)$ din (2.3.32). (Pentru detalii referitoare la stabilitate, se va parcurge secțiunea 2.9 din capitolul curent).

Drept criteriu pentru a evalua "modul de apropiere" a lui $y_l(t)$ de 0 se poate utiliza raportul

$$\varepsilon_l(t) = \frac{|y_l(t)|}{|y_l(0)|} = e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \overset{not\,(2.3.15)}{=} e^{-\frac{t}{T}}, \tag{2.3.34}$$

care are semnificația unei erori relative a ecartului curent $|y_l(t)|$ față de ecartul inițial $|y(0)| = |y_l(0)|$.

Cum $\varepsilon_l(t)$ este o funcție descrescătoare de t, putem utiliza praguri de eroare perfect analoge estimărilor (2.3.13), respectiv (2.3.14). Astfel pentru t luând valoarea:

$$t_l = 3a_1/a_0 = 3T, \tag{2.3.35}$$

se obține $\varepsilon_l(t_l) = e^{-3} \cong 5\%$, iar pentru t luând valoarea:

$$t_l = 4a_1/a_0 = 4T, \tag{2.3.36}$$

se obține $\varepsilon_l(t_l) = e^{-4} \cong 2\%$.

Cu alte cuvinte, din punct de vedere al observației fizice se poate spune că răspunsul liber "se stinge" după un timp finit t_l dat de (2.3.35) (respectiv (2.3.36)), cu o precizie de 5% (respectiv 2%) din modulul condiției inițiale.

Exemplul 2.3.9.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1 în care parametrii au valorile $k_e = 2$ N/mm şi $\gamma = 20$ Ns/mm. Dacă punctul A posedă o deplasare inițială $x(0) = 2$ mm, revenirea lui la valoarea 0, în absența oricărei forțe externe, este descrisă, conform (2.3.32), de formula:

$$x_l(t) = 2e^{-t/T} \text{ mm}.$$

Pentru o eroare relativă de 5%, regimul liber poate fi considerat încheiat , conform (2.3.35), după

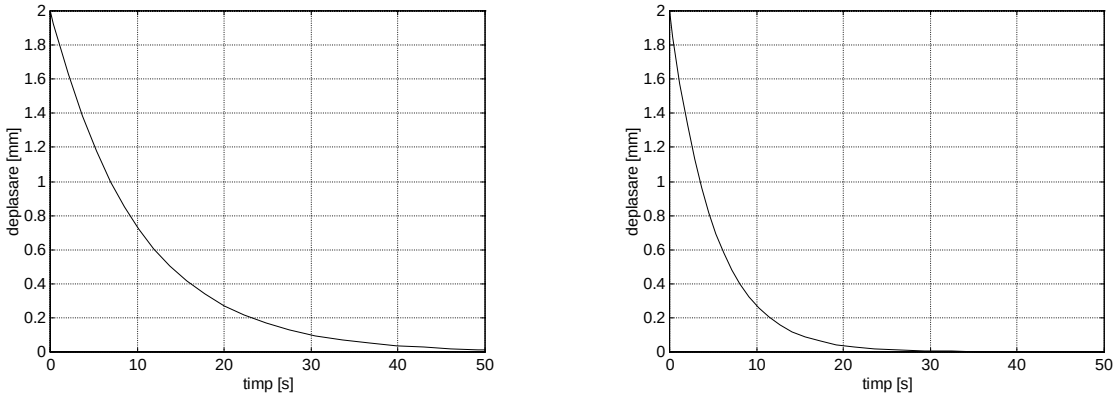
$$t_{l5\%} = 3T = 30 \text{ secunde}.$$

Pentru o eroare relativă de 2%, regimul liber poate fi considerat încheiat, conform (2.3.36), după

$$t_{l2\%} = 4T = 40 \text{ secunde}.$$

Dacă se consideră pentru constanta elastică a resortului o valoare dublă, atunci, conform (2.3.15), constanta de timp T se va înjumătăți, iar durata regimului liber (evaluata pentru o eroare relativă de 5% sau 2%) se va reduce la jumătate.

În fig. 2.3.10 este reprezentat răspunsul liber al sistemului mecanic pentru cele două situații discutate mai sus.



(a) **(b)**

Fig. 2.3.10. Evoluția în timp a deplasării pentru regimul liber al sistemului considerat în Exemplul 2.3.9, cu două valori diferite pentru constanta de elasticitate: **(a)** k_e=2; **(b)** k_e=1.

2.3.5. Răspunsul complet pentru semnale de intrare standard

Vom considera ca şi în paragraful 2.3.3. situația semnalelor de intrare treaptă şi sinusoidale. De asemenea vom apela la simplificarea scrierii rezultată din alegerea momentului inițial $t_0 = 0$. Ca mod de tratare însă, vom face uz de punctul de vedere unificator dezvoltat la finele subparagrafului 2.3.3.3, şi anume de exprimarea răspunsului forțat sub forma (2.3.29). Cu aceasta, în baza relației (2.3.3), putem scrie pentru răspunsul complet expresia:

$$y(t) = y_l(t) + y_t(t) + y_p(t), \tag{2.3.37}$$

indiferent de tipul semnalului de intrare. Constatăm imediat că suma de semnale $y_l(t)+y_t(t)$ posedă proprietatea:

$$\lim_{t\to\infty}\left(y_l(t) + y_t(t)\right) = 0, \tag{2.3.38}$$

care asigură comportarea de tip asimptotic a răspunsului complet:

$$\lim_{t\to\infty}\left(y(t) - y_p(t)\right) = 0. \tag{2.3.39}$$

Mai mult, din analiza efectuată în paragrafele anterioare, se constată că anularea sau "stingerea" sumei de semnale $y_l(t) + y_t(t)$ are loc într-o manieră exponențială caracterizată prin eroarea relativă:

$$\varepsilon(t) = \frac{\left|y(t) - y_p(t)\right|}{\left|y(0) - y_p(0)\right|} = \frac{\left|y_l(t) + y_t(t)\right|}{\left|y_l(0) + y_t(0)\right|} = e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \overset{\text{not (2.3.15)}}{=} e^{-\frac{t}{T}}. \tag{2.3.40}$$

Cu alte cuvinte, se poate afirma şi în cazul răspunsului complet, că, din punct de vedere practic, *regimul permanent* se instalează după un *interval finit de timp*, dependent de structura sistemului, prin intermediul constantei de timp T (2.3.15), astfel:

- după $3T$, dacă se consideră o eroare de 5% din *ecartul inițial* $\left|y_l(0) + y_t(0)\right|$;
- după $4T$, dacă se consideră o eroare de 2% din *ecartul inițial* $\left|y_l(0) + y_t(0)\right|$.

În scopul evitării oricărei confuzii, precizăm că ecarturile ce intervin în (2.3.40) se explicitează diferit în cazul semnalelor treaptă şi sinusoidale, după cum urmează:

- pentru semnal treaptă

$$\left|y_l(t) + y_t(t)\right| = \left|y_l(t) - e^{-a_0 t/a_1}\, y_s\right|, \tag{2.3.41}$$

cu y_s definit în (2.3.10);

- pentru semnal sinusoidal

$$\left|y_l(t) + y_t(t)\right| = \left|y_l(t) + e^{-a_0 t/a_1}\, AR(\omega)\right|, \tag{2.3.42}$$

cu $R(\omega)$ definit în (2.3.23).

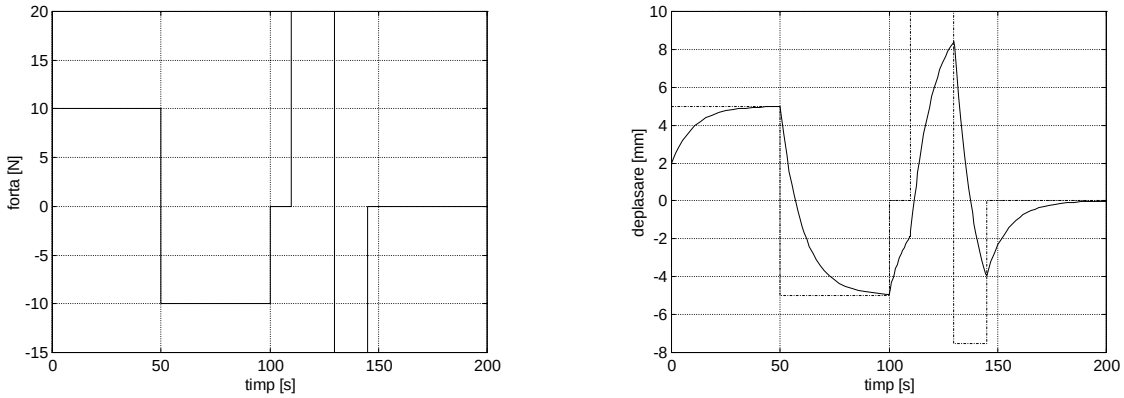
Exemplu 2.3.10.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1, având valorile parametrilor valorile $k_e = 2$ N/mm şi $\gamma = 20$ Ns/mm. Poziția inițială a punctului A este $x(0) = 2$ mm. Asupra sistemului mecanic se aplică o forță externă $F(t)$ de forma

$$F(t) = \begin{cases} 10\,\text{N}; & t \in [0, 50)\ \text{s}, \\ -10\,\text{N}; & t \in [50, 100)\ \text{s}, \\ 0; & t \in [100, 110)\ \text{s}, \\ 20\,\text{N}; & t \in [100, 130)\ \text{s}, \\ -15\,\text{N}; & t \in [130, 145)\ \text{s}, \\ 0; & t \in [145, \infty)\ \text{s}. \end{cases}$$

În fig. 2.3.11 (a) este plotată evoluția în timp a forței $F(t)$ (pentru intervalul de timp [0, 200] s), iar în fig. 2.3.11(b) se dă reprezentarea grafică a modului în care se modifică poziția punctului A (adică răspunsul complet al sistemului pentru semnalul de intrare $F(t)$ considerat).

Considerăm că, până în acest punct, cititorul a acumulat suficientă experiență pentru a interpreta singur detaliile evoluției deplasării $x(t)$. De asemenea, cititorul este invitat ca, pentru aprofundare să schițeze grafic evoluția în timp a vitezei $v(t)$ a punctului A, pornind de la reprezentarea lui $x(t)$ din fig. 2.3.11(b).



(a) **(b)**

Fig. 2.3.11. Răspunsul complet al sistemului considerat în Exemplul 2.3.10. **(a)** evoluția în timp a forței aplicate la intrare; **(b)** evoluția în timp a deplasării rezultată ca ieşire (linie continuă) şi componenta de regim staționar (linie întreruptă) către care tinde ieşirea după expirarea regimurilor libere şi a regimurilor tranzitorii cauzate de fiecare schimbare a valorii constante din funcția scară prezentată la intrare.

2.3.6. Tratarea operaţională cu ajutorul transformării Laplace

2.3.6.1. Răspunsul complet în tratarea operaţională

Rezolvarea ecuației (2.3.1) poate fi abordată şi prin intermediul calculului operațional, cu ajutorul transformatei Laplace (pentru detalii, vezi Anexa I). Considerând momentul inițial $t_0 = 0$ şi aplicând transformarea Laplace ecuației (2.3.1) cu notațiile $Y(s) = \mathsf{L}\{y(t)\}$, $U(s) = \mathsf{L}\{u(t)\}$ obținem:

$$a_1\big(sY(s) - y(0)\big) + a_0 Y(s) = U(s). \tag{2.3.43}$$

Ecuația de mai sus este de *tip algebric* şi permite exprimarea algebrică a lui $Y(s)$ în funcție de $y(0)$ şi $U(s)$ sub forma:

$$Y(s) = \frac{a_1}{a_1 s + a_0} y(0) + \frac{1}{a_1 s + a_0} U(s), \tag{2.3.44-a}$$

sau, echivalent, în baza notațiilor (2.3.15), (2.3.17):

$$Y(s) = \frac{T}{Ts+1} y(0) + \frac{K}{Ts+1} U(s). \tag{2.3.44-b}$$

Se observă cu uşurință faptul că *prima componentă* din exprimările echivalente (2.3.44-a), (2.3.44-b) are drept original *răspunsul liber* (2.3.4) cu $t_0 = 0$, adică

$$Y_l(s) = \frac{a_1}{a_1 s + a_0} y(0) = \mathsf{L}\left\{e^{-a_0 t/a_1}\ y(0)\right\}, \tag{2.3.45-a}$$

sau, în notațiile (2.3.15), (2.3.17):

$$Y_l(s) = \frac{T}{Ts+1} y(0) = \mathsf{L}\left\{e^{-t/T} y(0)\right\}. \tag{2.3.45-b}$$

În mod similar, observăm că *a doua componentă* din exprimările echivalente (2.3.44-a), (2.3.44-b) are drept original *răspunsul forțat* (2.3.5) cu $t_0 = 0$, adică:

$$Y_f(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0} U(s) = \mathsf{L}\left\{\int_0^t e^{-a_0 (t-\tau)/a_1}\ \frac{1}{a_1} u(\tau) d\tau\right\}, \tag{2.3.46-a}$$

sau, în notațiile (2.3.15), (2.3.17):

$$Y_f(s) = \frac{K}{Ts+1} U(s) = \mathsf{L}\left\{\int_0^t e^{-(t-\tau)/T} K u(\tau) d\tau\right\}. \tag{2.3.46-b}$$

În baza acestor constatări, putem conchide că descompunerea (2.3.3) pusă în evidență pentru soluția $y(t)$ a ecuației diferențiale (2.3.1) se păstrează şi în exprimarea operațională cu ajutorul transformatei Laplace, adică:

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s). \tag{2.3.47}$$

Abordarea operațională este echivalentă cu tratarea în domeniul timp şi, din punct de vedere al aplicațiilor tehnico-inginereşti, prezintă următoarele două avantaje care motivează utilizarea ei frecventă:

(i) Scrierea (2.3.44) este foarte sugestivă pentru a pune în evidență modul cum răspunsul complet depinde de:

- structura sistemului, descrisă prin funcțiile raționale:

$$\frac{a_1}{a_1 s + a_0} = \frac{T}{Ts+1}, \tag{2.3.48}$$

$$\frac{1}{a_1 s + a_0} = \frac{K}{Ts+1}; \tag{2.3.49}$$

- condiția inițială $y(0)$;
- semnalul (mărimea de intrare) $U(s)$.

(ii) În cazul unei mărimi de intrare a cărei dependență de timp este descrisă analitic printr-o funcție $u(t)$ mai complicată, calculul lui $y(t)$ este foarte comod folosind tabelele de transformate Laplace, conform algoritmului:

$$u(t) \xrightarrow{\mathsf{L}} U(s) \xrightarrow{(2.3.44)} Y(s) \xrightarrow{\mathsf{L}^{-1}} y(t).$$

Exemplul 2.3.11.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1., având valorile parametrilor $k_e = 2$ N/mm şi $\gamma = 20$ Ns/mm. Pentru deplasare inițială $x(0) = 2$ mm, asupra punctului A se aplică o forță ce variază în timp într-o manieră sinusoidală, conform legii

$$F(t) = 10\sin(\pi/10)t \text{ N},$$

care este reprezentată grafic în fig. 2.3.12(a).

Aplicând transformarea Laplace ecuației diferențiale (vezi Exemplul 2.3.1).

$$20\dot{x}(t) + 2x(t) = F(t), \quad x(0) = 2,$$

şi utilizând $\mathsf{L}\{10\sin(\pi/10)t\} = \pi/\left(s^2 + (\pi/10)^2\right)$, obținem:

$$20sX(s) - 20x(0) + 2X(s) = \frac{\pi}{s^2 + (\pi/10)^2},$$

care conduce la:

$$X(s) = 2\frac{20}{20s+2} + \frac{1}{20s+2}\frac{\pi}{s^2 + (\pi/10)^2}.$$

Această ultimă expresie poate fi scrisă astfel încât să pună în evidență numai funcții imagine disponibile în orice tabel de transformate Laplace:

$$X(s) = 2\frac{1}{s+\frac{1}{10}} + \frac{5\pi}{\pi^2+1}\frac{1}{s+\frac{1}{10}} + \frac{5}{\sqrt{\pi^2+1}}\left(\frac{\pi/10}{s^2+(\pi/10)^2}\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} - \frac{s}{s^2+(\pi/10)^2}\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}\right).$$

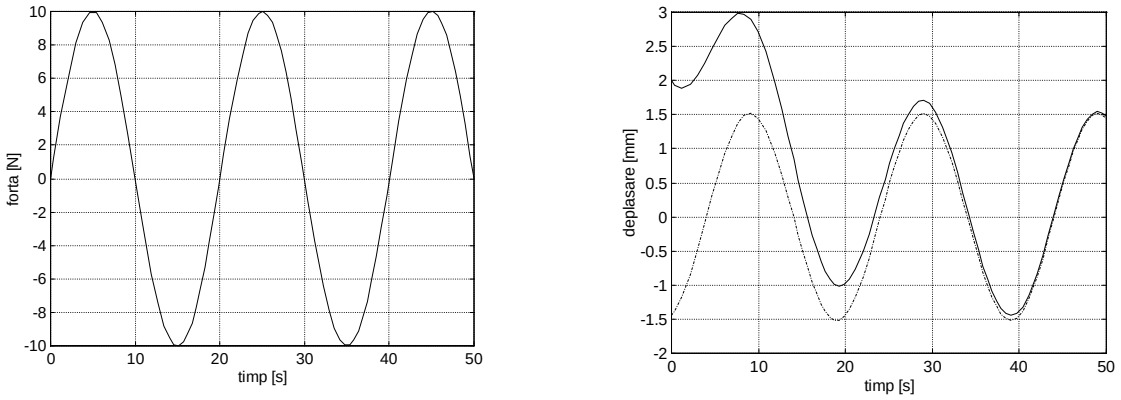
Prin utilizarea transformării Laplace inverse, se obține

$$x(t) = 2e^{-t/10} + \frac{5\pi}{\pi^2+1}e^{-t/10} + \frac{5}{\sqrt{\pi^2+1}}\left(\sin\frac{\pi}{10}t\cos(\text{arctg}\,\pi) - \cos\frac{\pi}{10}t\sin(\text{arctg}\,\pi)\right),$$

sau, echivalent:

$$x(t) = 2e^{-t/10} + \frac{5\pi}{\pi^2+1}e^{-t/10} + \frac{5}{\sqrt{\pi^2+1}}\sin\left(\frac{\pi t}{10} - \text{arctg}\,\pi\right),$$

în care primul termen este componenta de regim liber, al doilea termen este componenta de regim tranzitoriu şi al treilea termen este componenta de regim permanent (a se compara cu Exemplul 3.2.6)



(a) **(b)**

Fig. 2.3.12. Răspunsul complet al sistemului considerat în Exemplul 2.3.11: **(a)** evoluția în timp a forței sinusoidale aplicate la intrare; **(b)** evoluția în timp a deplasării rezultate ca ieşire (linie continuă) şi componenta de regim permanent sinusoidal (linie întreruptă) către care tinde ieşirea după expirarea regimului liber şi a regimului tranzitoriu.

Dependența de timp a deplasării punctului A, $x(t)$, este reprezentată grafic în fig. 2.3.12(b), corespunzător intervalului de timp [0,50] secunde. Pe acelaşi grafic, cu linie întreruptă este plotată şi componenta de regim permanent sinusoidal (al treilea termen). ▬

2.3.6.2. Răspunsul forţat în tratarea operaţională. Modelul de tip funcţie de transfer

În studierea sistemelor fizico-tehnice, ipoteza condițiilor inițiale nule este frecvent satisfăcută în practică, deoarece evoluția sistemelor porneşte de regulă din repaos. Astfel, considerând momentul inițial $t_0 = 0$, dinamica de regim forțat este modelată în exprimare operațională prin (2.3.46), care arată că $Y_f(s) = \mathcal{L}\{y_f(t)\}$ este legată de $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ prin intermediul funcției raționale din (2.3.49). Notând funcția rațională din (2.3.49) drept $G(s)$, adică:

$$G(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0} = \frac{K}{Ts+1}, \qquad (2.3.50)$$

constatăm că $G(s)$ joacă rolul unui *model de regim forţat* al sistemului, echivalent cu ecuaţia diferenţială (2.3.7), denumit *funcţie de transfer*. Denumirea se justifică prin aceea ca funcţia $G(s)$ permite descrierea transferului cauzal intrare-ieşire sub forma:

$$Y_f(s) = G(s)U(s). \tag{2.3.51}$$

Exemplul 2.3.12.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1, având valorile numerice ale parametrilor k_e şi γ ca în Exemplul 2.3.11. Pentru deplasare iniţială $x_f(0) = 0$, aplicând transformarea Laplace ecuaţiei diferenţiale:

$$20\dot{x}_f(t) + 2x_f(t) = F(t), \quad x_f(0) = 0,$$

rezultă scrierea:

$$\mathcal{L}\{x_f(t)\} = \frac{1}{20s+2}\mathcal{L}\{F(t)\},$$

unde:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{x_f(t)\}}{\mathcal{L}\{F(t)\}} = \frac{1}{20s+2}$$

este funcţia de transfer asociată sistemului mecanic.

Comparând cu $X(s)$ din Exemplul 2.3.11 pentru aceeaşi forţă $F(t)$, se constată că vom obţine:

$$X_f(s) = \mathcal{L}\{x_f(t)\} = \frac{1}{20s+2}\frac{\pi}{s^2+(\pi/10)^2},$$

care nu mai conţine termenul corespunzător componentei libere. Aplicând transformarea Laplace inversă, rezultă

$$x_f(t) = \frac{5\pi}{\pi^2+1}e^{-t/10} + \frac{5}{\sqrt{\pi^2+1}}\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \operatorname{arctg}\pi\right),$$

care (cum era de aşteptat) coincide cu expresia determinată în Exemplul 2.3.6.

2.4. Modele liniare de tip reprezentare intrare-stare-ieşire

Reprezentările liniare intrare – stare – ieşire oferă un cadru teoretic general pentru construirea modelelor prin aplicarea legilor fizice care descriu funcţionarea proceselor. După cum reiese şi din denumire, o descriere matematică de acest gen operează cu trei tipuri de variabile, şi anume: de intrare, de stare şi de ieşire.

Modelele astfel obținute permit analiza detaliată a dinamicii proceselor, ca rezultat (efect) atât al condițiilor inițiale, cât şi al semnalelor de intrare. Sub acțiunea anumitor clase de semnale (uşor realizabile din punct de vedere tehnic), procesele fizice evidențiază instalarea regimurilor permanente, când variabilele de stare şi de ieşire reproduc trăsăturile fundamentale ale variabilei de intrare. Manifestările inerțiale, inerente operării sistemului fizic, fac ca instalarea regimului permanent să nu se producă instantaneu, ci după un anumit interval de timp dependent, ca durată, de valorile parametrilor fizici ce caracterizează elementele componente ale sistemului. Problematica abordată în această secțiune generalizează elementele analizei efectuate in secțiunea precedentă asupra modelelor de tip ecuație diferențială liniară de ordinul I cu coeficienți constanți. Utilizarea unui număr relativ mare de exemple urmăreşte dezvoltarea suportului intuitiv menit să faciliteze asimilarea aspectelor teoretice.

2.4.1. Tranziţia cauzală intrare-stare-ieşire

2.4.1.1. Modele intrare-stare-ieşire de ordinul doi

Definirea unui model de acest tip se bazează pe un sistem de două ecuații diferențiale, liniare, de ordinul I, de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t), \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

sau, în scriere echivalentă:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \tag{2.4.1'}$$

unde $u(t)$ notează *variabila* (*semnalul*) *de intrare* $u(t)$, iar $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ notează *variabilele* (*semnalele*) *de stare* ale sistemului. Valorile $x_1(0) = x_{10}$ şi $x_2(0) = x_{20}$ reprezintă condiții inițiale impuse sistemului de ecuații diferențiale.

Variabila (*semnalul*) *de ieşire* este definită drept o combinație liniară a variabilelor de stare şi intrare:

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + du(t), \tag{2.4.2}$$

sau, în scriere echivalentă:

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + du(t). \tag{2.4.2'}$$

Este evident că în particular, putem avea $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d = 0$ sau $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $d = 0$ cazuri în care variabila de ieşire coincide cu una din variabilele de stare.

În general, un model de forma (2.4.1), (2.4.2) descrie comportarea unui sistem fizic alcătuit din :

(i) două elemente care *acumulează* energie cărora li se asociază variabilele de stare $x_1(t)$ respectiv $x_2(t)$, adecvat alese spre a caracteriza funcționarea în *cauzalitate integrală* a acestor elemente. (Totodată această alegere asigură continuitatea în raport cu variabila temporală t şi precizarea condițiilor inițiale);

(ii) unul sau mai multe elemente care disipă energie.

Legile fizicii care descriu interconectarea elementelor (i) şi (ii) conduc la sistemul de ecuații diferențiale (2.4.1).

Variabilele de stare $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ au semnificația de *mărimi efect* în raport cu mărimea cauză $u(t)$. Din punctul de vedere al observării fizice directe (măsurare, înregistrare etc) pot exista situații, când să nu ne intereseze, *ca efect*, variabilele de stare $x_1(t)$ sau $x_2(t)$, ci mărimi *exprimabile din variabilele de stare* cu ajutorul unor *relații statice* (sau *instantanee*) de forma (2.4.2). Acest aspect practic justifică introducerea conceptelor diferențiate de *variabilă de stare*, respectiv *variabilă de ieşire*.

2.4.1.2. Modele intrare-stare-ieşire de ordinul *n*

În cazul sistemelor fizice care conțin n elemente acumulatoare de energie, conectate în cauzalitate integrală, modelul (2.4.1), (2.4.2) se generalizează sub forma următoarei scrieri *vectorial – matriceale*:

- ecuația de stare (sau *ecuația stării*)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \tag{2.4.3}$$

- ecuația de ieşire (sau *ecuația ieşirii*):

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t). \tag{2.4.4}$$

În modelul intrare – stare – ieşire (2.4.3), (2.4.4), semnificația notațiilor este următoarea:

- Funcția vectorială

$$\mathbf{x}(t) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n \tag{2.4.5}$$

colectează cele n variabile de stare şi poartă denumirea de *vector de stare*, sau vectorul *variabilelor de stare*.

- Vectorul coloană

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \cdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \tag{2.4.6}$$

colectează valorile inițiale ale variabilelor de stare şi poartă denumirea de *vector al condițiilor inițiale.*

- Matricea **A** este pătrată, de ordinul n, adică:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}. \tag{2.4.7}$$

- Vectorul **b** este coloană de dimensiune n, adică:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 1}. \tag{2.4.8}$$

- Vectorul $\mathbf{c}^T$ este linie de dimensiune n, adică:

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{1\times n}. \tag{2.4.9}$$

- Constanta $d \in \mathbf{R}$ poate fi nulă, caz în care termenul $du(t)$ va dispărea complet din ecuația ieşirii (2.4.4).
- Funcțiile $u(t)$, $y(t)$:$\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ au semnificația *semnalelor de intrare*, respectiv *ieşire*.

Pentru variabila de intrare $u(t)$ se impune condiția (firească pentru practică) de a fi *continuă pe porțiuni*, cu discontinuități de speța întâia. Această condiție reprezintă o *relaxare* a condiției ca $u(t)$ să fie continuă pe $\mathbf{R}_+$, care (conform teoriei matematice a sistemelor de ecuații diferențiale) asigură existența şi unicitatea soluției pe $\mathbf{R}_+$ pentru sistemul de ecuații diferențiale (2.4.3). Relaxarea operează în baza *continuității* (de natură fizică) a semnalelor $x(t)$, astfel că, în fiecare punct de discontinuitate t^* a lui $u(t)$, condiția finală (la stânga) $x(t^* - 0)$ poate fi privită drept o nouă condiție inițială $x(t^*) = x(t^* - 0)$ pentru următorul interval de continuitate a variabilei de intrare $u(t)$.

Exemplul 2.4.1.

Se consideră un circuit electric alcătuit dintr-un rezistor (cu rezistență R_e), o bobină (cu inductanța L) şi un condensator (cu capacitatea C_e) conectate în serie, conform fig. 2.4.1, cu o sursă de tensiune $e(t)$ (care se modifică în timp, după o lege precizată). Tensiunea $e(t)$ furnizată de sursă constituie mărimea de intrare.

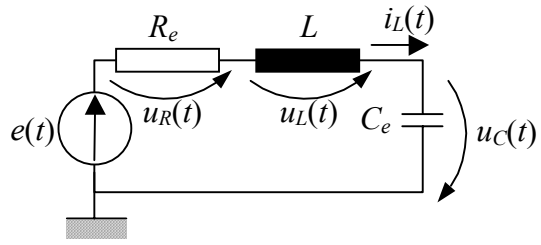


Fig. 2.4.1. Circuitul electric utilizat în exemplul 2.4.1.

Alegem drept variabile de stare tensiunea pe condensator $u_c(t)$ şi curentul prin bobină $i_L(t)$, cu scopul de a exploata exprimarea de tip integral a legilor ce descriu funcționarea condensatorului şi a bobinei ca acumulatori de energie:

$$C_e \frac{du_c}{dt} = i_C(t), \qquad u_C(0) = u_{C_0},$$

$$L\frac{di_L}{dt} = u_L(t), \qquad i_L(0) = i_{L_0},$$

unde $i_C(t)$ şi $u_L(t)$ sunt curentul prin condensator şi, respectiv, tensiunea pe bobină.

Din faptul că elementele circuitului sunt conectate în serie, rezultă că prin toate elementele circulă acelaşi curent, adică:

$$i_C(t) = i_R(t) = i_L(t),$$

iar tensiunea pe bobină poate fi exprimată (conform legii lui Kirchoff) sub forma:

$$u_L(t) = e(t) - u_R(t) - u_C(t) = e(t) - R_e i_L(t) - u_C(t).$$

Înlocuind aceste expresii în membrul drept al modelelor de tip integrator de mai sus, se obține sistemul de două ecuații diferențiale liniare, neomogene:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C_e} i_L(t);$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} u_C(t) - \frac{R_e}{L} i_L(t) + \frac{1}{L} e(t).$$

Astfel intrăm în posesia *ecuației vectorial-matriceale de stare*, scrierea generală (2.4.3) particularizându-se sub forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_e} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_e}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e(t); \qquad \begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{C_0} \\ i_{L_0} \end{bmatrix}.$$

În funcție de obiectivul urmărit prin construcția modelului, rolul mărimii de ieşire poate fi îndeplinit de oricare din semnalele (variabilele) ce apar în descrierea funcționării circuitului, mai puțin $e(t)$ (care se presupune a fi cunoscută prin însăşi natura problemei). Astfel, ecuația ieşirii având forma generală (2.4.2') se particularizează conform următoarelor cazuri:

(i) Dacă *tensiunea pe condensator* este considerată drept mărime de ieşire, atunci ecuația (2.4.4) devine:

$$u_C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix},$$

arătând că semnalul de ieşire coincide cu prima variabilă de stare aleasă.

(ii) Dacă *curentul prin bobină* (sau, echivalent, curentul furnizat de sursa circuitului serie din fig. 2.4.1) este considerat drept mărime de ieşire, atunci ecuația (2.4.4) devine:

$$i_L(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix},$$

arătând că semnalul de ieşire coincide cu a doua variabilă de stare.

(iii) Dacă tensiunea pe rezistență este considerată drept mărime de ieşire, atunci ecuația (2.4.4) devine:

$$u_R(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix},$$

întrucât avem exprimarea $u_R(t) = R_e i_L(t)$.

(iv) Dacă *tensiunea pe bobină* este considerată drept mărime de ieşire, atunci (2.4.4.) devine:

$$u_L(t) = \begin{bmatrix} -1 & -R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + e(t),$$

întrucât, din funcționarea circuitului, avem exprimarea $u_L(t) = e(t) - u_R(t) - u_C(t)$.

2.4.2. Răspuns complet, răspuns liber şi răspuns forţat

Exprimarea analitică a mărimii de ieşire $y(t)$ se realizează pornind de la soluția sistemului de ecuații diferențiale (2.4.3) care constituie ecuația intrare – stare a modelului, şi anume:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau\,. \tag{2.4.10}$$

Recomandăm ca exprimarea (2.4.10) să fie privită drept o *generalizare firească* a soluției ecuației diferențiale de ordin I, cu coeficienți constanți, generalizare care face apel la exponențiala matricială. Afirmațiile ce urmează vor pune în evidență utilitatea înțelegerii unei atare generalizări.

În baza relației (2.4.10), vectorul de stare $x(t)$ poate fi scris sub forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)\,, \tag{2.4.11}$$

unde

$$\mathbf{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{2.4.12}$$

definește *componenta liberă* (*de regim liber*) a stării, iar

$$\mathbf{x}_f(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau \tag{2.4.13}$$

definește *componenta forțată* (*de regim forțat*) a stării.

Componenta de regim liber $\mathbf{x}_l(t)$ constituie soluția ecuației (2.4.3) în forma *omogenă* cu *condiții inițiale nenule*, adică:

$$\dot{\mathbf{x}}_l(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_l(t), \quad \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}_0\,. \tag{2.4.14}$$

Componenta de regim forțat $\mathbf{x}_f(t)$ constituie soluția ecuației (2.4.3) în forma *neomogenă*, cu condiții inițiale *nule*, adică:

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_f(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}_f(0) = 0\,. \tag{2.4.15}$$

Astfel, descompunerea (2.4.11) ne arată că modelul (2.4.3) constituie un *model complet* al comportării sistemului, iar $\mathbf{x}(t)$ din (2.4.10) reprezintă *răspunsul complet pe stare*, care cuprinde informațiile privitoare atât la *evoluția liberă a stării,* cât şi la *evoluția forțată a stării*.

Luând acum în considerare şi ecuația ieşirii (2.4.4) se constată că descompunerea (2.4.11) atrage după sine posibilitatea descompunerii semnalului de ieşire $y(t)$ sub forma:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)\,, \tag{2.4.16}$$

unde

$$y_l(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}x(0) \tag{2.4.17}$$

definește *componenta liberă* (*de regim liber*) a *ieşirii*, iar:

$$y_f(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_f(t) + du(t) = \mathbf{c}^T\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau + du(t) \tag{2.4.18}$$

definește componenta *forțată* (*de regim forțat*) a *ieşirii*.

Subliniem faptul că din punct de vedere *practic*, observarea semnalului $y(t)$ (prin măsurare, înregistrare etc) *nu permite* evidențierea separată a celor două componente $y_l(t)$ şi $y_f(t)$ din descompunerea (2.4.16). Această descompunere are rolul de a preciza *la nivel conceptual*, faptul că evoluția în timp a semnalului de ieşire $y(t)$ este datorată structurii sistemului (sintetizată în matricea **A** şi vectorii **b**, $\mathbf{c}^T$ şi constanta d) asupra căreia acționează, pe de o parte, *condiția inițială*, iar pe de altă parte *semnalul de intrare*. Totodată trebuie remarcat că descompunerea pe stare (2.4.11) şi pe ieşire (2.4.16) este posibilă datorită *liniarității modelului.*

În cazul când ipoteza de liniaritate a comportării este respectată practic cu suficientă acuratețe, se pot organiza trei tipuri de experimente:

1) Experimente corespunzătoare modelului complet (2.4.3), (2.4.4).
2) Experimente corespunzătoare modelului de regim liber (2.4.14), (2.4.4).
3) Experimente corespunzătoare modelului de regim forțat (2.4.15), (2.4.4).

Notă: Ca şi în cazul modelelor de tip ecuație diferențială de ordinul I, ne vom limita discuția la modelele (2.4.3), (2.4.4) în care introducem anumite *restricții asupra coeficienților*. Restricțiile se referă la coeficienții matricei **A** care se consideră că iau valori de aşa manieră încât toate cele n autovalori λ_i, i=1,…,n ale lui **A** să aibă parte reală negativă, adică:

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad i = 1,...,n\,. \tag{2.4.19}$$

Aceste restricții permit delimitarea unei clase largi de sisteme fizice (de altfel, cele mai frecvent întâlnite în practică), care evidențiază o *comportare asimptotic stabilă*. După cum s-a precizat deja în secțiunea precedentă 2.3., detalii privind această comportare sunt furnizate în ultima secțiune a capitolului curent, 2.9.

Exemplul 2.4.2.

Se consideră circuitul electric din Exemplul 2.4.1., cu mărimea de ieşire definită conform cazului (iv), adică tensiunea pe bobină.

Autovalorile matricei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_e} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_e}{L} \end{bmatrix}$$

îndeplinesc condiția (2.4.19) indiferent de valorile parametrilor R_e, L, C_e, deoarece polinomul caracteristic ataşat:

$$\Delta(s) = s^2 + \left(\frac{R_e}{L}\right)s + \left(\frac{1}{LC_e}\right)$$

evidențiază, prin coeficienții săi, suma rădăcinilor negativă ($-R_e/L$) şi produsul rădăcinilor pozitiv ($1/LC_e$). În construcția matricei $e^{\mathbf{A}t}$ vom distinge însă două situații diferite:

(i) Dacă $(R_e/L)^2 \geq 4/LC_e$, atunci autovalorile vor fi reale şi negative;

(ii) Dacă $(R_e/L)^2 < 4/LC_e$, atunci autovalorile vor fi complex conjugate, cu partea reală negativă.

Ilustrăm calculul matricei $e^{\mathbf{A}t}$ (care permite determinarea analitică a vectorului de stare $\mathbf{x}(t)$, conform (2.4.10)) pentru câte un set de valori numerice asociate parametrilor R_e, L, C_e în situațiile (i) și, respectiv (ii).

(i) Considerăm $R_e = 1250\Omega$, $L = 0.025$ H, $C_e = 10^{-7}$F, pentru care avem matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10^7 \\ -40 & -5\cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

ale cărei autovalori sunt $\lambda_1 = -10^4$, $\lambda_2 = -4\cdot 10^4$. Utilizând formula Lagrange-Sylvester (Roïtenberg, 1974):

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\Big|_{s=\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\Big|_{s=\lambda_2},$$

în care se ia:

$$\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s + 5\cdot 10^4 & 10^7 \\ -40 & s \end{bmatrix},$$

vom obține:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{3\cdot 10^4} e^{-10^4 t} \begin{bmatrix} 4\cdot 10^4 & 10^7 \\ -40 & -10^4 \end{bmatrix} - \frac{1}{3\cdot 10^4} e^{-4\cdot 10^4 t} \begin{bmatrix} 10^4 & 10^7 \\ -40 & -4\cdot 10^4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(4e^{-10^4 t} - e^{-4\cdot 10^4 t}\right) & \frac{10^3}{3}\left(e^{-10^4 t} - e^{-4\cdot 10^4 t}\right) \\ \frac{4}{3\cdot 10^3}\left(-e^{-10^4 t} + e^{-4\cdot 10^4 t}\right) & \frac{1}{3}\left(-e^{-10^4 t} + 4e^{-4\cdot 10^4 t}\right) \end{bmatrix}.$$

(ii) Considerăm $R_e = 800\Omega$, $L = 0.02$ H, $C_e = 10^{-7}$F, pentru care avem matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10^7 \\ -50 & -4\cdot 10^4 \end{bmatrix},$$

ale cărei autovalori sunt $\lambda_1 = (-2 + j)10^4$, $\lambda_2 = (-2 - j)\cdot 10^4$. Se poate utiliza formula Lagrange-Sylvester ca mai sus la (i), sau apelăm la următoarea proprietate a matricei $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\},$$

a cărei demonstrație poate fi găsită în (Roïtenberg, 1974).

Astfel avem:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4\cdot 10^4 s + 50\cdot 10^7} \begin{bmatrix} s + 4\cdot 10^4 s & 10^7 \\ -50 & s \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \mathsf{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{s+2\cdot10^4}{(s+2\cdot10^4)^2+10^8}+2\dfrac{10^4}{(s+2\cdot10^4)^2+10^8} & 10^3\dfrac{10^4}{(s+2\cdot10^4)^2+10^8} \\ -5\cdot10^{-3}\dfrac{10^4}{(s+2\cdot10^4)^2+10^8} & \dfrac{s+2\cdot10^4}{(s+2\cdot10^4)^2+10^8}-2\dfrac{10^4}{(s+2\cdot10^4)^2+10^8} \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2\cdot10^4 t}\left(\cos10^4 t+2\sin10^4 t\right) & 10^3 e^{-2\cdot10^4 t}\sin10^4 t \\ -5\cdot10^{-3}e^{-2\cdot10^4 t}\sin10^4 t & e^{-2\cdot10^4 t}\left(\cos10^4 t-2\sin10^4 t\right) \end{bmatrix}.$$

2.4.3. Dinamica de regim liber

Dinamica de regim liber corespunde modelului (2.4.14), (2.4.4) care derivă din modelul complet (2.4.3), (2.4.4) pentru cazul particular al mărimii de intrare nule, adică $u(t) \equiv 0$. Relația (2.4.12) care constituie expresia lui $\mathbf{x}_l(t)$ împreună cu condiția (2.4.19) pune imediat în evidență comportarea de tip asimptotic:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}_l(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = 0 \tag{2.4.20}$$

pentru orice $\mathbf{x}(0)\in R^n$. Se spune că originea spațiului R^n, $\mathbf{x} = 0$, reprezintă *un punct de echilibru asimptotic stabil pe*ntru sistemul considerat, în sensul că evoluția liberă a sistemului din orice *stare inițială* $\mathbf{x}(0)$ se apropie asimptotic de punctul de echilibru.

Comportarea asimptotică a stării evidențiate prin relația (2.4.20) se reflectă la nivelul semnalului de ieşire prin intermediul egalității (2.4.4), (sau, prelucrat (2.4.17)), adică avem:

$$\lim_{t\to\infty} y_l(t) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} x(0) = 0\,. \tag{2.4.21}$$

În problemele practice ne interesează (intuitiv vorbind) cât de "repede" se realizează "apropierea" lui $\mathbf{x}_l(t)$ de punctul de echilibru $\mathbf{x} = 0$. Răspunsul la o atare întrebare se poate formula ținând cont de maniera în care evoluează către 0 funcțiile dependente de timp ce compun matricea $e^{\mathbf{A}t}$. Presupunând că matricea $\mathbf{A}$ posedă $r \le n$ autovalori distincte notate $\lambda_j, j = i,....,r$ de multiplicitate n_j, $j = i,....,r$, cu $n_1 + ... + n_r = n$, exponențiala matriceală $e^{\mathbf{A}t}$ poate fi scrisă sub forma:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{M}_j(t) e^{\lambda_j t}\,, \tag{2.4.22}$$

unde $\mathbf{M}_j(t)$ sunt matrice de polinoame în variabila t, având expresia:

$$\mathbf{M}_j(t) = \mathbf{M}_1^j + ... + \mathbf{M}_{n_j-1}^j \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} + \mathbf{M}_{n_j}^j \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!},\quad \mathbf{M}_{n_j}^j \neq 0,\quad j = 1,...,r. \tag{2.4.23}$$

Din examinarea relației (2.4.22) rezultă, *în termeni calitativi* că "apropierea" lui $\mathbf{x}_l(t)$ de $\mathbf{x} = 0$ (sau "stingerea" regimului liber) are loc cu atât *mai repede*, cu cât valorile proprii ale

matricei **A** sunt situate *mai la stânga* în semiplanul complex negativ.

Din punct de vedere practic, se poate afirma că există un *moment finit de timp*, notat t_l, de la care mai departe componentele vectorului de stare în regim liber $\mathbf{x}_l(t)$ sunt *neglijabile ca magnitudine.* Drept consecință, pentru valori ale timpului mai mari ca t_l ieşirea în regim liber $y_l(t)$ poate fi privită ca anulându-se, în raport cu precizia observației. Acest fapt se poate formaliza matematic prin afirmația

$$\exists t_l > 0 : \forall t,\ t \geq t_l \quad \left|y_l(t)\right| \leq \varepsilon_l \left|y_l(0)\right|, \tag{2.4.24}$$

unde ε_l este o valoare subunitară mică, exprimată uzual în procente (frecvent 5% sau 2%). Cu cât valorile $\left|\mathrm{Re}\,\lambda_j\right|$, $j = 1,...,r$ sunt mai mari ($\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0, \quad j = 1,...,r$), cu atât t_l va fi mai mic. (Subliniem faptul că în cazul unui model de tip ecuație diferențială de ordinul I, se poate vorbi, prin particularizare, de o singură autovaloare $\lambda = -1/T$ unde T notează constanta de timp. În cazul sistemelor de ordin superior, estimarea *cantitativă* a valorii t_l în funcție de valorile $\lambda_j, j = i,....,r$ este o operație mult mai dificilă, care se abordează de la caz la caz, pe *situații concrete*. Din acest motiv analiza noastră anterioară s-a limitat la *constatări de factură calitativă*).

Tot din punct de vedere practic, legat de evoluția în regim liber a lui $\mathbf{x}_l(t)$, respectiv $y_l(t)$, mai prezintă interes faptul că anularea componentei libere pe stare şi/sau ieşire se poate realiza în două moduri:

(i) oscilant cu oscilații amortizate

(ii) aperiodic (fără oscilații)

În general, prezența oscilațiilor amortizate se datorează existenței în sistemul fizic a cel puțin două elemente care acumulează *energia în forme complementare* (cinetică – potențială, electrică – magnetică). O atare structură fizică permite transferul de energie între elementele respective, în condițiile când elementele rezistive din sistem manifestă *o disipare redusă*. Din contră, în condițiile când elementele rezistive manifestă o *disipare puternică*, evoluția liberă se realizează aperiodic, indiferent de modul de acumulare a energiei de către elementele sistemului.

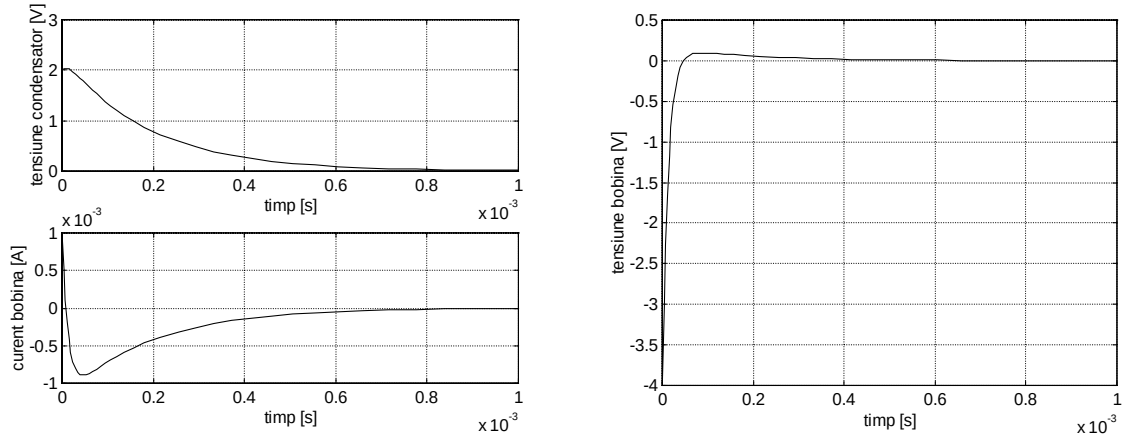
La *nivel calitativ*, autovalorile matricei **A** pot da unele indicații privind natura răspunsului liber pe stare şi ieşire:

- Dacă toate valorile proprii sunt *reale* (evident negative) răspunsul liber pe stare şi ieşire va fi *aperiodic*.
- Dacă există valorile proprii *complex conjugate*, atunci *unele componente* (nu neapărat toate) ale vectorului de stare $\mathbf{x}_l(t)$ şi eventual (nu neapărat) ieşirea $y_l(t)$ vor prezenta o comportare *oscilant amortizată*. Frecvența acestor oscilații este dictată de părțile imaginare, $\mathrm{Im}\,\lambda_k$ ale valorilor proprii λ_k complex conjugate. Aceste constatări sunt consecințe directe ale exprimărilor (2.4.12) şi (2.4.17) pentru $\mathbf{x}_l(t)$ şi respectiv $y_l(t)$ care fac uz de exponențiala matricială (2.4.22).

Exemplul 2.4.3.

Analizăm răspunsul liber al sistemului din exemplul 2.4.1., în care mărimea pe ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv). Mărimea de intrare este nulă, $e(t) = 0$, adică sursa este înlocuită printr-un scurtcircuit. Printr-un procedeu oarecare (de exemplu un

experiment derulat anterior), pentru condensator este creată condiția inițială $u_C(0) = 2\text{V}$, iar pentru bobină este creată condiția inițială $i_L(0) = 1\,\text{mA}$.



(a) **(b)**

Fig. 2.4.2. Dinamica de regim liber a sistemului considerat în Exemplul 2.4.3:
(a) evoluția variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară); **(b)** evoluția variabilei de ieşire.

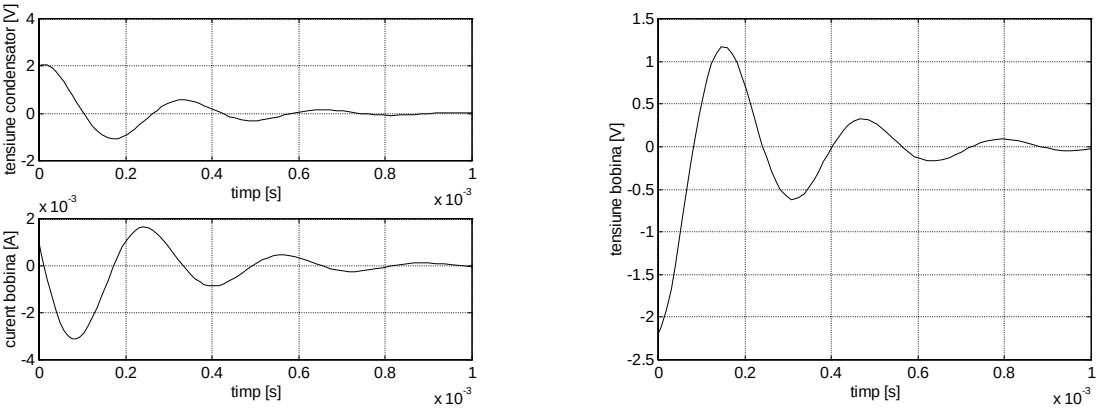
Dacă valorile parametrilor sunt $R_e = 2000\Omega$, $L = 0.025\text{H}$, $C_e = 10^{-7}\text{H}$, atunci matricea **A** are autovalorile reale $\lambda_1 \cong -74641$, $\lambda_2 \cong -5359$. Răspunsul liber este aperiodic, conform reprezentărilor grafice din fig. 2.4.2 (a, b), în care sunt trasate atât evoluția semnalului de stare (a), cât şi evoluția semnalului de ieşire (b). Se observă faptul că regimul liber "se stinge" într-un interval de timp mai mic de 10^{-3}s, care este de 3-4 ori mai mare decât inversul modulului autovalorii celei mai apropiate de axa imaginară, adică $1/|\lambda_2|$. În acest caz $|\lambda_2|$ este mult mai mic decât $|\lambda_1|$, motiv pentru care se poate considera că numai $|\lambda_2|$ impune durata de "stingere" a regimului liber. În limbajul specific automaticii se spune că λ_2 este *dominată* în raport cu λ_1. Pentru aprofundarea aspectelor fizice, ale funcționării sistemului, cititorul este invitat să constate (cu ajutorul acestor reprezentări grafice) legătura dintre evoluția curentului $i_L(t)$ şi a tensiunii $u_L(t)$ corespunzătoare bobinei. ⊣

⊢ Exemplul 2.4.4.

Ne plasăm în condițiile Exemplului 2.4.3., cu singura deosebire că pentru rezistență vom considera o valoare de 10 ori mai mică, adică $R_e = 200\Omega$. Matricea **A** are autovalorile complex conjugate $\lambda_{1,2} \cong 4000 \pm j19596$. Răspunsul liber este oscilant amortizat, conform reprezentărilor grafice din fig. 2.4.3 (a, b), în care sunt trasate atât evoluțiile variabilelor de stare (a), cât şi evoluția semnalului de ieşire (b).

Se observă faptul că perioada oscilațiilor este de aproximativ $3\cdot10^{-4}$s, în deplină concordanță cu valoarea $2\pi/(\text{Im}\,\lambda_{1,2})$. De asemenea, se observă că regimul liber "se stinge" într-un interval de timp de aproximativ 10^{-3}s, care este de 3-4 ori mai mare decât inversul părții reale a autovalorilor, adică $1/|(\text{Re}\lambda_{1,2})|$. Pentru aprofundarea aspectelor fizice ale funcționării sistemului, cititorului îi este recomandat a constata (cu ajutorul acestor

reprezentări grafice) legătura dintre evoluția curentului $i_L(t)$ şi a tensiunii $u_L(t)$ corespunzătoare bobinei.



(a) **(b)**

Fig. 2.4.3. Dinamica de regim liber a sistemului considerat în Exemplul 2.4.4:
(a) evoluția variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară); **(b)** evoluția variabilei de ieşire.

2.4.4. Dinamica de regim forţat pentru semnale de intrare standard

2.4.4.1. Semnale de intrare standard

Dinamica de regim forţat corespunde modelului (2.4.15), (2.4.4) care derivă din modelul complet (2.4.3), (2.4.4) pentru cazul particular al condiţiilor iniţiale nule $\mathbf{x}(0) \equiv 0$. Evoluția stării $\mathbf{x}_f(t)$ şi a ieşirii $y_f(t)$ este dată de relația (2.4.13) şi respectiv (2.4.18). Din punct de vedere practic, prezintă deosebit interes studierea comportării datorate unor semnale de intrare uşor realizabile tehnic, denumite "semnale standard". Astfel de semnale sunt frecvent utilizate drept semnale de test pentru a investiga diverse aspecte experimentale puse în evidenţă de dinamica proceselor fizice.

Din clasa semnalelor standard considerăm *două categorii*, şi anume:

- Semnale polinomiale de forma:

$$u(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\sigma(t), \quad m \geq 1,\ \sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \tag{2.4.25}$$

care includ *semnalul treaptă* (pentru $m = 1$), *semnalul rampă* (pentru $m = 2$) etc.

- Semnale sinusoidale de forma:

$$u(t) = \sin \omega t\, \sigma(t),\ \sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.4.26}$$

Datorită liniarităţii comportării sistemului, din clasa semnalelor standardizate vor fi considerate ca făcând parte şi semnalele rezultate din (2.4.25) şi (2.4.26) *prin multiplicări cu constante nenule*.

2.4.4.2. Tratarea operaţională a transferului intrare-stare-ieşire

Pentru o tratare unitară a problematicii răspunsului forţat, vom face apel la metoda operațională. Aplicând transformarea Laplace ecuației intrare – stare (2.4.15), se obține:

$$\mathbf{X}_f(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s) = \mathbf{Q}(s)U(s), \tag{2.4.27}$$

unde $\mathbf{X}_f(s) = \mathcal{L}\left\{\mathbf{x}_f(t)\right\}, U(s) = \mathcal{L}\left\{u(t)\right\}$, iar

$$\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ \vdots \\ Q_n(s) \end{bmatrix} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \tag{2.4.28}$$

notează o funcție vectorială ale cărei componente $Q_i(s)$, $i = 1,\ldots, n$ sunt funcții raționale strict proprii (gradul numărătorului este strict mai mic decât gradul numitorului) având drept numitor polinomul caracteristic al matricei **A**:

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}). \tag{2.4.29}$$

Vom face presupunerea (care, în general, este susținută de practică) că numărătorii funcțiilor $Q_i(s)$, $i = 1,\ldots, n$ sunt funcții *neidentic nule*.

Prin aplicarea transformării Laplace ecuației ieşirii (2.4.4) şi ulterior, făcând uz de relația (2.4.27), se obține:

$$Y_f(s) = \mathbf{c}^T\mathbf{X}_f(s) + dU(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s) + dU(s) = G(s)U(s), \tag{2.4.30}$$

unde $Y_f(s) = \mathcal{L}\left\{y_f(t)\right\}$, iar

$$G(s) = \mathbf{c}^T\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b} + d \tag{2.4.31}$$

notează o funcție scalară, rațională, strict proprie pentru $d = 0$ şi proprie (gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului) pentru $d \neq 0$, având drept numitor polinomul caracteristic $\Delta(s)$, dat de (2.4.29).

Funcția $G(s)$ definită prin (2.4.31) poartă denumirea de *funcție de transfer*, întrucât descrie prin metoda operațională, transferul în regim forțat de la imaginea semnalului de intrare $U(s)$, la imaginea semnalului de ieşire $Y_f(s)$, conform ultimei egalități din (2.4.30).

Exemplul 2.4.5.

Considerăm sistemul din Exemplul 2.4.1., în care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv).Pornind de la modelul intrare-stare-ieşire, calculăm modelul de tip funcție de transfer cu ajutorul relației (2.4.31). Astfel obținem:

$$G(s)=\begin{bmatrix}-1 & -R_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -\dfrac{1}{C_e}\\ \dfrac{1}{L} & s+\dfrac{R_e}{L}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}+1=$$

$$=\frac{1}{s^2+(R_e/L)s+(1/LC_e)}\begin{bmatrix}-1 & -R_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+\dfrac{R_e}{L} & \dfrac{1}{C_e}\\ -\dfrac{1}{L} & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}+1=$$

$$=\frac{1}{s^2+(R_e/L)s+(1/LC_e)}\begin{bmatrix}-1 & -R_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{LC_e}\\ \dfrac{s}{L}\end{bmatrix}+1=$$

$$=\frac{-(R_e/L)s-(1/LC_e)}{s^2+(R_e/L)s+(1/LC_e)}+1=\frac{s^2}{s^2+(R_e/L)s+(1/LC_e)}.$$

Aceasta înseamnă că între transformatele Laplace ale semnalului de intrare $E(s)=\mathsf{L}\{e(t)\}$ şi, respectiv, a semnalului de ieşire $U_L(s)=\mathsf{L}\{u_L(t)\}$ există următoarea legătură exprimată în scriere operațională

$$U_L(s)=G(s)E(s)=\frac{s^2}{s^2+(R_e/L)s+(1/LC_e)}E(s).$$

Cititorului familiarizat cu tratarea operațională a circuitelor electrice îi sugerăm să probeze validitatea rezultatului de mai sus, prin următorul calcul:

$$U_L(s)=Z_L(s)I(s)=Z_L(s)\frac{E(s)}{Z(s)}=\frac{Z_L(s)}{Z(s)}E(s),$$

unde $Z_L(s)$ şi $Z(s)$ notează impedanțele operaționale ale bobinei şi, respectiv, a întregului circuit. Cu alte cuvinte, funcția de transfer din acest exemplu are semnificația unui factor de divizare complex $G(s)=Z_L(s)/Z(s)$. ⊣

2.4.4.3. Răspunsul forţat la semnale de intrare polinomiale

Ne vom ocupa, mai întâi, de *răspunsul forțat pe stare*. Semnalele polinomiale (2.4.25) au transformata Laplace (a se vedea Anexa I) de forma:

$$U(s)=\frac{1}{s^m},\quad m\geq 1, \tag{2.4.32}$$

de unde rezultă, în baza egalității (2.4.27), că fiecare element al vectorului $\mathbf{X}_f(s)=\left[X_{f1}(s)\ldots X_{fn}(s)\right]'$ are forma :

$$X_{fi}(s)=\frac{Q_i(s)}{s^m},\quad i=1...,n\,, \tag{2.4.33}$$

unde semnul ′ simbolizează operația de transpunere.

Întrucât toate rădăcinile polinomului $\Delta(s)$ sunt situate strict în semiplanul complex stâng, pentru fiecare element al lui $\mathbf{X}_f(s)$ putem scrie

$$X_{fi}(s)=Q_i(0)\frac{1}{s^m}+\frac{Q_i^{'}(0)}{1!}\cdot\frac{1}{s^{m-1}}+\ldots\frac{Q_i^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\cdot\frac{1}{s}+\widetilde{Q}_i(s),\qquad i=1,...,n\,, \tag{2.4.34}$$

unde $\widetilde{Q}_i(s)$ notează o funcție rațională strict proprie, cu numitorul $\Delta(s)$. Trecând la originale, adică aplicând transformarea Laplace inversă în (2.4.34), se observă imediat că:

$$x_{fi}(t)=Q_i(0)\cdot\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{Q_i^{'}(0)}{1!}\cdot\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+\ldots\frac{Q_i^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+x_{ti}(t),\quad i=1,...,n\,, \tag{2.4.35}$$

unde $x_{ti}(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\widetilde{Q}_i(s)\right\}$ notează *componenta tranzitorie* a răspunsului forțat al stării i, $i = 1, \ldots, n$, care posedă proprietatea:

$$\lim_{t\to\infty}x_{ti}(t)=0,\quad i=1,...,n\,. \tag{2.4.36}$$

Cu alte cuvinte, pentru răspunsul forțat al stării, în exprimare vectorială, se pune în evidență comportarea de tip asimptotic:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbf{x}_f(t)-\mathbf{x}_p(t)\right)=0\,,\ \mathbf{x}_f(t)=\left[x_{f1}(t)\ldots x_{fn}(t)\right]',\ \mathbf{x}_p(t)=\left[x_{p1}(t)\ldots x_{pn}(t)\right]'. \tag{2.4.37}$$

unde simbolul ′ desemnează operația de transpunere.

Conform (2.4.35), vectorul $\mathbf{x}_p(t)$ are elementele definite prin funcțiile:

$$x_{pi}(t)=x_{fi}(t)-x_{ti}(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{Q_i^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\cdot\frac{t^{m-k}}{(m-k)!}\cdot\sigma(t),\quad i=1,...,n\,, \tag{2.4.38}$$

notația $x_{pi}(t)$ desemnând *componenta permanentă* a răspunsului forțat al stării i, $i = 1, \ldots, n$. Se constată că funcțiile $x_{pi}(t)$ *copie caracteristicile fundamentale* ale semnalului de intrare $u(t)$, fiind polinoame de grad cel mult m-1 în variabilă temporală t.

În cele ce urmează ne ocupăm de *răspunsul forțat al ieşirii sistemului*. Reluând procedura de descompunere în fracții de mai sus direct pentru $Y_f(s)$ din (2.4.30), obținem, pentru variabila de ieşire, scrierea:

$$y_f(t)=y_p(t)+y_t(t)\,, \tag{2.4.39}$$

unde $y_p(t)$ şi $y_t(t)$ notează *componenta permanentă* şi respectiv *componenta tranzitorie* a răspunsului forțat $y_f(t)$. În mod similar cu cele discutate pentru stare avem:

$$\lim_{t\to\infty}y_t(t)=0 \tag{2.4.40}$$

şi, drept consecință directă:

$$\lim_{t\to\infty}\left(y_f(t)-y_p(t)\right)=0\,, \tag{2.4.41}$$

unde

$$y_p(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{G^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\frac{t^{m-k}}{(m-k)!}\sigma(t) \tag{2.4.42}$$

conține caracteristicile fundamentale ale semnalului de intrare $u(t)$.

Observație: În cazul unui semnal de intrare $u(t)$ *treaptă* (m = 1 în relația (2.4.25)) componentele permanente ale stării $x_{pi}(t)$, i = 1,…,n şi componenta permanentă a ieşirii $y_p(t)$ sunt *funcții constante*, cu următoarele valori:

$$x_{pi}(t)=Q_i(0),\qquad i=1,...n\,, \tag{2.4.43}$$

$$y_p(t)=G(0)\,. \tag{2.4.44}$$

Din acest motiv se mai utilizează denumirea de *valori staționare,* sau *valori de regim staționar*. Regimul staționar trebuie privit drept un caz particular de regim permanent, corespunzând situației (frecvent întâlnite în practică) când semnalul de intrare este constant în timp (adică un polinom de gradul 0). Se constată, că în regim staționar $G(0)$ joacă rolul unei amplificări (în sensul larg de proporționalitate) de la valoarea constantă a intrării, la valoarea constantă a ieşirii. De aceea valoarea $G(0)$ este frecvent referită drept *factor de amplificare* al sistemului.

Relațiile (2.4.43), (2.4.44) pot fi privite şi drept consecințe imediate ale Teoremei valorii finale (vezi anexa dedicată transformării Laplace). Astfel, deducerea lui (2.4.43) se pate face direct din (2.4.27), în formă vectorială:

$$\mathbf{x}_p=\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}_f(t)=\lim_{s\to 0}s\mathbf{X}_f(s)=\lim_{s\to 0}s\mathbf{Q}(s)\frac{1}{s}=\mathbf{Q}(0)=\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b}\Big|_{s=0}=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,, \tag{2.4.43'}$$

unde $\mathbf{A}^{-1}$ există întotdeauna, deoarece autovalorile lui $\mathbf{A}$ au fost presupuse ca având părțile reale strict negative. Această ultimă exprimare ne arată că valorile de regim staționar ale vectorului de stare sunt soluții ale sistemului algebric $\mathbf{Ax}+\mathbf{b}\cdot 1=0$ care defineşte membrul drept al ecuației stării (2.4.3) pentru $u(t)=\sigma(t)$. Drept urmare, vom avea şi nulitatea membrului stâng a lui (2.4.3), adică $\dot{\mathbf{x}}(t)=0$, confirmând faptul că în regim staționar variabilele de stare rămân constante.

Similar se procedează şi pentru (2.4.44), ajungând la exprimarea:

$$y_P=\lim_{t\to\infty}y_f(t)=\lim_{s\to 0}sY_f(s)=\lim_{s\to 0}sG(s)\frac{1}{s}=G(0)=-\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}+d\,. \tag{2.4.44'}$$

Exemplul 2.4.6.

Considerăm sistemul din exemplul 2.4.1., în care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv). Semnalul de intrare aplicat sistemului este o treaptă de amplitudine $\alpha[V]$,adică $e(t)=\alpha\sigma(t)$, iar condițiile inițiale sunt nule pentru condensator şi bobină. Cum autovalorile matricei $\mathbf{A}$ au părțile reale strict negative indiferent de valorile parametrilor R_e, L, C_e (vezi şi Exemplul 2.4.2),rezultă că sistemul va evolua către un regim staționar. Valorile de regim staționar pentru variabilele de stare pot fi determinate cu ajutorul relației (2.4.43'), ținând cont că amplitudinea treptei aplicate la intrare este α, astfel:

$$x_p = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\alpha = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_e} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_e}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analog, aplicăm (2.4.44') cu observația că amplitudinea semnalului treaptă de intrare este α şi obținem:

$$y_p = \left(-\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + d\right)\alpha = \left(\begin{bmatrix} -1 & -R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \right) \alpha = 0 .$$

Cititorul este invitat să reflecteze asupra sensului fizic al valorilor de regim staționar calculate mai sus şi să justifice faptul că aceste valori nu depind de parametrii R_e, L, C_e ai sistemului.

Din punct de vedere practic ne interesează o cunoaştere mai detaliată a *regimului tranzitoriu* sub raportul duratei *finite de timp* şi a prezenței *oscilațiilor amortizate*. (Observăm că această problematică reia chestiuni de tipul celor deja abordate în contextul răspunsului liber, motiv pentru care este de aşteptat să putem formula concluzii asemănătoare).

Viteza de "stingere" a componentelor tranzitorii $x_{ti}(t)$, $i = 1,\ldots,n$ şi $y_t(t)$ este dată de descreşterea exponențialelor care intră în expresiile acestor funcții, adică de modul de amplasare în semiplanul complex stâng a zerourilor lui $\Delta(s)$ (care constituie numitorul pentru toate imaginile Laplace luate în discuție). Echivalent, constatăm că durata regimului tranzitoriu va depinde de valorile proprii λ_i, $i = 1,\ldots,n$ ale matricei **A**, în sensul *calitativ,* cu cât valorile proprii sunt situate *mai la stânga*, cu atât *regimul permanent* se va instala *mai repede*. Magnitudinea valorilor proprii reprezintă aşadar o măsură a inerției sistemului. Matematic putem formaliza această constatare prin afirmația:

$$\exists t_f > 0 : \forall t, \quad t \geq t_f \quad |y_t(t)| \leq \varepsilon_f |y_t(0)|, \tag{2.4.45}$$

sau, echivalent

$$\exists t_f > 0 : \forall t \ , \quad t \geq t_f \quad |y_f(t) - y_p(t)| \leq \varepsilon_f |y_f(0) - y_p(0)|, \tag{2.4.46}$$

unde ε_f este o valoare subunitară mică, exprimată uzual în procente (frecvent 5% sau 2%). (Atragem atenția asupra înțelegerii modului în care se generalizează problematica cunoscută de la studierea regimului forțat a unui sistem modelat printr-o ecuație diferențială de ordinul I. Totodată subliniem dificultatea obținerii unei estimări *cantitative* a valorii t_f şi faptul că astfel de estimări nu se formulează pe cazul general, ci pe cazuri concrete).

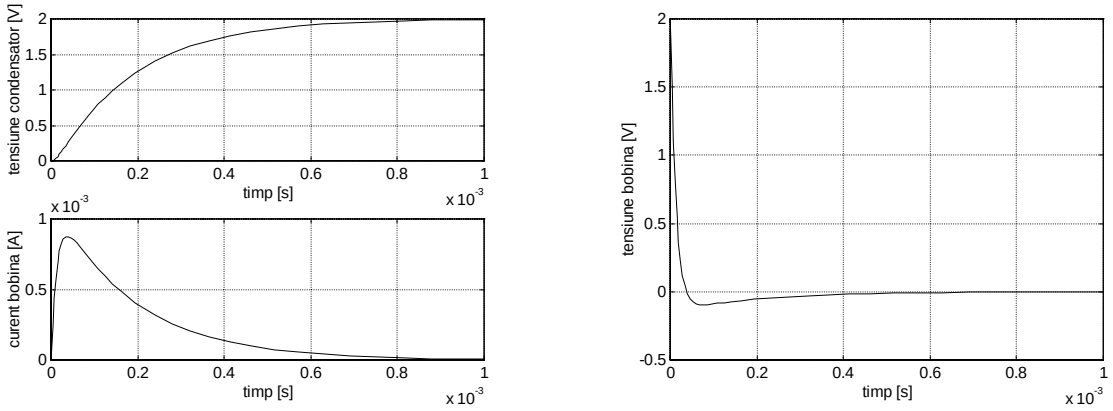
Prezența, respectiv absența *oscilațiilor* amortizate pe durata regimului tranzitoriu se justifică, din punct de vedere fizic, ca şi în cazul regimului liber. Sub *raport calitativ*, valorile proprii ale matricei **A** pot da unele indicații privind natura răspunsului forțat pe stare şi ieşire:

- Dacă toate valorile proprii sunt *reale* (evident, negative), răspunsul forțat pe stare şi pe ieşire nu va prezenta oscilații amortizate.
- Dacă există valori proprii *complex conjugate* atunci *unele componente* (nu neapărat toate) ale vectorului de stare $\mathbf{x}_f(t)$ şi eventual (nu neapărat) ieşirea $y_f(t)$ vor prezenta o comportare oscilant amortizată. Frecvența acestor oscilații este dictată de părțile imaginare, $\mathrm{Im}\lambda_k$, ale valorilor proprii λ_k complex conjugate.

Exemplul 2.4.7.

Studiem răspunsul forțat la semnalul de intrare treaptă pentru sistemul din Exemplul 2.4.1., în care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv). Amplitudinea treptei de intrare este 2, adică sursa de tensiune furnizează $e(t) = 2\text{V},\ t \in [0,\infty)$, iar condițiile inițiale sunt nule pe condensator şi bobină.

Dacă valorile parametrilor sunt $R_e = 2000\Omega$, $L = 0.025\text{H}$, $C_e = 10^{-7}\text{F}$, atunci matricea **A** are autovalorile reale $\lambda_1 \cong -74641$, $\lambda_2 \cong -5359$. Răspunsul forțat este aperiodic, conform reprezentărilor grafice din fig. 2.4.4.(a, b), în care sunt trasate atât evoluțiile variabilelor de stare (a), cât şi evoluția semnalului de ieşire (b). Se observă că durata regimului tranzitoriu este mai mică de 10^{-3}s, ceea ce înseamnă un interval de timp de 3-4 ori mai mare decât inversul modulului autovalorii celei mai apropiate de axa imaginară, adică $1/|\lambda_2|$. Valorile de regim staționar la care ajung variabilele de stare şi semnalul de ieşire pot fi calculate şi analitic, conform Exemplului 2.4.6. Pentru aprofundarea aspectelor fizice ale funcționării sistemului, cititorul este invitat ca, utilizând aceste reprezentări grafice, să schițeze evoluția tensiunii pe rezistență $u_R(t)$ şi să constate conexiunea cu evoluția semnalelor $u_C(t)$ şi $u_L(t)$.

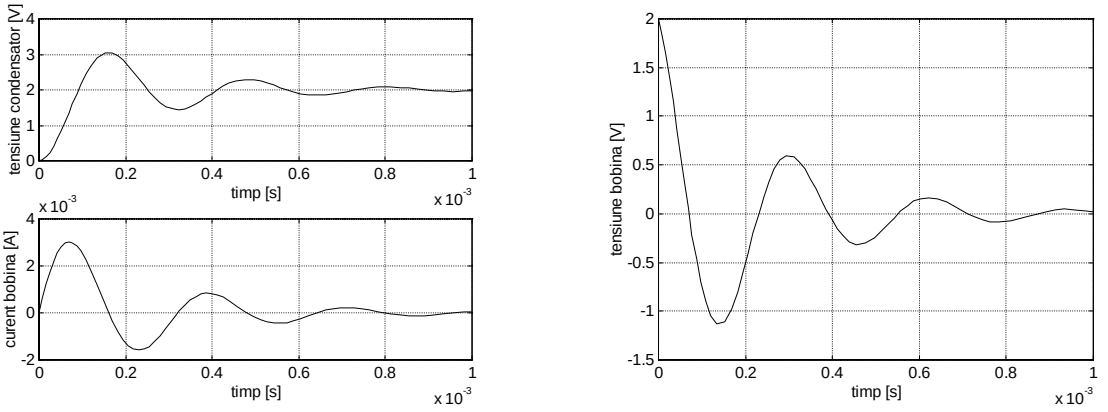


(a) **(b)**

Fig. 2.4.4. Răspunsul sistemului considerat în Exemplul 2.4.7. la un semnal de intrare treaptă cu amplitudine 2V: **(a)** evoluția variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară); **(b)** evoluția variabilei de ieşire.

Exemplul 2.4.8.

Ne plasăm în condițiile Exemplului 2.4.7, cu singura deosebire că pentru rezistență vom considera o valoare de 10 ori mai mică, adică $R_e = 200\ \Omega$. Matricea **A** are autovalorile complex-conjugate $\lambda_{1,2} \cong -4000 \pm j19596$. Răspunsul forțat este oscilant amortizat, conform reprezentărilor grafice din fig. 2.4.5 (a, b), în care sunt trasate atât evoluțiile variabilelor de stare (a), cât şi evoluția semnalului de ieşire (b).



(a) **(b)**

Fig. 2.4.5. Răspunsul sistemului considerat în Exemplul 2.4.8 la un semnal de intrare treaptă cu amplitudine 2V: **(a)** evoluția variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară); **(b)** evoluția variabilei de ieşire.

Se observă faptul că perioada oscilațiilor este de aproximativ $3\cdot10^{-4}$s, în deplină concordanță cu valoarea $2\pi/(\text{Im}\ \lambda_{1,2})$. De asemenea, se observă ca durata regimului tranzitoriu este de aproximativ 10^{-3}s, ceea ce înseamnă un interval de timp de 3-4 ori mai mare decât inversul modulului părții reale a autovalorilor, adică $1/|(\text{Re}\ \lambda_{1,2})|$. Valorile de regim staționar la care ajung variabilele de stare şi semnalul de ieşire pot fi calculate şi analitic, conform Exemplului 2.4.6. Pentru aprofundarea aspectelor fizice ale funcționării sistemului, cititorul este invitat ca, utilizând aceste reprezentări grafice, să schițeze evoluția tensiunii pe rezistență $u_R(t)$ şi să constate conexiunea cu evoluția semnalelor $u_C(t)$ şi $u_L(t)$.

2.4.4.4. Răspunsul forţat la semnale de intrare sinusoidale

Ne vom ocupa, mai întâi, de *răspunsul forțat al stării sistemului*. Semnalele sinusoidale (2.4.26) au transformata Laplace de forma (a se vedea Anexa I):

$$U(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \tag{2.4.47}$$

de unde rezultă, în baza egalității (2.4.27), că fiecare element al vectorului $\mathbf{X}_f(s)=\left[X_{f1}(s)\ldots X_{fn}(s)\right]$ are forma:

$$X_{fi}(s)=Q_i(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\ i=1,\ldots,n\,. \tag{2.4.48}$$

Întrucât toate rădăcinile polinomului $\Delta(s)$ sunt situate strict în semiplanul complex stâng, pentru fiecare element al lui $x_f(s)$ putem scrie:

$$X_{fi}(s)=\text{Re}[Q_i(j\omega)]\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\text{Im}[Q_i(j\omega)]\frac{s}{s^2+\omega^2}+\widetilde{Q}_i(s),\ i=1,\ldots,n\,, \tag{2.4.49}$$

unde $Q_i(j\omega)=Q_i(s)\big|_{s=j\omega}$ cu $Q_i(s)$ rezultând din (2.4.28), iar $\widetilde{Q}_i(s)$ notează o funcție rațională strict proprie, cu numitorul $\Delta(s)$. Trecând la originale adică aplicând transformarea Laplace inversă în (2.4.49), se observă că:

$$x_{fi}(t) = \left|Q_i(j\omega)\right| \sin\left(\omega t + \arg Q_i(j\omega)\right) + x_{ti}(t),\ i = 1,...,n\,, \tag{2.4.50}$$

unde $x_{ti}(t) = \mathsf{L}^{-1}\left\{\widetilde{Q}_i(s)\right\}$ notează componenta *tranzitorie* a răspunsului forțat al stării i, $i = 1, \ldots, n$, care posedă proprietatea:

$$\lim_{t\to\infty} x_{ti}(t) = 0\ ,\quad i = 1,...,n\,. \tag{2.4.51}$$

Cu alte cuvinte, pentru răspunsul forțat al stării, în exprimare vectorială, se pune în evidență comportarea *de tip asimptotic*:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbf{x}_f(t) - \mathbf{x}_p(t)\right) = 0\,,\ \mathbf{x}_f(t) = \left[x_{f1}(t)\ldots x_{fn}(t)\right]',\ \mathbf{x}_p(t) = \left[x_{p1}(t)\ldots x_{pn}(t)\right]', \tag{2.4.52}$$

unde simbolul $'$ desemnează operația de transpunere.

Conform (2.4.50), vectorul $x_p(t)$ are elementele definite prin funcțiile:

$$x_{pi}(t) = x_{fi}(t) - x_{ti}(t) = \left|Q_i(j\omega)\right| \sin\left(\omega t + \arg Q_i(j\omega)\right)\sigma(t),\quad i = 1,...,n \tag{2.4.53}$$

notația $x_{pi}(t)$ desemnând *componenta permanentă* a răspunsului forțat al stării i, $i = 1, \ldots, n$. Se constată că funcțiile $x_{pi}(t)$ *copie caracteristicile fundamentale* ale semnalului de intrare $u(t)$, fiind funcții sinusoidale de aceeaşi pulsație ω.

În cele ce urmează ne ocupăm de *răspunsul forțat al ieşirii sistemului*. Reluând procedura de descompunere în fracții (2.4.49) de mai sus, direct pentru $Y_f(s)$ din (2.4.30) obținem, pentru variabila de ieşire, scrierea:

$$y_f(t) = y_p(t) + y_t(t)\,, \tag{2.4.54}$$

unde $y_p(t)$ notează *componenta de regim permanent sinusoidal* (analogă, ca formă, relației (2.4.53)):

$$y_p(t) = \left|G(j\omega)\right| \sin\left(\omega t + \arg G(j\omega)\right)\sigma(t) \tag{2.4.55}$$

iar *componenta tranzitorie* $y_t(t)$ posedă proprietatea de anulare asimptotică:

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0\,. \tag{2.4.56}$$

Cu alte cuvinte, constatăm că:

$$\lim_{t\to\infty}\left(y_f(t) - y_p(t)\right) = 0\,, \tag{2.4.57}$$

unde $y_p(t)$ dat de (2.4.55) conține caracteristicile fundamentale ale semnalului de intrare $u(t)$.

Ca şi în cazul semnalelor de intrare polinomiale, "viteza de apropiere" a lui $y_f(t)$ de $y_p(t)$ depinde de modul de amplasare a valorilor proprii ale matricei **A**, care astfel impun *durata finită* a regimului tranzitoriu (pe parcursul acestuia "stingându-se" componenta $y_t(t)$).

Observație: Deşi în regim permanent $x_{pi}(t)$, $i = 1,\ldots, n$ (relația (2.4.53)) şi $y_p(t)$ (relația (2.4.55)) posedă aceeaşi pulsație ca şi semnalul de intrare $u(t)$, ele au *amplitudini* şi *faze inițiale* diferite de ale lui $u(t)$. În general vorbind, la nivel *calitativ,* pentru *valori mari* ale lui ω (adică la frecvențe ridicate) avem următoarele manifestări ale inerției sistemului fizic (care *nu poate urmări* identic semnalul sinusoidal de intrare):

- Amplitudinile $\left|Q_i(j\omega)\right|$, $i = 1,..n$ şi $\left|G(j\omega)\right|$ descresc la creşterea lui ω.
- Fazele inițiale $\arg Q_i(j\omega)$, i = 1,…,n şi $\arg G(j\omega)$ (adică defazajele între $u(t)$ şi $x_{pi}(t)$, respectiv $y_p(t)$) se negativează tot mai mult la creşterea lui ω. Cu alte cuvinte, $x_{pi}(t)$,

$i = 1,\ldots, n$ şi $y_p(t)$ sunt tot mai întârziate în raport cu semnalul de intrare $u(t)$.

Exemplul 2.4.9.

Considerăm sistemul din Exemplul 2.4.1, în care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv). Semnalul de intrare aplicat sistemului este sinusoidal, cu amplitudinea de 1V, având forma $u(t) = \sin \omega t$, iar condiţiile iniţiale sunt nule pentru condensator şi bobină. Conform (2.4.28) avem:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -\dfrac{1}{C_e} \\ \dfrac{1}{L} & s + \dfrac{R_e}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + (R_e/L)s + (1/LC_e)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{LC_e} \\ \dfrac{s}{L} \end{bmatrix}$$

şi răspunsul forţat al stării va tinde către comportarea de regim permanent de forma (2.4.53):

$$x_{p1}(t) = |Q_1(j\omega)| \sin\left(\omega t + \arg Q_1(j\omega)\right),\ Q_1(j\omega) = Q_1(s)\big|_{s=j\omega} =$$

$$= \frac{1/LC_e}{(-\omega^2 + 1/LC_e) + j(R_e/L)\omega},$$

$$x_{p2}(t) = |Q_2(j\omega)| \sin\left(\omega t + \arg Q_2(j\omega)\right),\ Q_2(j\omega) = Q_2(s)\big|_{s=j\omega} =$$

$$= \frac{j\omega/L}{(-\omega^2 + 1/LC_e) + j(R_e/L)\omega}.$$

Detaliind calculele se constată că avem:

$$|Q_1(j\omega)| = \frac{1/LC_e}{\sqrt{\left(-\omega^2 + 1/LC_e\right)^2 + (R_e/L)^2 \omega^2}},$$

$$\arg Q_1(j\omega) = -\arg\left(\left(-\omega^2 + 1/LC_e\right) + j(R_e/L)\omega\right)$$

$$= \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{(R_e/L)\omega}{-\omega^2 + 1/LC_e}, & \omega \in \left[0, 1/\sqrt{LC_e}\right] \\ -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{(R_e/L)\omega}{\omega^2 - 1/LC_e}, & \omega \in \left(1/\sqrt{LC_e}, \infty\right) \end{cases}$$

şi respectiv:

$$|Q_2(j\omega)| = \frac{\omega/L}{\sqrt{\left(-\omega^2 + 1/LC_e\right)^2 + (R_e/L)^2 \omega^2}},$$

$$\arg Q_1(j\omega)=\frac{\pi}{2}-\arg\left(\left(-\omega^2+1/LC_e\right)+j\left(R_e/L\right)\omega\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\left(R_e/L\right)\omega}{-\omega^2+1/LC_e}, & \omega\in\left[0,1/\sqrt{LC_e}\right]\\ -\operatorname{arctg}\dfrac{\left(R_e/L\right)\omega}{\omega^2-1/LC_e}, & \omega\in\left(1/\sqrt{LC_e},\infty\right).\end{cases}$$

Privite prin prisma exprimării generale de forma (2.4.53), aceste detalii au următoarea semnificație fizică în raport cu regimul permanent sinusoidal care se instalează în funcționarea sistemului:

- Tensiunea pe condensator (prima variabilă de stare) este întotdeauna defazată în urmă față de tensiunea furnizată de sursă, indiferent de pulsația ω a semnalului de intrare. Acest defazaj este cu atât mai mare cu cât ω este mai mare.
- Curentul prin bobină (a doua variabilă de stare) este defazat înaintea semnalului de intrare pentru valori mici ale lui ω şi respectiv în urma semnalului de intrare, pentru valori mari ale lui ω.
- Pentru valori mari ale lui ω, atât amplitudinea tensiunii sinusoidale pe condensator $|Q_1(j\omega)|$, cât şi amplitudinea curentului sinusoidal prin bobină $|Q_2(j\omega)|$ sunt funcții monoton descrescătoare de ω.

Similar procedăm pentru a studia răspunsul forțat al ieşirii, utilizând funcția de transfer $G(s)$ calculată în Exemplul 2.4.5., pe baza căreia obținem:

$$G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}=\left.\frac{s^2}{s^2+(R_e/L)s+(1/LC_e)}\right|_{s=j\omega}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2+(1/LC_e)+j(R_e/L)\omega}.$$

Aşadar, semnalul de ieşire va tinde către componenta de regim permanent definită prin (2.4.55):

$$y_P(t)=\left|G(j\omega)\right|\sin\left(\omega t+\arg G(j\omega)\right),$$

în care

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(-\omega^2+(1/LC_e)\right)^2+(R_e/L)^2\omega^2}},$$

$$\arg G(j\omega)=\arg(-\omega^2)-\arg\left[\left(-\omega^2+1/LC_e\right)+j\left(R_e/L\right)\omega\right]=$$

$$=\begin{cases}\pi-arctg\dfrac{\left(R_e/L\right)\omega}{-\omega^2+1/LC_e}, & \omega\in\left[0,1/\sqrt{LC_e}\right]\\ \dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{\left(R_e/L\right)\omega}{\omega^2-1/LC_e}, & \omega\in\left(1/\sqrt{LC_e},\infty\right).\end{cases}$$

Următoarele comentarii de natură fizică pot fi acum făcute cu privire la regimul permanent sinusoidal al semnalului de ieşire:

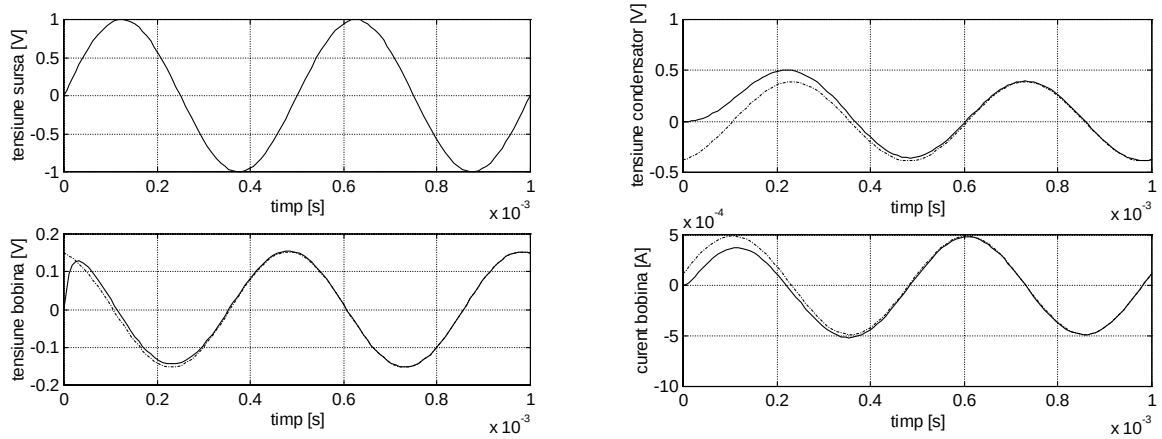
- Tensiunea pe bobină va fi defazată înaintea tensiunii furnizată de sursa de alimentare, indiferent de valoarea pulsației ω.

- Pentru valori mari ale lui ω, tensiunea pe bobină va fi aproximativ egală cu cea furnizată de sursa de alimentare, întrucât $|G(j\omega)| \cong 1$ şi $\arg G(j\omega) \cong 0$.

În final, recomandăm cititorului să aprofundeze aspectele fizice prezentate în acest exemplu, prin coroborarea informaţiilor de factură teoretică din acest exemplu cu ilustrările grafice din următoarele două exemple.

Exemplul 2.4.10.

Studiem răspunsul forţat la semnal de intrare sinusoidal pentru sistemul din Exemplul 2.4.1., în care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv). Sursa de tensiune furnizează semnalul $u(t) = \sin(4000\pi t)$, iar condiţiile iniţiale sunt nule pe condensator şi bobină. Valorile considerate pentru parametri sunt $R_e = 2000\Omega$, $L = 0.025$H, $C_e = 10^{-7}$ F.



(a) **(b)**

Fig. 2.4.6. Comportarea sistemului considerat în Exemplul 2.4.10 la un semnal de intrare sinusoidal de amplitudine 1V şi frecvenţă 2000Hz. Cu linie întreruptă este reprezentată comportarea de regim permanent sinusoidal către care tinde semnalul respectiv, după expirarea regimului tranzitoriu: **(a)** evoluţia semnalului de intrare (fereastra superioară) şi a semnalului de ieşire (fereastra inferioară); **(b)** evoluţia variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară)

Comportarea sistemului este ilustrată grafic astfel: în fig. 2.4.6.(a) este prezentată evoluţia semnalului de intrare (fereastra superioară) şi a semnalului de ieşire (fereastra inferioară), iar în fig. 2.4.6.(b) este prezentată evoluţia variabilelor de stare. Linia întreruptă este utilizată pentru a trasa regimul permanent sinusoidal către care tind semnalul de ieşire şi variabilele de stare. Se observă că regimul tranzitoriu durează mai puţin de 10^{-3}s, constatare la care s-a ajuns şi în cazul răspunsului la semnal de intrare treaptă din Exemplul 2.4.7., pentru aceleaşi valori ale parametrilor R_e, L, C_e.

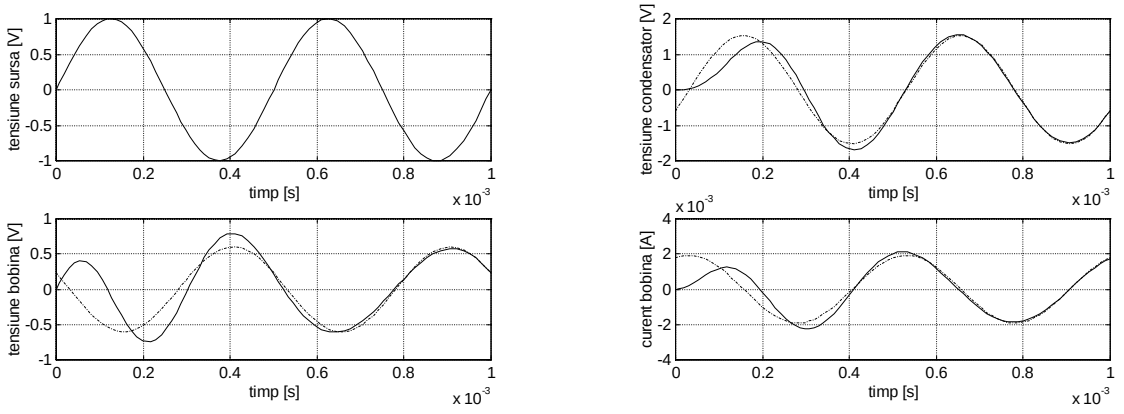
Din reprezentările grafice, rezultă următoarele defazaje ale semnalelor de interes în raport cu tensiunea furnizată de sursă:

- tensiunea pe condensator este defazată în urmă cu aproximativ 65^o;
- curentul pe bobină este defazat înainte cu aproximativ 10^o;
- tensiunea pe bobină este defazată înainte cu aproximativ 100^o.

Exemplul 2.4.11.

Ne plasăm în condiţiile Exemplului 2.4.10, cu singura deosebire că pentru rezistenţă

vom considera o valoare de 10 ori mai mică, adică $R_e = 200\ \Omega$. Comportarea sistemului este ilustrată grafic prin fig. 2.4.7., unde în (a) este prezentată evoluţia semnalului de intrare (fereastra superioară) şi a semnalului de ieşire (fereastra inferioară), iar în (b) este prezentată evoluţia variabilelor de stare.



(a) **(b)**

Fig. 2.4.7. Comportarea sistemului considerat în Exemplul 2.4.11 la un semnal de intrare sinusoidal de amplitudine 1V şi frecvenţă 2000Hz.. Cu linie întreruptă este reprezentată comportarea de regim permanent sinusoidal către care tinde semnalul respectiv, după expirarea regimului tranzitoriu: **(a)** evoluţia semnalului de intrare (fereastra superioară) şi a semnalului de ieşire (fereastra inferioară); **(b)** evoluţia variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară)

Linia întreruptă este utilizată pentru a trasa regimul permanent sinusoidal, către care tinde semnalul de ieşire şi variabilele de stare. Se observă că regimul tranzitoriu durează aproximativ 10^{-3}s, constatare la care s-a ajuns şi în cazul răspunsului la semnal de intrare treaptă din Exemplul 2.4.8., pentru aceleaşi valori ale parametrilor R_e, L, C_e

Din reprezentările grafice rezultă următoarele defazaje ale semnalelor de interes în raport cu tensiunea furnizată de sursă:

- tensiunea pe condensator este defazată în urmă cu aproximativ 15^o;
- curentul prin bobină este defazat înainte cu aproximativ 70^o;
- tensiunea pe bobină este defazată înainte cu aproximativ 160^o.

2.5. Extinderi ale modelelor liniare intrare-stare-ieşire

În această secţiune prezentăm două tipuri de modele liniare care extind, într-o manieră naturală, conceptul de reprezentare intrare-stare-ieşire discutat în secţiunea precedentă. Necesitatea unei atare extinderi este ilustrată prin exemple de sisteme fizice pentru care descrierea matematică a dinamicii nu poate fi abordată numai pe seama cunoştinţelor prezentate în secţiunea anterioară.

2.5.1. Sisteme cu mai multe intrări şi/sau mai multe ieşiri (Sisteme multivariabile)

Până în acest punct al discuţiei noastre asupra modelelor cauzale, am considerat că sistemele fizice luate în discuţie sunt excitate de o singură mărime cauză (semnal de intrare) şi furnizează o singură mărime efect (semnal de ieşire). În multe situaţii practice însă ne confruntăm cu sisteme fizice care pot avea mai multe mărimi cauză şi/sau mai multe mărimi efect. Modelele de tip reprezentare de stare sunt capabile să descrie funcţionarea unor atare sisteme, prin generalizarea ecuaţiilor vectorial matriceale (2.4.3) şi (2.4.4) de aşa manieră încât $\mathbf{u}(t)$ şi/sau $\mathbf{y}(t)$ să fie funcţii vectoriale cu m şi respectiv p componente:

$$\boldsymbol{u}(t):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}^m,\quad \boldsymbol{y}(t):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}^p. \tag{2.5.1}$$

Astfel *ecuaţia stării* (2.4.3) se va generaliza sub forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))+\mathbf{B}\mathbf{u}(t);\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0, \tag{2.5.2}$$

iar *ecuaţia ieşirii* (2.4.4) se va generaliza sub forma:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{2.5.3}$$

în care matricele coeficienţilor au dimensiuni adecvate:

$$\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ \mathbf{B}\in\mathbf{R}^{n\times m},\ \mathbf{C}\in\mathbf{R}^{p\times n},\ \mathbf{D}\in\mathbf{R}^{p\times m}. \tag{2.5.4}$$

În mod corespunzător, se va generaliza expresia (2.4.10) a răspunsului complet pe stare:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau). \tag{2.5.5}$$

Ambii termeni ai sumei din (2.5.5) îşi păstrează aceeaşi semnificaţie (componentă de regim liber şi, respectiv, componentă de regim forţat) ca şi în paragraful 2.4.2 unde sistemul a fost considerat cu o singură mărime de intrare, adică $u(t):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$. Înlocuirea lui $\mathbf{x}(t)$ dat de (2.5.5) în ecuaţia ieşirii (2.5.2) va furniza *răspunsul complet pe ieşire*, care generalizează situaţia discutată în paragraful 2.4.2.

Elementele de analiză a dinamicii de regim liber şi de regim forţat prezentate anterior, în paragrafele 2.4.3 şi, respectiv, 2.4.4, pentru sisteme cu o singură mărime de intrare şi o singură mărime de ieşire, se generalizează, în mod natural, pentru sistemele cu mai multe intrări şi/sau mai multe ieşiri. Dezvoltările teoretice privind răspunsul forţat la semnale standard devin însă mult mai ample în cazul sistemelor cu mai multe mărimi de intrare, motiv pentru care nu vom intra în atare detalii. Singurul aspect la care ne vom opri îl constituie modelul intrare-ieşire de tip matrice de transfer, care extinde conceptul de funcţie de transfer, introdus în subparagraful 2.4.4.2. Astfel, aplicând transformata Laplace (pentru condiţii iniţiale nule – specifice regimului forţat) ecuaţiei stării (2.5.2), obţinem:

$$\mathbf{X}_f(s)=(\mathbf{sI}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \tag{2.5.6}$$

care generalizează (2.4.27), iar $\mathbf{X}_f(s)$ se înlocuieşte în ecuaţia ieşirii (2.5.3), de unde rezultă:

$$\mathbf{Y}_f(s)=[\mathbf{C}(\mathbf{sI}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{U}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \tag{2.5.7}$$

care generalizează (2.4.30). Matricea cu p linii şi m coloane:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\,, \tag{2.5.8}$$

care generalizează scrierea (2.4.31), poartă denumirea de *matrice de transfer* asociată reprezentării de stare multivariabile (2.5.2) şi (2.5.3). Fiecare componentă $G_{ij}(s)$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, m$ a matricei $\mathbf{G}(s)$ este o funcţie scalară (strict proprie dacă $d_{ij} \neq 0$, sau proprie dacă $d_{ij} = 0$, unde d_{ij} notează elementele matricei **D**), care are drept numitor (înainte de efectuarea unor eventuale simplificări) polinomul caracteristic $\Delta(s)$ al matricei **A**, dat de (2.4.29). Fiecare componentă $G_{ij}(s)$ trebuie interpretată ca o funcţie de transfer (în accepţiunea discutată în subparagraful 2.4.4.2) ce descrie legătura dintre variabila de ieşire $y_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$, şi variabila de intrare $u_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, în maniera operaţională:

$$\mathsf{L}\,\{y_i(t)\} = G_{ij}(s)\mathsf{L}\,\{u_j(t)\}, \tag{2.5.9}$$

atunci când toate celelalte variabile de intrare sunt nule, adică:

$$u_1(t) = \ldots u_{j-1}(t) = u_{j+1}(t) = \ldots = u_m(t) = 0, \quad t \in [0, \infty)\,. \tag{2.5.10}$$

Exemplul 2.5.1.

Considerăm sistemul termic a cărui structură şi funcţionare sunt prezentate în secţiunea 7.1. (incintă încălzită cu radiator) din Capitolul 7. Conform fig. 7.1.1, asupra sistemului acţionează drept mărimi de intrare fluxul termic $P_r(t)$ produs de rezistorul electric şi temperatura mediului exterior T_m. Drept mărimi de ieşire se consideră temperatura $T_r(t)$ a radiatorului şi temperatura $T(t)$ a incintei.

Alegem drept variabile de stare mărimi ce caracterizează acumulările de energie din sistem, şi anume:

- cantitatea de căldură din radiator (notată cu Q_2);
- cantitatea de căldură din incintă (notată cu Q_6).

Precizăm că temperaturile luate în discuţie sunt raportate la o aceeaşi temperatură de referinţă (care convenţional poate fi considerată nulă – fără a i se atribui însă semnificaţia fizică corespunzătoare lui zero Kelvin).

Aplicând legile fizicii, se ajunge la o reprezentare intrare-stare-ieşire, de forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_{t1}C_{t1}} & \dfrac{1}{R_{t1}C_t} \\ \dfrac{1}{R_{t1}C_{t1}} & -\dfrac{1}{C_t}\left(\dfrac{1}{R_{t1}} + \dfrac{1}{R_t}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ T_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} T_r \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_{t1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_6 \end{bmatrix}.$$

Ne limităm numai la prezentarea formei finale a modelului intrare-stare-ieşire aferent sistemului considerat şi nu detaliem maniera de construcţie a acestui model, deoarece o atare detaliere face obiectul secţiunii 7.1., prin aplicarea metodei bond-graph.

Modelul obținut este de forma (2.5.2) şi (2.5.3) cu $n = 2$, $m = 2$, $p = 2$.

Prin aplicarea relației (2.5.8), se obține matricea de transfer:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\left(\frac{1}{R_{t1}C_{t1}}+\frac{1}{R_{t1}C_t}+\frac{1}{R_tC_t}\right)s+\frac{1}{R_tR_{t1}C_tC_{t1}}}\begin{bmatrix}\frac{1}{C_{t1}}\left[s+\frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{R_{t1}}+\frac{1}{R_t}\right)\right] & -\frac{1}{R_tR_{t1}C_tC_{t1}}\\ \frac{1}{R_tC_tC_{t1}} & \left(s+\frac{1}{R_{t1}C_{t1}}\right)\frac{1}{R_tC_t}\end{bmatrix}.$$

Comentarii asupra dinamicii sistemului se găsesc în secțiunea 7.1. din Capitolul 7.

2.5.2. Reprezentări intrare-stare-ieşire în formă implicită (Modele de tip descriptor)

Modelele intrare-stare-ieşire care au fost discutate până în prezent se bucură de proprietatea că derivata fiecărei variabile de stare $\dot{x}_i(t),\ i=1,...,n$ putea fi exprimată drept o combinație liniară de variabilele de stare şi variabilele de intrare (a se vedea ecuația de stare (2.5.2) din cazul multivariabil). Există însă situații când o atare explicitare a derivatei fiecărei mărimi de stare $\dot{x}_i(t),\ i=1,...,n$, nu este posibilă, fapt ce conduce la necesitatea unei *descrieri matematice de tip implicit*, în care ecuația de stare are forma:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,. \tag{2.5.11}$$

În (2.5.11), variabilele **u**, **x**, şi matricele **A**, **B** îşi păstrează semnificația din ecuația (2.5.2), iar **E** este o matrice pătratică de acelaşi ordin cu dimensiunea vectorului **x**. Este evident că descrierea implicită (2.5.11) o generalizează pe cea explicită (2.5.2) în sensul că în ecuația de stare (2.5.11), prin prezența matricei **E** în membrul stâng, combinații liniare ale derivatelor variabilelor de stare (şi nu fiecare derivată în mod explicit) pot fi exprimate drept combinații liniare ale variabilelor de stare şi de intrare. Acest aspect atrage şi denumirea de reprezentare (model) de stare implicit, sau, în unele texte, de tip descriptor.

Dacă matricea **E** este *nesingulară*, atunci ecuația de stare (2.5.11) cu exprimare implicită poate fi adusă imediat la forma explicită (2.5.2), prin simpla înmulțire la stânga cu $\mathbf{E}^{-1}$. Prin urmare, reprezentările de tip implicit îşi justifică individualitatea ca entități utilizate în modelare în situația când matricea **E** este singulară şi explicitarea sub forma (2.5.2) nu este posibilă. În această situație, sistemul cu ecuația de stare (2.5.11) mai este referit, ca obiect matematic şi drept "sistem singular".

Analiza dinamicii sistemelor singulare se bazează pe un fundament teoretic propriu, a cărui detaliere ar depăşi cadrul propus pentru lucrarea de față. Cititorului interesat în această problematică îi este recomandată monografia (Dai, 1989).

În cele ce urmează, paragraful curent se va ocupa de unele particularități de natură fizică pe care le pune în evidență un model bazat pe ecuația de stare (2.5.11). Pentru aceasta, să presupunem că ecuația de stare (2.5.11) utilizează $n \in \mathbf{N}$ variabile de stare $(x \in \mathbf{R}^n)$, iar matricea **E** are rangul q (rg **E** = q). Rezultă că din cele n linii ale matricei **E**, doar q sunt liniar independente şi, drept consecință, întotdeauna poate fi găsită o matrice $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ care să conducă la următoarea partiționare

$$\mathbf{QE} = \widetilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_{11} & \widetilde{\mathbf{E}}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{2.5.12}$$

Astfel, prin înmulțirea ecuației de stare (2.5.11) la stânga cu matricea **Q** vom obține;

$$\widetilde{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{u},\ \widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{QE},\ \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{QA},\ \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{QB}, \tag{2.5.13}$$

conducând, în baza lui (2.5.12), la scrierea partiționată:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_{11} & \widetilde{\mathbf{E}}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^1 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_{11} & \widetilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \widetilde{\mathbf{A}}_{21} & \widetilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \tag{2.5.14}$$

în care variabilele de stare își păstrează semnificația inițială din (2.5.11). Din punct de vedere matematic, modelul (2.5.14) este *un sistem liniar diferențialo-algebric*, în formă implicită, întrucât primele q ecuații sunt ecuații diferențiale liniare, iar ultimele $n-q$ ecuații sunt ecuații algebrice liniare.

Partiționarea pusă în evidență în (2.5.14) arată că variabilele de stare prezintă o *dependență a valorilor instantanee*, în care nu apar derivatele, de forma:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{x}^1(t) + \widetilde{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{x}^2(t) + \widetilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) = 0, \quad \forall\ t \in \mathbf{R}_+. \tag{2.5.15}$$

Această constatare ne arată că în reprezentarea de stare singulară, o parte din variabilele de stare pot fi exprimate în funcție de celelalte variabile de stare și de mărimile de intrare, conducând la o reducere a ordinului modelului, conținând numai așa-numitele "variabile de stare independente". Astfel, vom putea elimina din model un număr de "variabile de stare în exces" tocmai datorită faptului că în descrierea matematică ne putem dispensa de prezența lor.

În acest punct al discuției noastre, facem precizarea extrem de importantă că argumentele folosite pentru a semnala existența variabilelor de stare în exces au fost de pură sorginte matematică, pornind de la singularitatea matricei **E** din ecuația de stare cu scriere generică (2.5.11). În procesul concret de construire a unui model, cunoașterea detaliată a contextului fizico-tehnic furnizează informații suplimentare privind dependența instantanee dintre variabilele de stare de forma (2.5.15). Cu alte cuvinte, în majoritatea cazurilor, există criterii care permit desemnarea, de la bun început, a variabilelor în exces. Așadar, aceste variabile pot fi privite ca ocupând poziția $\mathbf{x}^2$ în partajarea $\mathbf{x} = \left[(\mathbf{x}^1)^T (\mathbf{x}^2)^T\right]^T$ a vectorului de stare, însemnând totodată că variabilele independente sunt grupate pe poziția $\mathbf{x}^1$. Pe de altă parte, posibilitatea *explicitării din rațiuni fizice* a variabilelor în exces în funcție de variabilele independente, conduce la concluzia că (2.5.15) poate fi rescris sub forma:

$$\mathbf{x}^2(t) = -\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{x}^1(t) - \widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t). \tag{2.5.16}$$

În (2.5.16), inversabilitatea lui $\widetilde{\mathbf{A}}_{22}$ este asigurată de însăși procedura de explicitare.

Egalitatea (2.5.16) permite revenirea în (2.5.14) cu scopul de a înlocui variabilele în exces $\mathbf{x}^2$:

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{11}\dot{\mathbf{x}}^1 + \widetilde{\mathbf{E}}_{12}\left(-\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}\dot{\mathbf{x}}^1 - \widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_2\dot{\mathbf{u}}\right) = \widetilde{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{x}^1 + \widetilde{\mathbf{A}}_{12}\left(-\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{x}^1 - \widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}\right) + \widetilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \tag{2.5.17}$$

în care efectuăm următoarea grupare, spre a evidenția prezența numai a variabilelor de stare independente și a mărimilor de intrare:

$$\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{11}-\widetilde{\mathbf{E}}_{12}\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}\right)\dot{\mathbf{x}}^1=\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{11}-\widetilde{\mathbf{A}}_{12}\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}\right)\mathbf{x}^1+ \\ +\left(-\widetilde{\mathbf{A}}_{12}\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_2+\widetilde{\mathbf{B}}_1\right)\mathbf{u}+\widetilde{\mathbf{E}}_{12}\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_2\dot{\mathbf{u}}. \tag{2.5.18}$$

Se observă imediat că în (2.5.18) apar nu numai semnale de intrare, ci şi derivatele acestora, drept consecinţă a înlocuirii lui $\dot{\mathbf{x}}^2(t)$ cu expresia rezultată prin derivarea egalităţii (2.5.16).

Dacă matricea $\widetilde{\mathbf{E}}_{11}-\widetilde{\mathbf{E}}_{12}\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}$ este inversabilă, atunci (2.5.18) poate fi adusă la forma explicită:

$$\dot{\mathbf{x}}^1=\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}^1+\overline{\mathbf{B}}_0\mathbf{u}+\overline{\mathbf{B}}_1\dot{\mathbf{u}}\,. \tag{2.5.19}$$

Aceasta ne arată că reprezentarea de stare de tip singular conduce la *generalizarea reprezentării explicite de stare*, în care sunt prezente şi derivatele de ordinul I ale semnalelor de intrare. Astfel, în cazul unui sistem singular având ecuaţia de stare în *scriere implicită* (2.5.11), vom putea construi un model intrare-stare-ieşire cu *scriere explicită* cu ecuaţia de stare:

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}=\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{B}}_0\mathbf{u}+\overline{\mathbf{B}}_1\dot{\mathbf{u}}\,, \tag{2.5.20}$$

care generalizează (2.5.2) şi cu *ecuaţia de ieşire*:

$$\mathbf{y}=\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{D}}_0\mathbf{u}+\overline{\mathbf{D}}_1\dot{\mathbf{u}}\,, \tag{2.5.21}$$

care generalizează (2.5.3). În ecuaţiile (2.5.20) şi (2.5.21) vectorul $\overline{\mathbf{x}}$ colectează toate variabilele de stare independente.

Referitor la ecuaţia ieşirii (2.5.21), subliniem faptul că introducerea termenului ce conţine derivatele semnalelor de intrare $\dot{\mathbf{u}}(t)$ este absolut naturală, atâta vreme cât prezenţa unui atare termen se dovedeşte necesară în ecuaţia stării (2.5.20). Privind lucrurile mai în detaliu, constatăm că explicitarea drept semnal de ieşire a unui semnal oarecare din funcţionarea sistemului ar necesita includerea unui termen $\dot{\mathbf{x}}(t)$ în ecuaţia ieşirii. Dar $\dot{\mathbf{x}}(t)$ poate fi înlocuit în baza ecuaţiei de stare (2.5.20), conducând la (2.5.21) în care apare termenul $\dot{\mathbf{u}}(t)$, ce provine din (2.5.20). O manevră similară care l-ar înlocui pe $\dot{\mathbf{x}}(t)$ dat de (2.5.2) în ecuaţia ieşirii, nu ar mai contribui cu un termen în $\dot{\mathbf{u}}(t)$, ceea ce arată că exprimarea (2.5.3) este îndestulătoare pentru sistemele nesingulare.

Dacă matricea $\widetilde{\mathbf{E}}_{11}-\widetilde{\mathbf{E}}_{12}\widetilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{21}$ este singulară, atunci (2.5.18) va putea fi partiţionată după principiul iniţial aplicat lui (2.5.11) prin înmulţirea la stânga cu o matrice adecvat aleasă. Va rezulta o egalitate similară cu (2.5.14), dar care va conţine şi semnalul de intrare derivat, adică vom obţine o legătură între valorile instantanee ale variabilelor de stare, ale mărimilor de intrare şi ale derivatelor mărimilor de stare, asemănătoare cu (2.5.15), în care apare şi $\dot{\mathbf{u}}(t)$. Astfel, din (2.5.18) vor mai putea fi eliminate un număr de variabile de stare şi, drept efect, vor apărea derivatele de ordinul II ale semnalului de intrare.

Într-un număr finit de paşi, se va ajunge la posibilitatea exprimării derivatelor variabilelor de stare independente, întrucât într-o descriere de tipul (2.5.18), matricea coeficienţilor din membrul stâng va fi nesingulară. În acest caz, ecuaţia explicită de stare care generalizează pe (2.5.2) va avea forma:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{B}}_0\mathbf{u} + \overline{\mathbf{B}}_1\dot{\mathbf{u}} + \ldots + \overline{\mathbf{B}}_r\mathbf{u}^{(r)}. \tag{2.5.22}$$

La aceasta se va adăuga ecuația ieşirii

$$\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{D}}_0\mathbf{u} + \overline{\mathbf{D}}_1\dot{\mathbf{u}} + \ldots + \overline{\mathbf{D}}_r\mathbf{u}^{(r)}, \tag{2.5.23}$$

care generalizează ecuația (2.5.3) din situația reprezentărilor explicite de stare.

Majoritatea cazurilor de sisteme singulare întâlnite în practica modelării conduc la reprezentări explicite (2.5.22) şi (2.5.23) cu $r = 1$, adică la ecuațiile anterior obținute (2.5.20) şi (2.5.21). În aplicații reale, necesitatea utilizării unei valori $r > 1$ în (2.5.22) şi (2.5.23) poate apărea în descrierea funcționării unor circuite electrice cu un grad ridicat de complexitate.

Exemplul 2.5.2.

Considerăm sistemul mecanic a cărui structură şi funcționare sunt prezentate în Exemplul 5.5.2 din Capitolul 5, secțiunea 5.5. Conform fig. 5.5.6, asupra sistemului acționează o mărime de intrare $u(t)$ depinzând de greutățile aferente maselor m_a, m_b (constante) şi de forța $F(t)$ (variabilă) aplicată la extremitatea stângă a pârghiei. Drept mărime de ieşire $y(t)$ se consideră viteza masei m_b.

Alegem drept variabile de stare, mărimi ce caracterizează acumulările de energie din sistem, şi anume:

- viteza masei m_a (notată v_a);
- viteza masei m_b (notată v_b);
- forța dezvoltată în arcul din partea dreaptă a pârghiei (notată F_8).

Astfel, aplicând legile fizicii, se ajunge la o reprezentare de stare de tip implicit, de forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{b}m_a & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_a \\ \dot{v}_b \\ \dot{F}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & k_e & 0 \\ -1 & \frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ F_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

unde semnalul de intrare $u(t)$ este definit prin egalitatea:

$$u(t) = \frac{a}{b}m_a g - m_b g + \frac{a}{b}F(t),$$

în care $F(t)$ poate fi precizată prin diverse legi de evoluție în timp.

Nu detaliem construcția modelului de mai sus, întrucât Exemplul 5.5.2 prezintă integral această construcție, pe baza tehnicii bond-graph.

Se constată că ecuația de stare de mai sus este de forma (2.5.11) cu rg $\mathbf{E} = 2$, ceea ce ne determină să afirmăm că una din cele trei variabile de stare este în exces. Din examinarea ultimei linii a ecuației de stare în forma implicită, rezultă că este convenabil să desemnăm pe v_a drept variabilă în exces, fapt care permite particularizarea dependenței dintre valorile instantanee (2.5.15) prin egalitatea

$$-v_a(t)+\frac{a}{b}v_b(t)=0\,.$$

Determinarea lui $v_a(t)$ şi înlocuirea sa în ecuația de stare, conduce la următoarea ecuație de stare, în scriere explicită:

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_b\\ \dot{F}_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{m_b+(a/b)^2 m_a}\\ k_e & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_b\\ F_8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_b+(a/b)^2 m_a}\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

şi respectiv ecuația de ieşire:

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_b\\ F_8\end{bmatrix}.$$

Comparând modelul obținut cu ecuațiile în formă generică (2.5.22) şi (2.5.23) observăm absența termenilor în derivatele semnalului de intrare, fapt care se justifică, în cazul de față, prin absența lui $u(t)$ în legătura algebrică rezultată prin particularizarea relației (2.5.15).

Comentarii asupra dinamicii sistemului se găsesc în Exemplul 5.5.2.

2.6. Modele neliniare intrare-stare-ieşire

În numeroase cazuri, descrierile de tip liniar prezentate în capitolele precedente se dovedesc a furniza modele cu imprecizii destul de mari, fiindcă nu pot surprinde comportări eminamente neliniare. În acest sens, prin generalizarea reprezentărilor liniare intrare-stare-ieşire, au fost dezvoltate modelele ce urmează a fi prezentate în secțiunea de față. Pe lângă problematica aferentă utilizării modelelor neliniare se va aborda şi construirea aproximațiilor liniare, valabilă pentru variații mici ale semnalelor, considerate în jurul punctelor staționare de funcționare.

2.6.1. Reprezentări neliniare de stare

O reprezentare neliniară de stare, *invariantă în timp* are forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big),\qquad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0\,, \tag{2.6.1}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big), \tag{2.6.2}$$

unde:

- vectorul $\mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ notează vectorul variabilelor de stare;
- vectorul $\mathbf{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ notează vectorul variabilelor de intrare (continuu pe porțiuni);
- vectorul $\mathbf{y}(t)\in\mathbf{R}^p$ notează vectorul variabilelor de ieşire;

- $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ este o funcție continuă, global lipschitziană în raport cu $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$;
- $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ este o funcție continuă.

Ecuația diferențială vectorială (sau sistemul de ecuații diferențiale) (2.6.1) poartă denumirea de *ecuația stării* (sau a transferului intrare-stare). Ea reprezintă *extinderea în formulare neliniară* a cazului liniar cunoscut din paragraful anterior:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.6.3}$$

cu $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ şi $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

Ecuația algebrică (2.6.2) poartă denumirea de *ecuația ieşirii*. Ea reprezintă *extinderea în formulare neliniară* a cazului liniar cunoscut din:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{2.6.4}$$

cu $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p\times n}$ şi $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{p\times m}$.

Atragem atenția asupra faptului că *invarianța în timp* înseamnă că funcțiile *f* şi *g* din (2.6.1) şi (2.6.2) *nu depind explicit* de variabila temporală *t*. Cu alte cuvinte, funcțiile neliniare **f** şi **g** posedă coeficienți constanți (generalizând situația organizării matriceale, din cazul liniar (2.6.3) şi (2.6.4)).

Deşi descrierea neliniară de stare (2.6.1), reprezintă o generalizare a descrierii liniare de stare (2.6.3), tranziția cauzală intrare-stare nu poate fi exprimată analitic în cazul neliniar prin formule care să generalizeze relația (2.4.10) prezentată în cazul liniar. De fapt, problematica rezolvării sistemelor de ecuații diferențiale neliniare de forma (2.6.1) este mult mai complexă şi, în marea majoritate a situațiilor concrete, se recurge la metode numerice pentru determinarea funcției vectoriale necunoscute $\mathbf{x}(t)$ din (2.6.1).

Trebuie însă remarcat faptul că modul de clasificare a răspunsurilor (liber, forțat, complet) introdus în secțiunea 2.4 pentru reprezentările liniare intrare-stare-ieşire, îşi păstrează semnificația şi în cazul neliniar, deoarece, la nivel conceptual, această clasificare nu implică determinarea propriu-zisă a vectorului soluție $\mathbf{x}(t)$ din (2.6.1).

Astfel, dacă *toate mărimile de intrare sunt nule*, adică, în scriere vectorială $\mathbf{u}(t) = 0$, atunci sistemul evoluează în timp numai ca efect al *cel puțin unei condiții* (*stări*) *inițiale nenule*, în scriere vectorială $\mathbf{x}(0) \neq 0$ şi avem de a face cu răspunsul liber al sistemului, uzual notat $\mathbf{x}_l(t)$. Dacă *toate stările* (*condițiile*) *inițiale sunt nule*, în scriere vectorială $\mathbf{x}(0) \equiv 0$, atunci sistemul evoluează în timp numai ca efect al cel puțin unei *mărimi de intrare nenule*, în scriere vectorială $\mathbf{u}(t) \neq 0$ şi avem de a face cu *răspunsul forțat* al sistemului, uzual notat $\mathbf{x}_f(t)$. În cazul când cel puțin *o variabilă de stare* (*condiție*) *inițială este nenulă*, în scriere vectorială $\mathbf{x}(0) \neq 0$ şi *cel puțin o variabilă de intrare este nenulă*, în scriere vectorială $\mathbf{u}(t) \neq 0$, avem de a face cu *răspunsul complet* al sistemului.

Datorită neliniarității, *principiul superpoziției efectelor nu poate fi aplicat* pentru dinamica sistemelor neliniare. Cu alte cuvinte, dacă $\mathbf{x}(t)$ notează răspunsul complet pentru un anumit $\mathbf{x}(t) \neq 0$ şi un anumit $\mathbf{u}(t) \neq 0$, atunci egalitatea:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$$

nu este în general adevărată (spre deosebire de cazul sistemelor liniare).

Exemplul 2.6.1.

Ne plasăm în contextul sistemului mecanic din Exemplul 2.3.1, al secţiunii 2.3, cu singura deosebire că forţa elastică din resort prezintă o dependenţă neliniară în raport cu deformarea acestuia, de forma:

$$F_e = k_1 x + k_3 x^3, \qquad k_1, k_3 > 0 .$$

Rezultă că deplasarea punctului A va fi modelată prin ecuaţia diferenţială neliniară:

$$\gamma \dot{x}(t) + k_1 x(t) + k_3 x^3(t) = F(t),$$

care, scrisă în maniera:

$$\dot{x}(t) = (-k_1/\gamma) x(t) - (k_3/\gamma) x^3(t) + F(t)/\gamma ,$$

este un caz particular al reprezentării de stare (2.6.1) cu $n = 1$ şi $m = 1$.

Exemplul 2.6.2.

Considerăm sistemul mecanic a cărui structură şi funcţionare sunt prezentate în Exemplul 6.1.3 din Capitolul 6, secţiunea 6.1. Conform fig. 6.1.19, asupra sistemului acţionează mărimile de intrare: $u_1(t)$ egală cu cuplul motor $M_m(t)$ şi $u_2(t)$ egală cu forţa de frecare F. Drept mărime de ieşire $y(t)$ se consideră viteza $v(t)$ a pistonului.

Alegem următoarele variabile de stare:

- deplasarea unghiulară a manivelei (notată φ);
- viteza unghiulară a manivelei (notată ω).

Aplicând legile mecanicii, se ajunge la reprezentarea neliniară intrare-stare-ieşire:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = -\dfrac{mK(\varphi(t))\alpha(\varphi(t))}{J + mK^2(\varphi(t))}\omega^2(t) - \dfrac{FK^2(\varphi(t))}{\left(J + mK^2(\varphi(t))\right)\left|K(\varphi(t))\right|} + \dfrac{M_m(t)}{J + mK^2(\varphi(t))}, \end{cases}$$

$$v(t) = K(\varphi(t))\omega(t),$$

unde K şi α notează următoarele funcţii în variabila φ:

$K(\varphi) = -R\sin\varphi\left(1 + R\cos\varphi \Big/ \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}\right)$, ($K(\varphi) = K^{4,3}_{MTF}$ - cu notaţia de la Exemplul 6.1.3),

$$\alpha(\varphi) = \frac{dK}{d\varphi} = -R\cos\varphi - R^2\left(R^2\sin^4\varphi + l^2\cos 2\varphi\right)\cdot\left(l^2 - R^2\sin^2\varphi\right)^{-3/2}$$

Ne limităm numai la prezentarea formei finale a modelului intrare-stare-ieşire aferent sistemului considerat şi nu detaliem maniera de construcţie a acestui model, deoarece o atare detaliere face obiectul Exemplului 6.1.3, prin aplicarea metodei bond-graph.

Se constată imediat faptul că modelul obţinut este de forma (2.6.1) şi (2.6.2) şi nu admite o scriere liniară vectorial-matriceală de tipul (2.6.3) şi (2.6.4).

2.6.2. Liniarizarea reprezentărilor neliniare de stare. Modele liniare în mici variaţii

Toate sistemele fizice, pentru care se afirmă că pot fi construite modele liniare, prezintă, de fapt, o dinamică liniară numai în anumite domenii de funcţionare (uneori destul de restrânse). Cu alte cuvinte, dinamica de tip neliniar poate fi pusă în evidenţă în comportarea tuturor sistemelor fizice, cu precădere în situaţia când unele mărimi (variabile) cresc suficient de mult ca şi magnitudine. De exemplu, dacă luăm în discuţie comportarea resortului din structura sistemului mecanic din exemplul 2.3.1, dependenţa liniară dintre forţă şi deplasare nu mai rămâne valabilă pentru alungiri sau comprimări mari ale resortului. Mai mult chiar, este evident pentru oricine că un experiment care ar deforma exagerat de mult resortul, prin aplicarea unei forţe inadecvat de mari, se poate finaliza prin distrugerea resortului.

În ciuda aspectelor menţionate mai sus, utilizarea modelelor liniare cunoaşte o sferă de aplicabilitate foarte largă, datorită uşurinţei în manevrare şi a cadrului analitic bine pus la punct ce permite studierea proprietăţilor (parte din această problematică fiind abordată şi în capitolul de faţă, în secţiunile 2.3 şi 2.4). Din acest motiv, chiar pentru sistemele care dovedesc o comportare neliniară pentru domenii mari de variaţie a variabilelor (semnalelor), se caută frecvent elaborarea de modele liniare, care să fie valide pentru variaţii mici ale semnalelor (raportate la un punct static de funcţionare). În atare situaţii, un astfel de model liniar mai este referit drept "model în mici variaţii", sau "model de semnal mic".

Un model liniar în mici variaţii se construieşte întotdeauna în raport cu un anumit regim staţionar, în vecinătatea căruia îşi păstrează valabilitatea. Regimului staţionar respectiv îi sunt asociate *valorile constante* ale semnalelor de intrare, stare şi ieşire, ceea ce înseamnă, de fapt, *un punct* în spaţiul multidimensional al semnalelor care nu-şi modifică coordonatele prin scurgerea timpului. De aceea, ca limbaj, se utilizează termenul de "punct static de funcţionare" pentru a desemna un set de condiţii de staţionaritate. Orice modificare semnificativă a condiţiilor de staţionaritate (adică a punctului static de funcţionare) conduce, inevitabil, la pierderea validităţii modelului liniar, de semnal mic.

În general, pentru construirea unui model liniar în mici variaţii, valabil în jurul unui punct static de funcţionare, *nu este necesar* a cunoaşte modelul neliniar, uneori denumit "model de semnal mare" care descrie comportarea sistemului fizic pentru excursii (variaţii) mari ale variabilelor (semnalelor). Dacă modelul neliniar de semnal mare *este cunoscut*, atunci pot fi construite modelele liniare "de semnal mic", pentru orice punct static de funcţionare, utilizând *procedeul de liniarizare* prezentat mai jos.

Considerăm un sistem fizic a cărui comportare neliniară este descrisă prin modelul intrare-stare-ieşire (2.6.1) şi (2.6.2). Spre deosebire de cerinţele minimale formulate în paragraful anterior asupra funcţiilor $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, acum vom lua în discuţie situaţia când ambele funcţii **f**, **g** sunt de clasă C^1 (derivabile, cu derivate continue).

Să presupunem că toate mărimile de intrare ale sistemului au *valori constante*, adică în scriere vectorială avem $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_S \in \mathbf{R}^m$. Dacă, după traversarea unui regim tranzitoriu, variabilele de stare tind asimptotic către valori constante, în scriere vectorială $\mathbf{x}_S \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y}_S \in \mathbf{R}^p$ atunci putem afirma că sistemul a ajuns într-un regim staţionar, căruia îi corespunde punctul static de funcţionare ($\mathbf{u}_S$, $\mathbf{x}_S$, $\mathbf{y}_S$). Întrucât în acest regim staţionar, modificările vectorului de stare sunt *practic nule*, putem considera $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$ în membrul drept al ecuaţiei

de stare (2.6.1), din care va rezulta faptul că punctul static de funcţionare se caracterizează prin egalitatea:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_S,\, \mathbf{u}_S) = 0\,. \tag{2.6.5}$$

Pe de altă parte, pentru **f**(**x**, **u**) putem scrie:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S,\mathbf{u}_S) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_S) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S) + \mathbf{r}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_S,\, \mathbf{u}-\mathbf{u}_S), \tag{2.6.6}$$

unde $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right), \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right)$ notează matricele Jacobian ale funcţiei vectoriale **f** în raport cu vectorii **x** şi respectiv **u**, iar componentele vectorului rezidual $\mathbf{r}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_S,\, \mathbf{u}-\mathbf{u}_S)$ (în limbajul propriu dezvoltărilor în serie) au ordinul de mărime dat de $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_S\|^2$, $\|\ \|$ notând o normă vectorială oarecare.

Definind matricele cu coeficienţi constanţi:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S\\ \mathbf{u}=u_S}}, \tag{2.6.7}$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} \tag{2.6.8}$$

şi introducând funcţiile (vectoriale):

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_S : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n, \tag{2.6.9}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_S : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^m, \tag{2.6.10}$$

putem scrie:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\big), \tag{2.6.11}$$

în care vom înlocui exprimarea lui **f**(**x**, **u**) dată de (2.6.6), ţinând totodată cont de egalitatea (2.6.5). Astfel obţinem descrierea:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{r}\big(\tilde{\mathbf{x}}(t),\, \tilde{\mathbf{u}}(t)\big), \tag{2.6.12}$$

care, exceptând cel de al treilea termen al sumei din membrul drept, este identică cu ecuaţia de stare (2.6.3) din cazul liniar.

În mod similar, vom proceda în raport cu ecuaţia ieşirii (2.6.2) a modelului neliniar intrare-stare-ieşire, observând că pentru punctul de funcţionare considerat, putem scrie egalitatea:

$$\mathbf{y}_S = \mathbf{g}(\mathbf{x}_S,\, \mathbf{u}_S)\,. \tag{2.6.13}$$

Totodată, apelăm la următoarea dezvoltare:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_S,\mathbf{u}_S) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_S) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S) + \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_S,\, \mathbf{u}-\mathbf{u}_S), \tag{2.6.14}$$

unde $\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right), \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right)$ notează matricele Jacobian ale funcției vectoriale **g** în raport cu vectorii **x** şi respectiv **u**, iar componentele vectorului rezidual $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_S, \mathbf{u}-\mathbf{u}_S)$ au ordinul de mărime dat de $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_S\|^2$, $\|\ \|$ notând o normă vectorială oarecare.

Definind matricele cu coeficienți constanți:

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} \tag{2.6.15}$$

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right)\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S}} \tag{2.6.16}$$

şi introducând funcția (vectorială):

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_S : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^p, \tag{2.6.17}$$

putem scrie:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\big) - \mathbf{y}_S, \tag{2.6.18}$$

în care vom înlocui exprimarea lui **g**(**x**, **u**) dată de (2.6.14), ținând totodată cont de egalitatea (2.6.13). Astfel obținem descrierea:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{r}}\big(\tilde{\mathbf{x}}(t),\ \tilde{\mathbf{u}}(t)\big), \tag{2.6.19}$$

care, exceptând cel de al treilea termen al sumei din membrul drept, este identică cu ecuația ieşirii (2.6.4) din cazul liniar.

Pentru mici variații $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ în jurul punctului static de funcționare ($\mathbf{u}_S$, $\mathbf{x}_S$, $\mathbf{y}_S$), termenii reziduali **r** şi $\bar{\mathbf{r}}$ din (2.6.12) şi respectiv (2.6.19) pot fi neglijați, datorită ordinului lor de mărime. Aşadar am construit un *model liniar în mici variații* sau un *model liniar de semnal mic*:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t), \tag{2.6.20}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(t), \tag{2.6.21}$$

asociat punctului de funcționare considerat. Faptul că acest model îşi păstrează valabilitatea doar într-o vecinătate a punctului static de funcționare rezultă imediat din (2.6.7), (2.6.8), (2.6.15), (2.6.16) care precizează modul de calcul al matricelor **A**, **B**, **C**, **D**.

Exemplul 2.6.3.

Se consideră sistemul hidraulic din fig. 2.6.1, format dintr-o conductă prevăzută cu un robinet prin care se alimentează rezervorul cu un debit $Q(t)$. Rezervorul este cilindric, suficient de înalt, având aria bazei S cunoscută. Rezervorul poate fi golit pe la bază printr-un alt robinet, cu debitul $Q_0(t)$. Înălțimea fluidului în vas se notează cu $H(t)$.

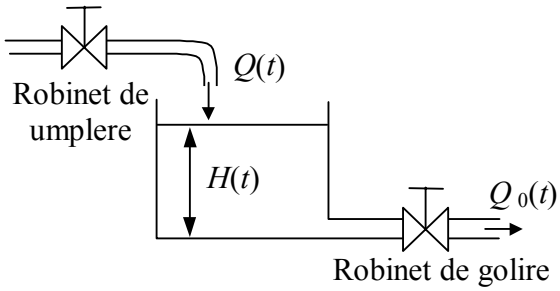


Fig. 2.6.1. Sistemul hidraulic cu doi robineți utilizat în Exemplul 2.6.2

În cazul general, curgerea prin robinetul de golire trebuie considerată ca turbulentă, situație pentru care putem scrie următoarea relație neliniară între valorile instantanee ale presiunii la baza rezervorului $P(t)$ şi debitul $Q_0(t)$:

$$P(t) = kQ_0^2(t),$$

unde k este un parametru necunoscut ca valoare (Ogata, 1990).

Ne propunem să modelăm funcționarea sistemului având drept *mărime de intrare* debitul de umplere $Q(t)$ şi drept *mărime de ieşire* înălțimea fluidului în vas $H(t)$. Întrucât sistemul conține un singur element care poate acumula energie (recte rezervorul), va fi necesară o singură variabilă de stare, pe care o alegem să coincidă cu mărimea de ieşire, adică $H(t)$.

Bilanțul volumetric pentru lichidul din rezervor, exprimat pe un interval de timp [0, t] conduce la egalitatea:

$$V(t) = SH(t) = SH(0) + \int_0^t \big(Q(\tau) - Q_0(\tau)\big)d\tau,$$

care, prin derivare furnizează ecuația diferențială:

$$S\dot{H}(t) = Q(t) - Q_0(t).$$

Dar, pe baza legăturii dintre valorile instantanee $P(t)$ şi $H(t)$:

$$P(t) = \rho g H(t),$$

utilizând relația precizată mai sus pentru curgerea turbulentă, putem exprima $Q_0(t)$ sub forma:

$$Q_0(t) = \sqrt{\frac{\rho g}{k}}\sqrt{H(t)},$$

care, prin înlocuire în ecuația diferențială, furnizează modelul neliniar:

$$S\dot{H}(t) + \sqrt{\frac{\rho g}{k}}\sqrt{H(t)} = Q(t).$$

Aceasta este, de fapt, o ecuație diferențială neliniară de ordinul I, cu coeficienți constanți, dar poate fi privită şi ca o ecuație de stare de forma (2.6.1) de ordinul I:

$$\dot{H}(t) = -\frac{1}{S}\sqrt{\frac{\rho g}{k}}\sqrt{H(t)} + \frac{1}{S}Q(t).$$

Cum variabila de ieşire este tocmai $H(t)$, înseamnă că putem adăuga direct ecuația ieşirii de forma (2.6.2) cu funcția g definită prin:

$$g\big(H(t), Q(t)\big) = H(t).$$

Am obținut astfel *un model neliniar de semnal mare*, care poate fi utilizat pentru a descrie funcționarea sistemului hidraulic, indiferent de magnitudinea mărimilor implicate. Descrierea este de *factură calitativă*, întrucât pentru parametrul k nu sunt cunoscute valorile numerice.

Dispunând de acest model neliniar, ne putem propune construirea uni *model liniar în mici variaţii* corespunzător oricărui punct static de funcţionare. Pentru determinarea unui punct static de funcţionare vom impune o anumită poziţie a robinetului de golire şi respectiv a robinetului de umplere care să permită instalarea unui regim staţionar, caracterizat prin valori egale ale debitelor de umplere şi golire, $Q_s = Q_{0s}$ şi, drept urmare, printr-o înălţime constantă a fluidului în vas H_s. Notând prin $h(t)$, $q(t)$ micile variaţii ale lui $H(t)$ şi respectiv $Q(t)$ în raport cu punctul staţionar, ecuaţia de stare liniarizată va avea forma:

$$\dot{h}(t) = Ah(t) + Bq(t)$$

cu

$$A = -\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{k}}\frac{1}{\sqrt{H}}\bigg|_{\substack{H=H_s \\ Q=Q_s}} = -\frac{1}{2S}\sqrt{\rho g}\,\frac{1}{\sqrt{\rho g H_s / Q_s^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{H_s}} = -\frac{1}{2S}\frac{Q_s}{H_s},$$

$$B = \frac{1}{S}\bigg|_{\substack{H=H_s \\ Q=Q_s}} = \frac{1}{S}.$$

Prin înmulţirea cu S, obţinem modelul de semnal mic sub forma ecuaţiei diferenţiale liniare:

$$S\dot{h}(t) + \frac{1}{2}\frac{Q_s}{H_s}h(t) = q(t),$$

care poate fi utilizat pentru mici variaţii ale înălţimii fluidului $h(t)$ şi ale debitului de umplere $q(t)$.

Exemplul 2.6.4.

Ne plasăm în contextul Exemplului 2.6.3, cu singura deosebire că modelul in mici variaţii va fi construit *direct*, fără a face apel la modelul de semnal mare dedus mai sus. Presupunând că ne situăm în acelaşi punct static de funcţionare, vom considera că *micile variaţii* pot fi privite ca producând *o curgere laminară* prin robinetul de golire, caracterizată prin relaţia:

$$p(t) = R_f q_0(t),$$

unde $p(t)$, $q_0(t)$ sunt notaţiile de semnal mic pentru presiunea la baza rezervorului şi respectiv debitul prin robinetul de golire, iar R_f desemnează rezistenţa fluidică a robinetului de golire (corespunzătoare unei curgeri laminare).

Bilanţul volumetric aferent micilor variaţii pe intervalul $[0, t]$ înseamnă:

$$S\,h(t) = \int_0^t \big(q(\tau) - q_0(\tau)\big)d\tau,$$

sau, scris drept ecuaţie diferenţială:

$$S\,\dot{h}(t) = q(t) - q_0(t).$$

Prin înlocuirea lui $q_0(t)$ în baza relaţiei de curgere laminară de mai sus, vom obţine:

$$S\,\dot{h}(t) + \frac{\rho g}{R_f}h(t) = q(t),$$

care este de aceeaşi formă cu ecuaţia diferenţială liniară de ordinul I găsită anterior, în Exemplul 2.6.2, prin procedeul de liniarizare.

Pentru a arăta că cele două modele de semnal mic coincid, trebuie să exprimăm coeficientul lui $h(t)$ în funcţie de valorile ce caracterizează punctul static de funcţionare. În acest scop, vom încerca să găsim semnificaţia lui R_f corespunzător curgerii laminare, pornind de la liniarizarea pentru mici variaţii a relaţiei ce caracterizează curgerea turbulentă prin robinetul de golire:

$$P = k\,Q_0^2 .$$

Astfel avem:

$$P = P_s + \left.\frac{dP}{dQ_0}\right|_{Q_0=Q_s} (Q_0 - Q_{0s}) + \tilde{r}(P_s, Q_s),$$

din care, neglijând termenul rezidual, evaluând derivata:

$$\left.\frac{dP}{dQ}\right|_{Q_0=Q_{0s}} = 2kQ_0\big|_{Q_0=Q_{0s}} = 2\frac{P}{Q_0^2}Q_0\Big|_{Q_0=Q_{0s}} = 2\frac{P_s}{Q_{0s}}$$

şi folosind scrierea în mici variaţii, rezultă relaţia:

$$p(t) = 2\frac{P_s}{Q_{0s}} q_0(t),$$

care descrie curgerea în regim laminar prin robinetul de golire. Cum, în regim staţionar funcţionează egalitatea $Q_{0s} = Q_s$, înseamnă că am găsit următoarea expresie pentru rezistenţa fluidică R_f:

$$R_f = 2\frac{P_s}{Q_s} = 2\rho g\frac{H_s}{Q_s},$$

cu care putem reveni în ecuaţia diferenţială construită mai sus, pentru a calcula coeficientul lui $h(t)$:

$$\frac{\rho g}{R_f} = \frac{1}{2}\frac{Q_s}{H_s}.$$

Constatăm aşadar identitatea celor două modele liniare de semnal mic, obţinute prin procedee diferite, precum şi faptul că ele îşi păstrează valabilitatea numai în jurul punctului static de funcţionare caracterizat prin valorile concrete H_s şi Q_s.

2.6.3. Reprezentări neliniare de stare în formă implicită

Modelele neliniare intrare-stare-ieşire (2.6.1) şi (2.6.2) la care ne-am referit până în prezent se caracterizează printr-o *formă explicită*, în sensul că în ecuaţia vectorială de stare (2.6.1), derivata fiecărei variabile de stare $\dot{x}_i(t)$, $i = 1,...,n$ poate fi exprimată prin intermediul funcţiei f_i numai în raport cu variabilele de stare şi cele de intrare. Există însă situaţii când o atare explicitare a fiecărei derivate $\dot{x}_i(t)$, $i = 1,...,n$ nu este posibilă, fapt ce conduce la necesitatea unei *descrieri matematice de tip implicit*, în care ecuaţia de stare are forma:

$$\mathbf{F}\big(\dot{\mathbf{x}}(t),\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)\big)=0,\ \ \mathbf{F}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n, \tag{2.6.22}$$

unde variabilele $\mathbf{u}(t)$ şi $\mathbf{x}(t)$ îşi păstrează semnificaţia din ecuaţia (2.6.1). Se observă, cu uşurinţă, că descrierea implicită (2.6.22) o generează pe cea explicită (2.6.1). Totodată, mai constatăm că (2.6.22) reprezintă o generalizare şi pentru descrierea liniară, de tip implicit (2.5.11), în sensul că punând condiţia suplimentară $\mathbf{F}$ liniară în ecuaţia (2.6.22), vom obţine exact (2.5.11).

Este absolut firesc faptul că, datorită neliniarităţii lui $\mathbf{F}$ din (2.6.22), tratarea matematică a acestei descrieri implicite nu poate urmări aceeaşi schemă ca în cazul liniar analizat în paragraful (2.5.2) al acestui capitol. Totuşi, în linii mari, maniera de *abordare practică a construirii modelului* poate fi privită prin analogie cu cazul liniar, fără a dispune, însă, de instrumentele specifice testării dependenţei liniare a variabilelor.

Astfel, dacă în dezvoltarea modelului nu apar dependenţe (liniare sau neliniare) între variabilele de stare şi dacă ecuaţia (2.6.22.) poate fi rezolvată în sens algebric în raport cu primele n variabile din definiţia funcţiei $\mathbf{F}$, atunci reprezentarea implicită (2.6.22) poate fi adusă la forma explicită (2.6.1). În situaţia contrară, când dependenţele (liniare sau neliniare) între variabilele de stare şi de intrare nu pot fi evitate pe parcursul construirii modelului, funcţiile derivate vor dispărea dintr-un număr de ecuaţii ale descrierii (2.6.22.), care din punct de vedere matematic, devine un *sistem neliniar diferenţialo-algebric*, în formă implicită:

$$\mathbf{F}_1\big(\dot{\mathbf{x}}(t),\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)\big)=0,\ \mathbf{F}_1:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^q, \tag{2.6.23-a}$$

$$\mathbf{F}_2\big(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)\big)=0,\ \mathbf{F}_2:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{n-q}, \tag{2.6.23-b}$$

În continuare ne vom ocupa *numai de cazul particular* când $\mathbf{F}_2$ din (2.6.23.b) permite explicitarea algebrică a $n-q$ variabile de stare în funcţie de celelalte q variabile de stare şi de mărimile de intrare, sub forma:

$$\mathbf{x}^2(t)=\mathbf{f}_2\big(\mathbf{x}^1(t),\ \mathbf{u}(t)\big),\ \ \mathbf{f}_2:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{n-q}, \tag{2.6.24}$$

în care $\mathbf{x}^1\in\mathbf{R}^q$ sunt referite drept variabile de stare *independente*, iar $\mathbf{x}^2\in\mathbf{R}^{n-q}$ drept variabile de stare *dependente*.

Drept urmare prin derivarea lui (2.6.24), derivatele variabilelor de stare dependente, vor putea fi exprimate, global, sub forma:

$$\dot{\mathbf{x}}^2(t)=\widetilde{\mathbf{f}}_2\big(\mathbf{x}^1(t),\ \dot{\mathbf{x}}^1(t),\ \mathbf{u}(t),\ \dot{\mathbf{u}}(t)\big),\ \ \widetilde{\mathbf{f}}_2:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{n\text{-}q}. \tag{2.6.25}$$

Aşadar, atât $\mathbf{x}^2(t)$ cât şi $\dot{\mathbf{x}}^2(t)$ pot fi înlocuite prin (2.6.24), şi, respectiv, (2.6.25) în expresia lui $\mathbf{F}_1$ din (2.6.23.a), rezultând

$$\widetilde{\mathbf{F}}_1\big(\ \dot{\mathbf{x}}^1(t),\mathbf{x}^1(t),\mathbf{u}(t),\ \dot{\mathbf{u}}(t)\big)=0,\ \ \widetilde{\mathbf{F}}_1:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^q. \tag{2.6.26}$$

Dacă (2.6.26), privit drept sistem algebric în primele q variabile, posedă soluţie unică, atunci se va ajunge la o reprezentare neliniară de stare, în *forma explicită*:

$$\dot{\mathbf{x}}^1(t)=\widetilde{\mathbf{f}}_1\big(\mathbf{x}^1(t),\ \mathbf{u}(t),\ \dot{\mathbf{u}}(t)\big),\ \ \widetilde{\mathbf{f}}_1:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^q. \tag{2.6.27}$$

Este evident că descrierea neliniară (2.6.27) o generalizează pe (2.6.1) considerată la începutul acestui paragraf, prin faptul că funcţia vectorială $\widetilde{\mathbf{f}}_1$ poate depinde şi de derivata vectorului de intrare $\dot{\mathbf{u}}(t)$.

În numeroase situaţii, prezintă interes determinarea tuturor componentelor vectorului de stare $\mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$, ceea ce înseamnă că după integrarea ecuaţiei diferenţiale vectoriale

(2.6.27) vom intra în posesia lui $\mathbf{x}^1(t) \in \mathbf{R}^q$ şi, *ulterior*, apelând la relaţiile algebrice exprimate vectorial prin (2.6.24), vom putea calcula şi $\mathbf{x}^2(t) \in \mathbf{R}^{n-q}$.

Determinarea tuturor componentelor lui $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ mai poate fi abordată şi prin procedeul descris mai jos, care furnizează simultan $\mathbf{x}^1(t) \in \mathbf{R}^q$ şi $\mathbf{x}^2(t) \in \mathbf{R}^{n-q}$. Astfel, pornind de la ecuaţiile vectoriale (2.6.23.a) şi (2.6.25), se construieşte sistemul:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{F}}_1\left(\dot{\mathbf{x}}^1(t), \dot{\mathbf{x}}^2(t), \mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \mathbf{u}(t)\right) = 0, \ \hat{\mathbf{F}}_1 : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q, \\ \hat{\mathbf{F}}_2\left(\dot{\mathbf{x}}^1(t), \dot{\mathbf{x}}^2(t), \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)\right) = \dot{\mathbf{x}}^2(t) - \tilde{\mathbf{f}}_2\left(\mathbf{x}^2(t), \dot{\mathbf{x}}^1(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)\right) = 0, \\ \qquad\qquad \hat{\mathbf{F}}_2 : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{n-q}, \end{cases} \tag{2.6.28}$$

care se urmăreşte a fi rezolvat, ca sistem algebric, în raport cu variabilele de pe primele două poziţii (adică, în raport cu $\dot{\mathbf{x}}^1(t) \in \mathbf{R}^q$ şi $\dot{\mathbf{x}}^2(t) \in \mathbf{R}^{n-q}$. Dacă această rezolvare este posibilă, înseamnă că vom putea realiza o exprimare de *tip explicit* de forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)\right), \ \mathbf{x} = \left[(\mathbf{x}^1)^T (\mathbf{x}^2)^T\right]^T \in \mathbf{R}^n, \ \hat{\mathbf{f}} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n. \tag{2.6.29}$$

Integrarea (analitică sau numerică) a ecuaţiei diferenţiale vectoriale (2.6.29) ne va furniza toate componentele vectorului de stare $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$.

O ilustrare a modului în care se determină vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$ atunci când sunt identificate şi variabile de stare dependente se găseşte în Exemplul 6.1.3 din secţiunea 6.1 a Capitolului 6. În acest exemplu, scrierea ecuaţiilor se bazează pe formalismul bond-graph.

2.7. Modele de tip diagramă bloc

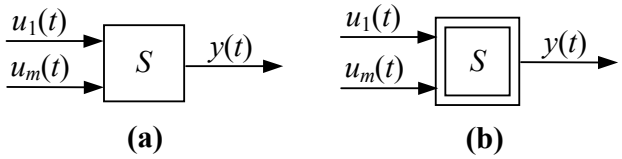
Acest tip de modele au drept caracteristică fundamentală faptul că descriu tranziţia cauzală intrare-ieşire printr-o *combinaţie de elemente grafice cu formulări analitice*, ce oferă un suport intuitiv de mare valoare pentru înţelegerea modului de *procesare a semnalelor* şi a *interacţiunilor între subsistemele componente* ale unui sistem fizic. Aspectele semnalate mai sus fac ca, în aplicaţiile tehnico-inginereşti, diagramele bloc să fie adesea preferate modelelor ce furnizează o descriere pur analitică a funcţionării sistemelor (în limbajul ecuaţiilor diferenţiale sau al reprezentărilor operaţionale cu ajutorul transformatei Laplace). Într-un atare context, în ultima perioadă de timp, mai multe firme producătoare de produse software pentru simulare, au dezvoltat simulatoare care operează direct cu modelele de tip diagramă bloc. Mai precizăm în acest punct (urmând ca detaliile să apară pe parcursul secţiunii curente) că modelele diagramă bloc sunt echivalente cu modelele pur analitice, existând procedee standard de conversie a unui tip de model în celălalt.

2.7.1. Diagrame bloc cu blocuri descrise în domeniul timp

Un bloc descris în domeniul timp se reprezintă grafic conform fig. 2.7.1 şi exprimă tranziţia cauzală:

$$y(t) = S\big(u_1(t),\ldots,u_m(t)\big) \tag{2.7.1}$$

de la semnalele de intrare ale blocului $u_1(t)$, …, $u_m(t)$ (marcate printr-o săgeată care intră în bloc), la semnalul de ieşire al blocului $y(t)$ (marcat printr-o săgeată care iese din bloc). În relaţia (2.7.1), simbolul S notează operatorul care, aplicat funcţiilor dependente de timp $u_1(t)$, …, $u_m(t)$ defineşte funcţia dependentă de timp $y(t)$. Uzual, este întrebuinţată următoarea convenţie de reprezentare grafică:



(a) **(b)**

Fig. 2.7.1. Reprezentarea grafică a unui bloc descris în domeniul timpului prin operatorul "*S*":
(a) operatorul *S* este liniar; **(b)** operatorul *S* este neliniar

a) Dacă S este un operator liniar, atunci conturul blocului se trasează printr-o singură linie, ca în fig. 2.7.1 (a);
b) Dacă S este un operator neliniar, atunci conturul blocului se trasează printr-o linie dublă, ca în fig. 2.7.1 (b).

În cele ce urmează vom prezenta blocurile cele mai frecvent utilizate în activitatea de modelare, însoţite de reprezentări grafice aferente.

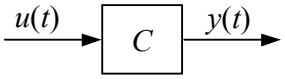


Fig. 2.7.2. Reprezentarea grafică a blocului de tip proporţional

Blocul de tip proporţional (fig. 2.7.2) – bloc liniar – posedă un singur semnal de intrare şi exprimă relaţia cauzală (discutată deja în secţiunea 2.1):

$$y(t) = Cu(t), \quad C \neq 0, \tag{2.7.2}$$

adică operatorul S se defineşte ca produs al semnalului de intrare cu o constantă nenulă, conform celor cunoscute de la modelul de tip proporţional din secţiunea 2.2.

Blocul de tip integrator (fig. 2.7.3) – bloc liniar – posedă o singură intrare şi exprimă relaţia cauzală (discutată deja în secţiunea 2.2):

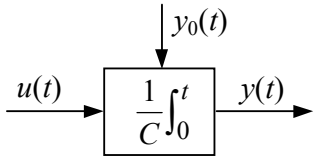


Fig. 2.7.3. Reprezentarea grafică a blocului de tip integrator

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t u(\tau)d\tau + y(0), \quad C \neq 0, \tag{2.7.3}$$

adică operatorul S calculează, o primitivă a lui $u(t)$, sau, echivalent are semnificaţia de soluţie a ecuaţiei diferenţiale (2.2.1) ce defineşte modelul de tip integrator, conform celor cunoscute din secţiunea 2.2. Condiţia iniţială $y(0)$ (existentă pe integrator) nu trebuie privită drept mărime de intrare (deşi, în simbolizarea grafică, îi este asociată o săgeată), deoarece ea este *o constantă* asociată momentului convenţional de timp $t = 0$, şi nu are semnificaţia de semnal (cu evoluţie în timp) procesat de blocul integrator. Atragem atenţia asupra faptului că, în unele situaţii, constanta $y(0)$ *poate lipsi din exprimarea grafică*, situaţie când există două modalităţi de interpretare, asociate contextului:

- Dacă interesul este legat numai de studierea răspunsului forţat, atunci se consideră $y(0) = 0$.
- Dacă interesul este legat de studierea răspunsului complet, va trebui subînţeleasă existenţa valorii $y(0) \neq 0$.

Blocul de tip derivator (fig. 2.7.4) – bloc liniar – posedă o intrare şi exprimă relaţia cauzală (discutată deja în secţiunea 2.2):

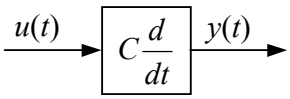


Fig. 2.7.4. Reprezentarea grafică a blocului de tip derivator

$$y(t) = C\frac{du(t)}{dt}, \qquad C \neq 0, \qquad (2.7.4)$$

adică operatorul *S* calculează derivata lui *u*(*t*), sau, echivalent, are semnificaţia de model derivator, conform celor cunoscute din secţiunea 2.2. În spiritul comentariilor de la modelul de tip derivator, recomandăm evitarea folosirii blocurilor derivatoare, ori de câte ori putem apela la alte soluţii pentru a descrie procesarea semnalelor.

Blocul de tip sumator (fig. 2.7.5) – bloc liniar – posedă cel puţin două intrări şi exprimă relaţia cauzală:

$$y(t) = \pm u_1(t) \pm \ldots \pm u_m(t), \qquad (2.7.5)$$

unde fiecare din semnalele $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ este precedat de unul din semnalele + sau –.

Astfel operatorul *S* se defineşte prin suma algebrică a semnalelor de intrare, în conformitate cu semnalul ataşat fiecăruia dintre ele. Reprezentările grafice din fig. 2.7.5.(a), (b) şi (c) sunt echivalente.

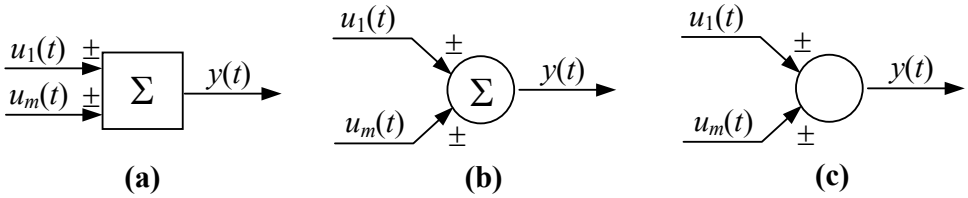


Fig. 2.7.5. Reprezentări grafice echivalente pentru blocul de tip sumator

Blocul de tip înmulţitor (fig. 2.7.6) – bloc neliniar – posedă cel puţin două intrări şi exprimă relaţia cauzală:

$$y(t) = u_1(t) \times \ldots \times u_m(t), \qquad (2.7.6)$$

adică operatorul *S* se defineşte ca produs al semnalelor de intrare. Reprezentările grafice din fig. 2.7.6 (a) şi (b) sunt echivalente.

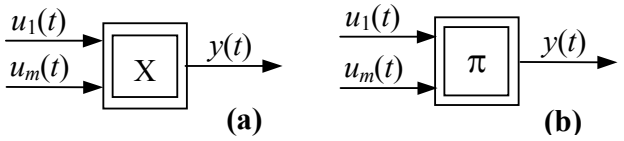


Fig. 2.7.6. Reprezentările grafice echivalente pentru blocul de tip înmulţitor

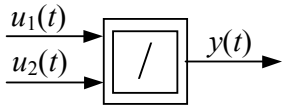


Fig. 2.7.7. Reprezentarea grafică a blocul de tip împărţitor

Blocul de tip împărţitor (fig. 2.7.7) – bloc neliniar – posedă două intrări şi exprimă relaţia cauzală:

$$y(t) = u_1(t)/u_2(t), \qquad u_2(t) \neq 0, \qquad (2.7.7)$$

adică operatorul *S* se defineşte ca raportul dintre semnalul de intrare cu indicele 1 şi semnalul de intrare cu indicele2 (în ipoteza neanulării acestuia din urmă).

Blocurile prezentate anterior se caracterizează prin aceea că operatorii *S* ce le corespund implementează relaţii cauzale simple, de bază, care nu pot fi descrise mai detaliat prin utilizarea altor operatori, mai simpli. Din acest motiv, construirea unor diagrame bloc care folosesc numai blocurile de mai sus asigură maximum de detaliere în modelarea procesării semnalelor şi a interacţiunii subsistemelor componente ale unui sistem dat.

Exemplul 2.7.1.

Se consideră sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1., cu reprezentarea schematizată din fig. 2.3.1. Modelul de tip ecuație diferențială de ordinul I, cu coeficienți constanți, care descrie funcționarea acestuia, poate fi retranscris sub forma:

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{\gamma}\left[-k_e x(t)+F(t)\right],\quad x(t_0)=x_0,$$

ceea ce înseamnă că $x(t)$ se poate exprima:

$$x(t)=\frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} w(\tau)d\tau+x(t_0),$$

unde am folosit notația $w(t)=-k_e x(t)+F(t)$.

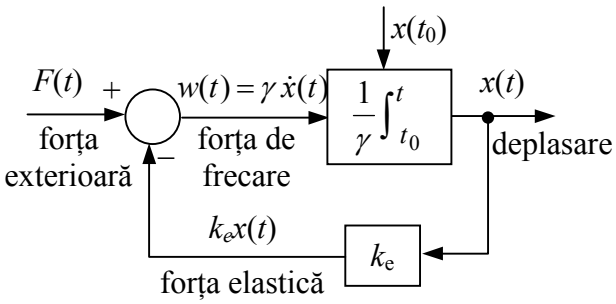


Fig. 2.7.8. Modelul de tip diagramă bloc al sistemului mecanic din Exemplul 2.7.1

Constatăm imediat că relația de mai sus care îl definește pe $x(t)$ este exact de forma (2.7.3), caracterizând un bloc integrator cu ieșirea $x(t)$ și intrarea $w(t)$. Pe de altă parte $w(t)$ poate fi privit ca ieșire a unui bloc sumator de tipul (2.7.5), cu intrările $+F(t)$ și $-k_e x(t)$. Dar semnalul $x(t)$ este deja disponibil în construcția noastră (ca ieșire a blocului integrator) și utilizarea lui drept intrare pentru un bloc proporțional de forma (2.7.2), cu factorul de proporționalitate k_e, va furniza semnalul $k_e x(t)$ la ieșirea blocului proporțional. Toate aceste relații cauzale evidențiate mai sus se regăsesc ca interpretare în modul de conectare a blocurilor ce alcătuiesc diagrama bloc din fig. 2.7.8. Remarcăm faptul că în construirea diagramei bloc au fost utilizate numai blocurile liniare elementare, de tipul celor introduse anterior.

Pentru fiecare semnal a fost precizată și semnificația concretă din cadrul problemei considerate, ceea ce permite studierea efectelor pentru fiecare tip de forță în parte. Se observă că forța elastică joacă rolul unei reacții inverse, negative pentru sistem, în sensul că cu cât forța exterioară prezintă variații mai mari, cu atât și forța elastică se modifică mai mult, apropierea valorică a celor două forțe conducând întotdeauna la reducerea vitezei $\dot{x}(t)$. Aceasta explică, de fapt, funcționarea stabilă a sistemului, cu deplasări limitate $x(t)$, situație care nu ar mai avea loc, dacă în diagrama bloc am înlocui semnul – de la sumator cu semnul + (însemnând o reacție inversă pozitivă).

Drept exercițiu, cititorul este invitat ca, utilizând această diagramă bloc, să comenteze evoluția semnalelor în cazul răspunsului forțat pentru intrare constantă și în cazul răspunsului liber al sistemului.

Procedeul de construire a diagramei bloc ilustrat în exemplul precedent pentru o descriere analitică de tip ecuație diferențială liniară de ordinul I se poate extinde pentru reprezentări intrare-stare-ieșire de ordinul n. Generalizarea constă în utilizarea câte unui bloc de tip integrator pentru fiecare variabilă de stare, variabila de stare constituind ieșirea blocului integrator. Conectarea blocurilor integratoare între ele se realizează prin blocuri de tip sumator și/sau blocuri de tip proporțional. Furnizăm detaliile necesare fixării acestor operațiuni prin intermediul exemplului următor.

Exemplul 2.7.2.

Se consideră sistemul electric din exemplul 2.4.1, cu reprezentarea grafică din fig. 2.4.1. Prima ecuație de stare:

$$\dot{u}_c(t) = \frac{1}{C_e} i_L(t), \qquad u_c(0) = u_{c0},$$

arată că $u_c(t)$ este ieşirea primului bloc integrator:

$$u_c(t) = \frac{1}{C_e}\int_0^t i_L(\tau)d\tau + u_c(0),$$

care va avea drept semnal de intrare a doua variabilă de stare, adică $i_L(t)$. A doua ecuație de stare:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}u_c(t) - \frac{R_e}{L}i_L(t) + \frac{1}{L}e(t), \quad i_L(0) = i_{L0},$$

arată că $i_L(t)$ este ieşirea celui de al doilea bloc integrator:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t \left[-u_c(\tau) - R_e i_L(\tau) + e(\tau)\right]d\tau + i_L(0),$$

ce va avea drept semnal de intrare ieşirea unui bloc sumator furnizând expresia integrandului din paranteza pătrată. Două din cele trei intrări ale sumatorului sunt chiar semnalele $u_c(t)$ şi $e(t)$; cea de a treia intrare a sumatorului se obține din semnalul $i_L(t)$, printr-un bloc proporțional R_e, conform modelului tip diagramă bloc din fig. 2.7.9.

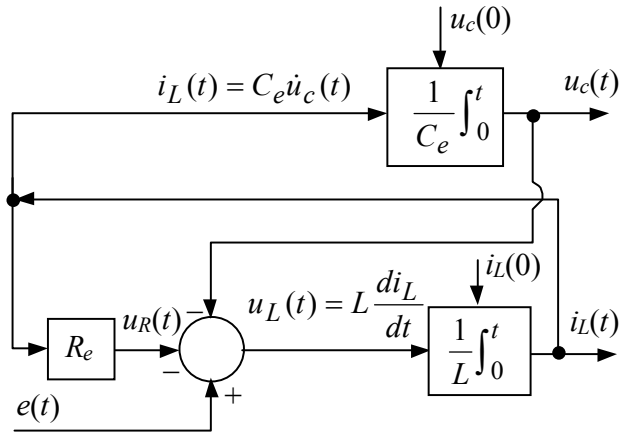


Fig. 2.7.9. Modelul de tip diagramă bloc al sistemului electric din Exemplul 2.7.2

Pentru ieşirea sistemului, considerăm cele patru cazuri, notate (i) – (iv) care au fost discutate în exemplul 2.4.1. În toate aceste cazuri, ieşirea este unul din semnalele existente în schema bloc, după cum urmează: (i) tensiunea pe condensator $u_c(t)$, (ii) curentul prin bobină $i_L(t)$, (iii) tensiunea pe rezistor $u_R(t)$, (iv) tensiunea pe bobină $u_L(t)$.

Până la acest punct, exemplele considerate au urmărit modul de construire a diagramelor bloc pentru sistemele cu comportare liniară, modelele astfel obținute conținând numai blocuri de tip liniar. În continuare vom exemplifica şi modul de utilizare a blocurilor neliniare pentru modelarea funcționării sistemelor cu dinamică neliniară.

Exemplul 2.7.3.

Se consideră sistemul hidraulic din Exemplul 2.6.2, cu reprezentarea schematizată din fig. 2.6.1. Mai întâi vom construi un model tip diagramă bloc pentru funcționarea sistemului în condiții de *semnal mare*, când curgerea prin robinetul de golire este turbulentă, pornind de la următoarea formă a modelului analitic:

$$\dot{H}(t) = -\frac{1}{S}\sqrt{\frac{\rho g}{k}}\sqrt{H(t)} + \frac{1}{S}Q(t), \qquad H(t_0) = H_0,$$

care a fost dedusă în Exemplul 2.6.2. Astfel, $H(t)$ se poate exprima:

$$H(t) = \frac{1}{S}\int_0^t w(\tau)d\tau + H(t_0),$$

unde am folosit notația $w(t) = -\sqrt{\rho g/k}\sqrt{H(t)} + Q(t)$. Constatăm imediat că relația de mai sus care îl definește pe $H(t)$ este exact de forma (2.7.3), caracterizând un bloc integrator cu ieșirea $H(t)$ și intrarea $w(t)$. Pe de altă parte $w(t)$ poate fi privit ca ieșire a unui bloc sumator de tipul (2.7.5) cu intrările $+Q(t)$ și $-\sqrt{\rho g/k}\sqrt{H(t)}$. Dar semnalul $H(t)$ este deja disponibil în construcția noastră (ca ieșire a blocului integrator) și utilizarea lui drept intrare într-un bloc neliniar care extrage radicalul de ordinul doi permite obținerea $\sqrt{H(t)}$ (funcționarea sistemului asigurând $H(t) \geq 0$). În continuare, semnalul $\sqrt{H(t)}$ plasat la intrarea unui bloc proporțional de forma (2.7.2) cu factorul de proporționalitate $\sqrt{\rho g/k}$ va furniza exact semnalul ce trebuie aplicat pe intrarea cu semnul – a sumatorului. Astfel obținem modelul tip diagramă bloc din fig. 2.7.10.

În schema bloc din fig. 2.7.10, putem înlocui blocul proporțional $\sqrt{\rho g/k}$ și blocul neliniar de extragere a radicalului, conform fig. 2.7.11, ceea ce permite să punem în evidență presiunea la baza rezervorului $P(t)$ precum și relația neliniară $Q_0(t) = \left(1/\sqrt{k}\right)\sqrt{P(t)}$ ce descrie curgerea turbulentă, unde $Q_0(t)$ notează debitul de golire.

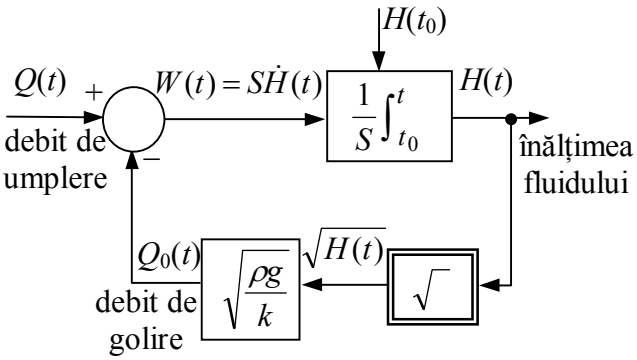


Fig. 2.7.10. Modelul de tip diagramă bloc al sistemului hidraulic din Exemplul 2.7.3, pentru variații mari ale variabilelor (semnal mare)

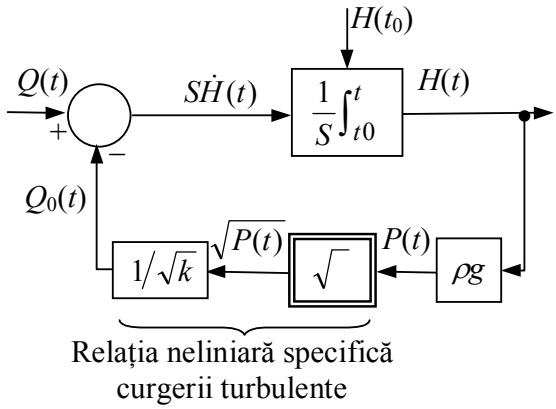


Fig. 2.7.11. Transformarea diagramei bloc din fig. 2.7.10 care pune în evidență variabila $P(t)$

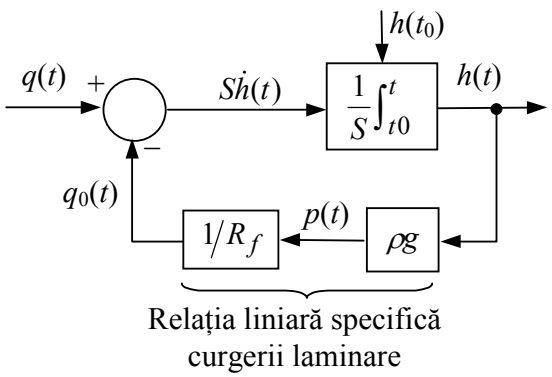


Fig. 2.7.12. Modelul de tip diagramă bloc a sistemului hidraulic din Exemplul 2.7.3 pentru variații mici ale variabilelor (semnal mic)

Ne ocupăm acum de construcția modelului tip diagramă bloc pentru funcționarea sistemului în condiții de *semnal mic* (sau mici variații). Pornim de la modelul de tip ecuație diferențială de ordinul I, liniară, cu coeficienți constanți, dedus în exemplul 2.6.3:

$$S\dot{h}(t) + \rho g h(t)/R_f = q(t),$$

care este pus sub forma:

$$\dot{h}(t) = \left[-\rho g\, h(t)/R_f S + Sq(t)\right]/S \quad .$$

Urmând pilda de construcție din prima parte a exemplului curent, vom ajunge la schema bloc din fig. 2.7.12. Comparând modelul de semnal mic din fig. 2.7.12 cu modelul de semnal mare din fig. 2.7.11, constatăm că singurele diferențe se referă la notarea cu literă mică, respectiv literă mare a semnelor şi la descrierea liniară, respectiv neliniară a curgerii prin robinetul de golire.

Blocurile utilizate în construirea diagramelor bloc din exemplele anterioare s-au caracterizat prin aceea că operatorii *S* asociați corespundeau unor operații elementare. În general, pot fi concepute blocuri pentru care operatorii S asociați descriu succesiuni de operații, adică expresii. Modelele tip diagramă bloc construite astfel nu mai oferă toate detaliile privitoare la procesarea semnalelor şi interacțiunile dintre subsisteme.

Exemplul 2.7.4.

Să considerăm un sistem cu dinamică neliniară descris printr-o reprezentarea intrare-stare-ieşire de forma (2.6.1) şi (2.6.2) cu $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$. Detaliind ecuațiile vectoriale, vom obține următorul set de ecuații de stare:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2),$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2)$$

şi două ecuații de ieşire:

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2),$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2).$$

Fără a preciza expresiile funcțiilor f_i, $i = 1, 2, 3$ şi g_j, $j = 1, 2$ putem construi un model de tip diagramă bloc, utilizând trei integratoare (corespunzător numărului de variabile de stare) şi blocuri neliniare definite într-o manieră generală, tocmai prin funcțiile f_i şi g_j. Rezultatul acestei construcții este prezentat în fig. 2.7.13.

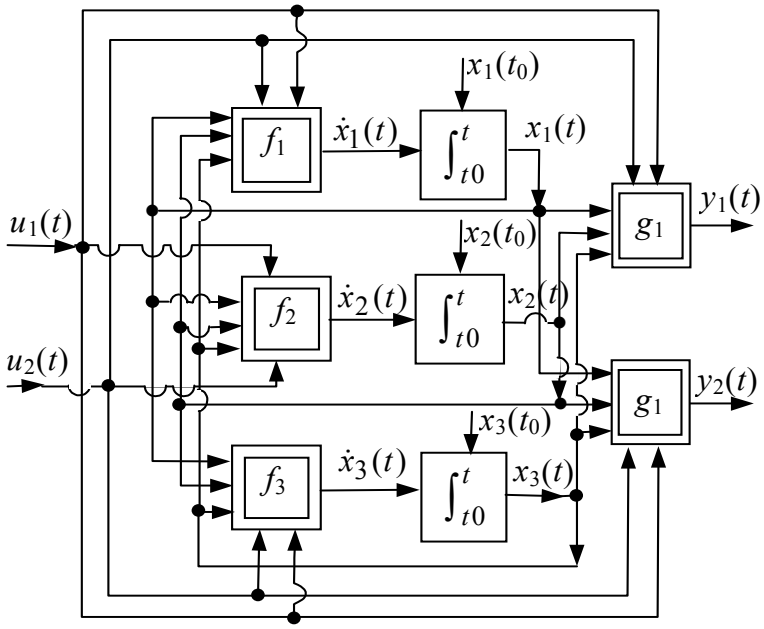


Fig. 2.7.13. Modelul tip diagramă bloc al sistemului neliniar considerat în Exemplul 2.7.4

Încheiem acest paragraf prin a sublinia faptul că modalitatea de construcție a diagramelor bloc ilustrată prin exemplele de mai sus conține şi informațiile necesare pentru abordarea problematicii inverse, adică scrierea sub formă analitică a unei *reprezentări intrare-stare-ieşire, pornind de la un model de tip diagramă bloc*, disponibil. Astfel, ieşirile blocurilor integratoare definesc variabilele de stare, iar scrierea ecuațiilor de stare revine la explicitarea derivatelor variabilelor de stare care sunt definite tocmai de intrările blocurilor integratoare (eventual multiplicate cu o constantă). Această explicitare va consta în descrierea legăturilor cu variabilele de stare şi semnalele de intrare, cu un nivel de detaliere permis de operatorii asociați blocurilor.

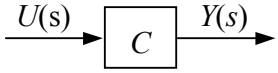
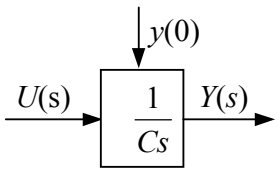
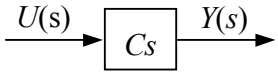
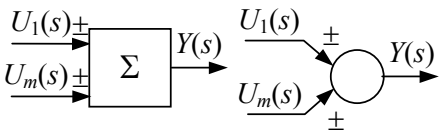
Exemplul 2.7.5.

Dacă utilizăm diagramele bloc din fig. 2.7.8. – 2.7.12, atunci explicitarea derivatelor variabilelor de stare se poate realiza prin expresii analitice concrete, în timp ce, pentru diagrama bloc din fig. 2.7.13, explicitarea se va realiza prin exprimări generice definite de funcțiile f_i, $i = 1, 2, 3$ şi g_j, $j = 1, 2$.

2.7.2. Diagrame bloc cu blocuri descrise în domeniul complex

În cazul blocurilor liniare prezentate în paragraful anterior, tranziția cauzală realizată de orice bloc poate fi formulată şi în domeniul complex, ca o legătură între transformata Laplace a semnalului de ieşire şi transformata (transformatele) Laplace ale semnalului (semnalelor) de intrare. Această modalitate de reprezentare se datorează proprietății de liniaritate a transformării Laplace, permițând descrierea de tip operațional a blocurilor din tabelul 2.7.1.

Tabelul 2.7.1. Descrierea în limbaj operațional, cu ajutorul transformatei Laplace, a tranziției cauzale intrare-stare-ieşire pentru blocurile liniare

Tipul blocului	Expresia analitică în domeniul complex	Reprezentarea grafică în domeniul complex	Descriere în domeniul timp
Proporțional	$Y(s)=CU(s),\quad C\neq 0$		ec. (2.7.2) fig. 2.7.2
Integrator	$Y(s)=\frac{1}{Cs}U(s)+\frac{1}{s}y(0)$		ec. (2.7.3) fig. 2.7.3
Derivator	$Y(s)=(Cs)U(s)$		ec. (2.7.4) fig. 2.7.4
Sumator	$Y(s)=\pm U_1(s)\pm\ldots\pm U_m(s)$		ec. (2.7.5) fig. 2.7.5

Exemplul 2.7.6.

Se consideră sistemul electric din Exemplul 2.4.1, cu reprezentarea grafică din fig. 2.4.1, care a fost referit şi în Exemplul 2.7.2 din paragraful anterior al acestei secțiuni. Modelul de tip diagramă bloc în descriere operațională este prezentat în fig. 2.7.14, considerând drept mărime de ieşire tensiunea pe bobină.

Aşa cum era de aşteptat, funcțiile de transfer ale blocurilor au semnificația fizică (binecunoscută din teoria circuitelor electrice) de impedanțe complexe (R_e, $1/(C_e s)$) şi de admitanțe complexe ($1/(Ls)$).

Pornind de la o diagramă cu blocuri liniare în descriere operațională de tipul celor din tabelul 2.7.1, se poate construi o reprezentare intrare-stare-ieşire, prin parcurgerea următorilor paşi:

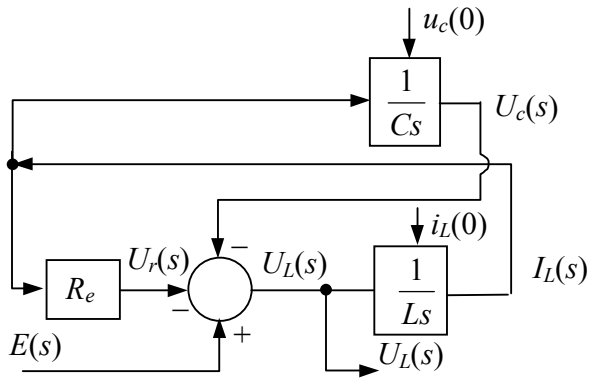


Fig. 2.7.14. Modelul de tip diagramă bloc în descriere operațională pentru sistemul electric din Exemplul 2.7.6

1. Se aleg drept variabile de stare (în reprezentare operațională) ieşirile blocurilor integratoare.

2. Se scrie câte o ecuație în imagini Laplace pentru fiecare variabilă de stare, având variabila de stare izolată în membrul stâng, iar membrul drept detaliind (conform diagramei) rolul blocului integrator (cu condiție inițială nulă) corespunzător variabilei de stare. Detalierea va însemna o exprimare numai în termenii imaginilor Laplace ale variabilelor de stare şi de intrare.

3. Prin aplicarea transformării Laplace inverse, setul de ecuații în descriere

operațională obținut la pasul anterior este adus în domeniul timp, furnizând ecuația vectorial matriceală de stare de forma (2.5.2).

4. Se scrie câte o ecuație în imagini Laplace pentru fiecare variabilă de ieşire, având variabila de ieşire izolată în membrul stâng, iar membrul drept explicitând-o (conform diagramei) în termenii variabilelor de stare şi de intrare.

5. Prin aplicarea transformării Laplace inverse, setul de ecuații în descriere operațională obținut în pasul anterior este adus în domeniul timp, furnizând ecuația vectorial matriceală de ieşire, de forma (2.5.3).

Exemplul 2.7.7.

Se consideră diagrama bloc din fig. 2.7.14, pentru care se aplică algoritmul de construire a unui model intrare-stare-ieşire.

Pasul 1. Alegem drept variabile de stare $U_c(s)$ şi $i_L(s)$.

Pasul 2. Pentru $U_c(s)$ scriem ecuația:

$$U_c(s) = \frac{1}{C_e s} I_L(s),$$

care este tot una cu:

$$sU_c(s) = \frac{1}{C_e} I_L(s). \qquad (*)$$

Pentru $I_L(s)$ scriem ecuația:

$$I_L(s) = \frac{1}{Ls}\big(-U_c(s) - R_e I_L(s) + E(s)\big),$$

care este tot una cu:

$$sI_L(s) = -\frac{1}{L}U_c(s) - \frac{R_e}{L} I_L(s) + \frac{1}{L}E(s). \qquad (**)$$

Pasul 3. Aplicăm transformarea Laplace inversă ecuațiilor (*), (**) şi rezultă

$$\dot{u}_c(t) = \frac{1}{C_e} i_L(t),$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}u_c(t) - \frac{R_e}{L} i_L(t) + \frac{1}{L}e(t).$$

a căror reformulare vectorial matriceală de tipul (2.5.2) este imediată.

Pasul 4. Explicităm $U_L(s)$ sub forma

$$U_L(s) = -U_c(s) - R_e I_L(s) + E(s).$$

Pasul 5. Prin aplicarea transformării Laplace inverse ecuației anterioare se obține

$$u_L(t) = -u_c(t) - R_e i_L(t) + e(t),$$

a cărei reformulare vectorial matriceală de tipul (2.5.3) este imediată.

Examinând structura blocurilor de tip proporțional, integrator şi derivator în scrierea operațională, se constată faptul că blocurile conțin tocmai *funcțiile de transfer* asociate

comportărilor respective. (O mențiune specială necesită cazul integratorului, când afirmația de mai sus presupune nulitatea condiției inițiale $y(0) = 0$.)

Datorită proprietăților garantate de algebra funcțiilor de transfer (a se vedea, de exemplu, [Voicu, 1998]), asupra blocurilor liniare în descriere operațională pot fi operate *transfigurări*, care permit *înlocuirea unui grup* de blocuri şi a conexiunilor aferente lor printr-un *singur bloc* cu o funcție de transfer de tipul fracție rațională. Blocul rezultat este echivalent intrare-ieşire cu grupul de blocuri considerate inițial. Prin efectuarea câtorva etape succesive de transfigurări se poate ajunge la modelul de tip funcție (matrice) de transfer a sistemului. Pornind de la diagrama bloc a sistemului, determinarea funcției (matricei) de transfer se poate realiza şi cu ajutorul grafurilor de fluență Mason.

Cititorilor interesați în utilizarea regulilor de transfigurare sau a grafurilor de fluență Mason pentru calculul funcției (matricei) de transfer corespunzătoare unei diagrame bloc, le este recomandat cursul (Voicu, 1998).

2.8. Modele variante în timp

În această secțiune, ne ocupăm, pe scurt, de modelarea funcționării sistemelor fizice care conțin componente cu caracteristici de material ce se modifică în timp, ca urmare a însăşi funcționării. Precizăm, pentru evitarea oricărei ambiguități, că astfel de modificări nu au fost luate în discuție pe parcursul secțiunilor anterioare din acest capitol, când numai semnalele (sau variabilele) au fost privite drept mărimi cu evoluție dependentă de timp. În scopul clarificării rapide a contextului fizic referit în secțiunea curentă, vom face apel la un exemplu care să pună în evidență deosebirile în raport cu problematica secțiunilor anterioare.

Exemplul 2.8.1.

Ne plasăm în contextul Exemplului 2.4.1. din secțiunea 2.4 a acestui capitol, cu singura deosebire că inductanța bobinei nu mai este constantă, ci variază în timp, potrivit expresiei:

$$L = a + t\,,$$

unde $a > 0$ notează o constantă. Astfel, legea ce descrie funcționarea bobinei ca acumulator de energie, va fi de forma:

$$\frac{d\Phi_L}{dt} = u_L(t)\,,$$

unde mărimea:

$$\Phi_L(t) = Li(t) = (a+t)i_L(t)$$

desemnează fluxul magnetic. Drept urmare, explicitând $u_L(t)$ în funcție de variabilele de stare $u_C(t)$, $i_L(t)$, şi mărimea de intrare $e(t)$, vom obține:

$$i_L(t) + (a+t)\frac{di_L}{dt} = e(t) - R_e i_L(t) - u_C(t)\,,$$

sau, echivalent:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{a+t}u_C(t) - \frac{R_e+1}{a+t}i_L(t) + \frac{1}{a+t}e(t).$$

Astfel, intrăm în posesia unei ecuații vectorial-matriceale de stare, variante în timp:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_e} \\ -\frac{1}{a+t} & -\frac{R_e+1}{a+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a+t} \end{bmatrix} e(t),$$

în care o parte din *coeficienți sunt funcții de timp*.

Pornind de la acest exemplu, putem generaliza situația discutată pentru modele de ordin $n \in \mathbf{N}$, în cazul când unul sau mai mulți *parametri* ai sistemului fizic *variază în timp*. Vom avea, astfel, de a face cu *o reprezentare intrare-stare-ieşire variantă în timp* de forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.8.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.8.2}$$

în care semnalele $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ îşi păstrează semnificația din ecuațiile (2.5.2) şi (2.5.3) corespunzătoare cazului invariant în timp. Ceea ce diferă față de modelul (2.5.2) şi (2.5.3) este faptul că cel puțin o parte din elementele matricelor $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ sunt *funcții* de variabila independentă, cu semnificație temporală t (spre deosebire de modelul (2.5.2) şi (2.5.3) unde toate aceste elemente erau *constante*).

Fără a intra în nici un fel de detalii, atragem atenția asupra faptului că soluția $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ a ecuației diferențiale de stare, în forma vectorial matriceală (2.8.1) nu mai posedă aceleaşi proprietăți comportamentale ca cele analizate în secțiunea 2.5. Cititorului interesat în aprofundarea problematicii specifice ecuațiilor diferențiale de tipul (2.8.1) îi este recomandată lucrarea (Barbu, 1985).

Discuția asupra construcției modelelor variante în timp poate fi extinsă şi în *cazul neliniar*, atunci când unul sau mai mulți parametri ai sistemului fizic îşi modifică valoarea, respectiv valorile, în timp. Un atare model este dat de o *reprezentare neliniară intrare-stare-ieşire, variantă în timp, de forma*:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big), \quad \mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, \tag{2.8.3}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big), \quad \mathbf{g} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n. \tag{2.8.4}$$

Este imediat vizibil faptul că ecuațiile (2.8.3) şi (2.8.4) generalizează descrierile intrare-stare-ieşire (2.6.1) şi (2.6.2) (care sunt invariante în timp), prin prezența variabilei temporale t drept argument separat în $\mathbf{f}$ (2.8.3) şi/sau $\mathbf{g}$ (3.8.4). Semnalele $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ îşi păstrează semnificația din cazul modelului neliniar invariant în timp (2.6.1) şi (2.6.2).

O clasă importantă de sisteme fizice pentru care descrierea funcționării face apel la modelele variante în timp o constituie sistemele cu funcționare în regim de comutație. Dacă, pentru fixare, ne referim la cazul liniar (2.8.1) şi (2.8.2), atunci elementele matricelor $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ pot fi *funcții de timp constante pe porțiuni* (adică constante pe intervale de timp), astfel încât modelul variant în timp (2.8.1) şi (2.8.2) revine la succedarea (după anumite reguli, eventual succedarea ciclică) a mai multor modele invariante în timp, de forma (2.5.2) şi (2.5.3). În atare cazuri se mai spune că avem de a face cu o *descriere multi-model*. Atragem atenția că

discontinuitățile ce caracterizează cuplarea dintre modelele ce compun o descriere multi–model (adică discontinuitățile elementelor lui $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$) necesită un aparat matematic mai rafinat, bazat pe conceptele de soluție în sens Caratheodory şi de incluziune diferențială, a se consulta, de exemplu, lucrarea (Barbu, 1985).

2.9. Noţiuni privind stabilitatea sistemelor

Problematica stabilității acoperă o arie vastă de studiu, cu originea în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Pe parcursul acestei secțiuni vom prezenta câteva noțiuni de bază privind stabilitatea sistemelor, în contextul reprezentărilor neliniare intrare-stare-ieşire, invariante în timp, de forma (2.6.1), (2.6.2). Prin particularizări adecvate ale exprimărilor (2.6.1), (2.6.2) vom putea da unele interpretări suplimentare pentru situația frecvent întâlnită a modelelor liniare invariante în timp. Deşi aceste noțiuni nu sunt direct necesare în modelarea propriu-zisă a funcționării sistemelor fizice, ele se dovedesc extrem de utile în etapa de utilizare a modelelor respective pentru a investiga diverse aspecte ale dinamicii.

Pentru o aprofundare a problematicii stabilității, recomandăm consultarea lucrărilor monografice (Voicu, 1986) şi (Răsvan, 1987). De asemenea, cititorii interesați în detalii şi demonstrații matematice pot consulta capitolele destinate teoriei stabilității din cursuri moderne de ecuații diferențiale, cum ar fi (Corduneanu, 1971), (Halanay, 1972), (Barbu, 1985), (Vrabie, 1999). Acest material bibliografic include şi cazul descrierilor variante în timp, care nu este discutat în secțiunea de față.

2.9.1. Problematica stabilităţii interne

2.9.1.1. Definirea conceptelor fundamentale

Stabilitatea internă a unui sistem descris de ecuațiile (2.6.1) (2.6.2) se abordează numai *în raport cu variabilele de stare* ce corespund vectorului $\mathbf{x}(t)$, în condițiile *absenței semnalelor de intrare*, adică luând $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ în (2.6.1). Astfel ecuația 2.6.1 devine:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}\big(\mathbf{x}(t)\big), \qquad \tilde{\mathbf{f}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n , \tag{2.9.1}$$

iar evoluția variabilelor de stare este datorată numai *condiției inițiale* $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{R}^n$. Luăm în discuție doar cazul când proprietățile funcției $\tilde{f}$ asigură existența şi unicitatea soluției pentru problema Cauchy. De asemenea, vom presupune că soluția problemei Cauchy corespunzătoare oricărei condiții inițiale $\mathbf{x}(t_0)$ este definită pe întreaga semiaxă $[t_0, \infty)$.

Problematica stabilității interne este formulată cu privire la anumite soluții cu proprietăți deosebite ale ecuației (2.9.1). În prezentarea noastră ne vom opri numai la soluțiile de tip *punct de echilibru*, dar atragem atenția că, în general, mai există şi alte tipuri de soluții (cum ar fi soluțiile periodice), care fac obiectul studierii stabilității interne.

Un vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ se numeşte *punct de echilibru* al sistemului (2.9.1), dacă:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}) = 0 . \tag{2.9.2}$$

Cu alte cuvinte, punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ este o soluție a sistemului (2.9.1), care sistem, în urma inițializării în $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\theta}$ va rămâne chiar în această stare, adică

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\theta}, \qquad t \in [t_0, \infty).$$

Este evident că dacă ecuația algebrică (2.9.2) posedă mai multe soluții distincte $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$, atunci sistemul (2.9.1) are mai multe puncte de echilibru. Dacă $\boldsymbol{\theta} \neq 0$ (originea spațiului $\mathbf{R}^n$), prin utilizarea unei schimbări de variabilă de forma:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}, \tag{2.9.3}$$

sistemul (2.9.1) devine:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}), \tag{2.9.4}$$

unde:

$$\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\theta}). \tag{2.9.5}$$

De aici rezultă că $\bar{\mathbf{f}}(0) = \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ conform (2.9.2). Constatăm astfel că ori de câte ori se doreşte, schimbarea de variabilă (2.9.3) permite transformarea punctului de echilibru $\boldsymbol{\theta} \neq 0$ al sistemului inițial (2.9.1) în punctul de echilibru 0 al sistemului modificat (2.9.4). Această transformare creează posibilitatea de a privi punctul 0 (originea spațiului $\mathbf{R}^n$) ca un punct de echilibru, ori de câte ori o asemenea tratare prezintă interes.

Punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ al sistemului (2.9.1) se numeşte *simplu stabil* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $t_0 \geq 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice condiție inițială $\mathbf{x}(t_0)$ satisfăcând $\|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\theta}\| \leq \delta(\varepsilon)$ avem $\|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\theta}\| \leq \varepsilon$ pentru $t \geq t_0$. Notația $\|\cdot\|$ desemnează o normă din $\mathbf{R}^n$. Astfel spus, stabilitatea simplă a punctului de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ înseamnă că orice soluție a sistemului (2.9.1) care a fost inițializată la t_0 într-o vecinătatea a lui $\boldsymbol{\theta}$, va rămâne într-o vecinătate a lui $\boldsymbol{\theta}$ pentru $t \geq t_0$, dimensionarea celor două vecinătăți formulându-se printr-o exprimate de tipul δ şi ε.

Punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ al sistemului (2.9.1) se numeşte *asimptotic stabil* dacă el este stabil şi, în plus, este îndeplinită condiția $\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\theta}\| = 0$. Este aşadar evident că un punct de echilibru simplu stabil nu este întotdeauna şi asimptotic stabil, după cum va reieşi din exemplele de mai jos.

Punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ al sistemului (2.9.1) se numeşte *instabil*, dacă el nu este nici asimptotic stabil, nici simplu stabil. Altfel spus, instabilitatea punctului de echilibru θ se manifestă prin aceea că există soluții ale sistemului (2.9.1) care deşi sunt inițializate la t_0 "suficient de aproape" de $\boldsymbol{\theta}$, ele nu pot fi păstrate pentru $t \geq t_0$ într-o vecinătate a lui $\boldsymbol{\theta}$ controlabilă prin mecanismul δ şi ε.

Exemplul 2.9.1.

Să considerăm condensatorul electric din Exemplul 2.2.1., a cărui funcționare este descrisă de ecuația de stare scalară:

$$\frac{du}{dt} = \frac{i(t)}{C_e},$$

în care $u(t)$ este variabila de stare, iar $i(t)$ este mărimea de intrare. Într-o scriere de forma (2.9.1) (adică în absența mărimii de intrare), avem $\tilde{\mathbf{f}}(u(t)) = 0$, ceea ce înseamnă că ecuația algebrică (2.9.2) este satisfăcută pentru orice valoare $\theta \in \mathbf{R}$. Rezultă că orice tensiune constantă θ constituie un punct de echilibru pentru sistem, în sensul că odată ce la momentul t_0 tensiunea pe condensator este θ (adică $u(t_0) = \theta$), condensatorul păstrează la borne tensiunea θ (adică $u(t) = \theta$, $t \geq t_0$) – neglijând fenomenele de pierdere pentru sarcina electrică.

Oricare din aceste puncte de echilibru θ sunt puncte de echilibru simplu stabile. Într-adevăr, din funcționarea sistemului fizic constatăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $t_0 > 0$ există $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ astfel încât alegerea arbitrară a tensiunii inițiale $u(t_0)$ într-o vecinătate a lui θ definită prin $|u(t) - \theta| \leq \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, asigură păstrarea tensiunii $u(t)$ într-o vecinătate a lui θ definită prin $|u(t_0) - \theta| \leq \delta(\varepsilon)$ pentru $t \geq t_0$ (deoarece $u(t)$ este chiar $u(t_0)$). Atragem atenția că alegerea $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ se datorează specificității exemplului considerat, dar, în general, $\delta(\varepsilon)$ trebuie înțeleasă ca o funcție oarecare de ε.

Nici unul din multitudinea de puncte de echilibru simplu stabil nu este punct de echilibru asimptotic stabil. Într-adevăr, considerând un punct de echilibru θ oarecare, evoluția tensiunii $u(t)$ pe condensator nu va satisface condiția $\lim_{t\to\infty} |u(t) - \theta| = 0$, cu excepția situației cu totul particulare când valoarea tensiunii inițiale este chiar 0, adică $u(t_0) = 0$.

Exemplul 2.9.2.

Să considerăm sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1., a cărui funcționare este descrisă de ecuația de stare scalară:

$$\dot{x}(t) = -\frac{k_e}{\gamma} x(t) + \frac{1}{\gamma} F(t),$$

în care $x(t)$ este variabila de stare şi $F(t)$ variabila de intrare. Într-o scriere de forma (2.9.1) (adică în absența variabilei de intrare) avem $\tilde{f}(x(t)) = -\frac{k}{\gamma} x(t)$, ceea ce însemnă că ecuația algebrică (2.9.2) are singura soluție $\theta = 0$. Rezultă că sistemul mecanic considerat are un singur punct de echilibru şi anume originea 0 (adică deplasare nulă a punctului A). Tipul acestui punct de echilibru reiese imediat din studierea funcționării sistemului mecanic. Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar şi t_0 arbitrar, există $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ astfel încât pentru orice deplasare inițială $x(t_0)$ dintr-o vecinătate a originii, definită prin $|x(t_0)| \leq \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ este asigurată rămânerea punctului A într-o vecinătate a originii, definită prin $|x(t)| = |e^{-k_e t/\gamma} x(t_0)| \leq \varepsilon$ pentru $t \geq t_0$. Mai mult, din expresia lui $x(t) = e^{-k_e t/\gamma} x(t_0)$, rezultă $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$, ceea ce înseamnă că origiunea este punct de echilibru asimptotic stabil pentru sistemul considerat.

Exemplul 2.9.3.

Să considerăm pendulului fizic a cărui funcţionare este discutată şi modelată în secţiunea 6.1. a Capitolului 6, în cadrul Exemplului 6.1.2. Modelul rezultat (a cărui construcţie nu o comentăm la momentul de faţă, întrucât face obiectul studiului în exemplul sus amintit) are forma:

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t),$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{\gamma}{ml^2}\omega(t) - (g/l)\sin\varphi(t),$$

unde semnificaţia variabilelor de stare $\varphi(t), \omega(t)$ şi a coeficienţilor este cea detaliată în secţiunea 6.1.

În analiza stabilităţii, ne vom ocupa numai de cazul $\gamma = 0$, când nu există frecări între tijă şi articulaţie, caz pentru care modelul devine

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t),$$

$$\dot{\omega}(t) = -(g/l)\sin\varphi(t).$$

Acest model este de forma (2.9.1), cu vectorul variabilelor de stare

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \varphi(t) & \omega(t) \end{bmatrix}^T.$$

Asupra pendulului nu acţionează nici o mărime de intrare, mişcarea pendulului datorându-se numai condiţiilor iniţiale. Punctele de echilibru sunt date (conform (2.9.2)) de soluţiile sistemului de ecuaţii algebrice:

$$\omega = 0,$$
$$-(g/l)\sin\varphi(t) = 0,$$

adică în scriere vectorială, sunt:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \varphi & \omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k\pi & 0 \end{bmatrix}^T, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Evident aceste valori corespund imaginii intuitive create asupra funcţionării, ştiindu-se că pendulul rămâne nemişcat dacă şi numai dacă este plasat strict în poziţie verticală şi nu posedă viteză unghiulară. Vom analiza stabilitatea acestor puncte de echilibru, oprindu-ne numai la două situaţii, care, datorită periodicităţii funcţiei sinus, le acoperă, în fond, pe toate celelalte. Aşadar, considerăm situaţiile:

1. Punctul de echilibru este;

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \varphi & \omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

şi corespunde cazului când masa (m) este plasată *sub articulaţia* O, pe verticala ce trece prin O;

2. Punctul de echilibru este;

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \varphi & \omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}^T$$

şi corespunde cazului când masa (m) este plasată *deasupra articulaţiei* O, pe verticala ce trece prin O;

Revenind la aspectul intuitiv, situaţia 1 înseamnă *un punct de echilibru simplu stabil* (nu este asimptotic stabil datorită neglijării frecărilor), iar situaţia 2 înseamnă *un punct de*

echilibru instabil. În cele ce urmează vom furniza argumente de factură matematică ce justifică afirmațiile precedente, privitoare la natura celor două puncte de echilibru.

Ne vom ocupa, mai întâi, de situația 1, referitoare la punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} = [\varphi \quad \omega]^T = \ = [0 \quad 0]^T$. Reprezentarea de stare este echivalentă cu ecuația diferențială de ordinul II:

$$\ddot{\varphi}(t) + (g/l)\sin\varphi(t) = 0,$$

care, prin înmulțirea cu $2\dot{\varphi}(t)$, conduce la ecuația diferențială:

$$2\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) + 2(g/l)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) = 0.$$

Aceasta din urmă poate fi rescrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left[(\varphi(t))^2 - 2(g/l)\cos\varphi(t)\right] = 0,$$

de unde, prin integrare pe intervalul [0, *t*], se obține:

$$(\dot{\varphi}(t))^2 - 2(g/l)\cos\varphi(t) = (\dot{\varphi}(0))^2 - 2(g/l)\cos\varphi(0), \quad t \geq 0,$$

sau, echivalent (ținând cont că $\dot{\varphi} = \omega$):

$$l\omega^2(t) + 2g(1 - \cos\varphi(t)) = l\omega^2(0) + 2g(1 - \cos\varphi(0)), \quad t \geq 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar şi să considerăm valoarea $\delta(\varepsilon)$ care satisface inegalitatea:

$$l\delta^2 + 2g(1 - \cos\delta) \leq 4\min\{l, g\}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă pentru starea inițială **x**(0) avem îndeplinită condiția:

$$\|\mathbf{x}(0) - \boldsymbol{\theta}\|_\infty = \left\|[\varphi(0) \quad \omega(0)]^T\right\|_\infty \leq \delta,$$

atunci este adevărată şi inegalitatea:

$$l\omega^2(0) + 2g(1 - \cos\varphi(0)) \leq l\delta^2 + 2g(1 - \cos\delta)$$

şi, cu atât mai mult, inegalitatea:

$$l\omega^2(0) + 2g(1 - \cos\varphi(0)) \leq 4\min\{l, g\}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Astfel, în baza celor arătate mai sus, putem concluziona că:

$$l\omega^2(t) + 2g(1 - \cos\varphi(t)) \leq 4\min\{l, g\}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \geq 0,$$

sau echivalent:

$$l\omega^2(t) + 4g\sin^2\frac{\varphi(t)}{2} \leq 4\min\{l, g\}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \geq 0.$$

Rezultă, aşadar, că vom avea satisfăcute inegalitățile:

$$l\omega^2(t) \le 4\min\{l,g\}\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \le 4l\sin^2\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \ge 0,$$

$$4g\sin^2\frac{\varphi(t)}{2} \le 4\min\{l,g\}\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \le 4g\sin^2\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \ge 0,$$

care, de fapt, înseamnă:

$$\omega^2(t) \le 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \ge 0,$$

$$\sin^2\frac{\varphi(t)}{2} \le \sin^2\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \ge 0,$$

ceea ce implică:

$$|\omega(t)| \le \varepsilon; \quad t \ge 0,$$

$$|\varphi(t)| \le \varepsilon; \quad t \ge 0.$$

Altfel spus, am arătat că inegalitatea

$$\|\mathbf{x}(0) - \boldsymbol{\theta}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \varphi(t) & \omega(t) \end{bmatrix}^T \right\|_\infty \le \varepsilon \quad t \ge 0,$$

este asigurată pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, odată ce este îndeplinită condiția $\|\mathbf{x}(0) - \boldsymbol{\theta}\|_\infty \le \delta(\varepsilon)$, cu $\delta(\varepsilon)$ ales ca mai sus. Concludem că punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ este *simplu stabil*, deoarece condiția de stabilitate asimptotică:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\theta}\|_\infty = 0$$

ar însemna (în baza celor de mai sus) că pentru valori arbitrare $\omega(0), \varphi(0)$ să avem:

$$l\omega^2(0) + 4g\sin^2\frac{\varphi(0)}{2} \equiv 0,$$

ceea ce, în mod evident, este imposibil.

Trecem acum la situația 2, referitoare la punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \varphi & \omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}^T$. Utilizând un nou vector de stare:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

construit conform (2.9.3), rezultă o descriere de stare de tipul (2.9.4);

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \bar{\omega}(t),$$
$$\dot{\bar{\omega}}(t) = (g/l)\sin\bar{\varphi}(t),$$

pentru care vom investiga stabilitatea punctului de echilibru $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ (adică originea spațiului $\mathbf{R}^2$). Procedând analog situației 1, vom putea scrie;

$$\left(\dot{\bar{\varphi}}(t)\right)^2 + 2(g/l)\cos\bar{\varphi}(t) = \left(\dot{\bar{\varphi}}(0)\right)^2 + 2(g/l)\cos\bar{\varphi}(0), \quad t \ge 0,$$

sau, echivalent (ţinând cont că $\dot{\overline{\varphi}} = \overline{\omega}$):

$$\left(\dot{\overline{\omega}}(t)\right)^2 + 2(g/l)\cos\overline{\varphi}(t) = \left(\dot{\overline{\omega}}(0)\right)^2 + 2(g/l)\cos\overline{\varphi}(0), \quad t \geq 0 .$$

Fie $M = \max\left\{1, \sqrt{g/l}\right\}$. dacă pentru $\delta > 0$ oarecare, considerăm stări iniţiale de forma:

$$\overline{\varphi}(0) = (1/\mathrm{M})\delta ,$$
$$\overline{\omega}(0) = 2\sqrt{g/l}\sin(1/M)\frac{\delta}{2},$$

atunci constatăm că:

$$\left\|\overline{\mathbf{x}}(0)\right\|_\infty = \left\| \left[\overline{\varphi}(0) \quad \overline{\omega}(0)\right]^T \right\|_\infty \leq \delta ,$$

şi în plus:

$$\overline{\omega}^2(0) + 2(g/l)\cos\overline{\varphi}(0) = 2(g/l) .$$

Ultima inegalitate ne arată că pentru stări iniţiale definite ca mai sus avem:

$$\left(\dot{\overline{\omega}}^2(t)\right)^2 + 2(g/l)\cos\overline{\varphi}(t) = 2(g/l), \quad t \geq 0 ,$$

sau, echivalent:

$$\left(\dot{\overline{\omega}}^2(t)\right)^2 + 4(g/l)\sin^2\frac{\overline{\varphi}(t)}{2} = 0, \quad t \geq 0 .$$

Deci, pentru orice soluţie a sistemului iniţializată în $\overline{\varphi}(0), \overline{\omega}(0)$ definite anterior, variabilele de stare $\overline{\varphi}(t), \overline{\omega}(t)$ vor satisface egalitatea:

$$\overline{\omega}(t) = 2\sqrt{g/l}\sin\frac{\overline{\varphi}(t)}{2}, \quad t \geq 0 ,$$

care poate fi privită drept o ecuaţie diferenţială neliniară, de ordinul I:

$$\dot{\overline{\varphi}}(t) = 2\sqrt{g/l}\sin\frac{\overline{\varphi}(t)}{2},$$

având ataşată condiţia iniţială

$$\overline{\varphi}(0) = (1/M)\delta .$$

Integrând această ecuaţie diferenţială (pentru care variabilele sunt separabile), vom obţine pentru $\overline{\varphi}(t)$ expresia:

$$\overline{\varphi}(t) = 4\sqrt{g/l}\,\mathrm{arctg}\left(c\cdot e^t\right), \quad C = \mathrm{tg}\frac{(1/M)\delta}{4\sqrt{g/l}} .$$

Luând $\varepsilon = \pi\sqrt{g/l}$, constatăm că pentru stările iniţiale definite mai sus, avem $\left|\overline{\varphi}(t)\right| > \varepsilon$, de îndată ce este satisfăcută condiţia:

$$t > t_1 = \ln\left(\mathrm{ctg}\frac{(1/M)\delta}{4\sqrt{g/l}}\right).$$

Cu aceasta, am arătat că există stări inițiale cu $\|\bar{\mathbf{x}}(0)\|_\infty \le \delta$ (δ arbitrar - în sensul oricât de mic), pentru care $\|\bar{\mathbf{x}}(t)\|_\infty > \varepsilon = \pi\sqrt{l/g}$ de îndată ce $t > t_1$, ceea ce înseamnă că originea este punct de echilibru instabil. Revenind la variabilele de stare $\varphi(t), \omega(t)$ din descrierea de la început, putem afirma că $\boldsymbol{\theta} = [\pi \quad 0]^T$ este *punct de echilibru instabil*. ▬▬

Din cele ce discutate anterior a reieşit că stabilitatea asimptotică este o proprietate care poate fi *asociată unei soluții particulare* de tip punct de echilibru $\boldsymbol{\theta}$ a sistemului (2.9.1), vizând comportarea tuturor soluțiilor inițializate în vecinătatea lui $\boldsymbol{\theta}$. În cazul când $\boldsymbol{\theta}$ este un punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (2.9.1) şi, în plus, condiția $\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(t)-\boldsymbol{\theta}\|$ are loc pentru orice stare $\mathbf{x}(t_0)$ în care este inițializată dinamica, se spune că punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta}$ este *global asimptotic stabil*. Cu alte cuvinte, în situația de globalitate a proprietății de stabilitate asimptotică, condiția inițială $\mathbf{x}(t_0)$ poate fi situată *oricât de departe* (în sensul metricei dată de o normă din $\mathbf{R}^n$) față de $\boldsymbol{\theta}$, care este *singurul punct de echilibru* al sistemului (2.9.1). Datorită acestei *unicități* a punctului de echilibru, atributul de "*global asimptotic stabil*", poate fi *asociat însuşi sistemului* (2.9.1), care, astfel, va fi referit drept "sistem global asimptotic stabil", sau, mai pe scurt, "sistem asimptotic stabil" (caracterul de globalitate fiind subînțeles).

▬ **Exemplul 2.9.4.**

Reluând Exemplul 2.9.2, constatăm că originea O este punct de echilibru global asimptotic stabil pentru sistemul mecanic considerat, deoarece, indiferent de valoarea inițială a deplasării $x(t_0)$, avem îndeplinită condiția $\lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$. Din punct de vedere al experimentului practic, trebuie precizat că valorile lui $x(t_0)$ nu pot fi oricât de mari (fiindcă sistemul s-ar distruge), dar, în aplicarea la nivel strict teoretic a definiției stabilității asimptotice ne putem permite valori oricât de mari pentru condiția inițială a ecuației diferențiale considerată drept model pentru funcționarea sistemului. În concluzie, putem afirma despre sistemul mecanic avut în vedere că este global asimptotic stabil, sau, mai pe scurt, asimptotic stabil. ▬▬

2.9.1.2. Criterii utilizate în cazul reprezentărilor de stare liniare

În cazul modelelor invariante în timp de tip *reprezentări liniare intrare-stare-ieşire* de forma (2.5.3) şi (2.5.4), studiul stabilității interne poate face apel la instrumentele algebrei liniare, după cum va reieşi din discuția următoare. Astfel, în absența mărimilor de intrare (adică $\mathbf{u}(t) \equiv 0$) ecuația de stare (2.5.3) se reduce la:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \tag{2.9.6}$$

ce reprezintă particularizarea lui (2.9.1) pentru cazul modelelor liniare.

Punctele de echilibru ale sistemului diferențial (2.9.6) sunt date (în conformitate cu (2.9.2)) de soluția (soluțiile) sistemului algebric:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = 0. \tag{2.9.7}$$

Rezultă că $\boldsymbol{\theta} = 0$ (originea spațiului $\mathbf{R}^n$) este *singurul punct de echilibru* al sistemului diferențial (2.9.6) dacă şi numai dacă rang$\mathbf{A} = n$, sau, echivalent, dacă şi numai dacă matricea **A** nu posedă valori proprii nule.

Cum pentru orice condiție inițială $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{R}^n$, soluția sistemului diferențial (2.9.6) este:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0), \tag{2.9.8}$$

utilizarea exprimării de forma (2.4.22) pentru exponențiala matriceală $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ ne arată că îndeplinirea condiției $\lim_{t\to\infty}\|x(t)-0\| = 0$ are loc dacă şi numai dacă toate autovalorile matricei **A** au partea reală strict negativă (fapt exprimat analitic prin inegalitățile (2.4.19)). În această, situație, $\boldsymbol{\theta} = 0$ este *punct de echilibru global asimptotic stabil* şi, în baza celor discutate anterior, putem afirma că sistemul diferențial (2.9.6) este asimptotic stabil.

Ajungând în acest punct al studiului dedicat stabilității interne, cititorul deține toate informațiile necesare pentru a înțelege pe deplin sensul restricției (2.4.19) pe care am introdus-o în secțiunea 2.4, când am investigat dinamica sistemelor descriptibile prin modele liniare intrare-stare-ieşire, detaliind numai comportarea specifică *sistemelor asimptotic stabile*. De asemenea, cititorul va observa că particularizarea restricției (2.4.19) în cazul scalar al lui (2.9.6), adică $\dot{x}(t) = ax(t)$, $a \in \mathbf{R}$, va însemna condiția $a < 0$. De această condiție s-a făcut uz în secțiunea 2.3, definind modelul de tip ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți prin exprimarea (2.3.1), în care restricția $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ asigură $a = -(a_0/a_1) < 0$, deoarece $u(t) \equiv 0$ permite a rescrie (2.3.1) drept $\dot{x}(t) = -(a_0/a_1)x(t)$.

Exemplul 2.9.5.

Considerăm circuitul electric discutat anterior în Exemplul 2.4.1. În absența semnalului de intrare, descrierea de stare de forma (2.9.6) este:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_e} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_e}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

şi *singurul punct de echilibru* este originea spațiului $\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{\theta} = [0 \quad 0]^T$ (fiind unica soluție a sistemului de ecuații algebrice de forma (2.9.7)). Conform studiului din Exemplul 2.4.2, valorile proprii au partea reală strict negativă (indiferent de parametrii L, C_e, R_e), ceea ce arată că sistemul considerat este *global asimptotic stabil*. Semnificația fizică a acestei constatări este aceea că indiferent de starea inițială (tensiune pe condensator şi curent prin bobină), dacă sursa furnizează putere nulă dar permite circulația curentului, atunci vectorul variabilelor de stare va prezenta proprietatea:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|[u_c(t) \quad i_L(t)]^T\right\| = 0,$$

manifestare cunoscută prin analiza dinamicii de regim liber din paragraful 2.4.3.

Drept exercițiu, cititorul este invitat să probeze stabilitatea asimptotică a sistemului prin aplicarea definiției bazată pe construcția de tip δ şi ε.

În cazul când matricea **A** din descrierea de stare (2.9.6) nu are toate valorile proprii cu partea reală strict negativă (adică nu sunt satisfăcute toate inegalitățile (2.4.19)), sistemul nu poate fi global asimptotic stabil. Explorând dinamica de regim liber pe baza relațiilor (2.9.8) şi (2.4.22), putem distinge următoarele situații:

1. Dacă matricea **A** posedă un număr de *valori proprii simple cu partea reală nulă* (adică situate pe axa imaginară a planului complex), iar restul valorilor proprii, simple sau multiple, au partea reală strict negativă, atunci ne putem plasa în unul din subcazurile de mai jos:
   1.a) Dacă 0 (zero) nu este valoare proprie (adică valorile proprii simple cu partea reală nulă sunt pur imaginare), atunci sistemul are *un singur punct de echilibru simplu stabil* care este originea spațiului $\mathbf{R}^2$.
   1.b) Dacă 0 (zero) este valoare proprie, atunci sistemul are *o infinitate de puncte de echilibru simplu stabile*.
2. Dacă matricea **A** posedă *valori proprii multiple cu partea reală nulă* şi/sau valori proprii, simple sau multiple cu partea reală strict pozitivă, atunci punctul (respectiv punctele) de echilibru - după cum (2.9.7) are una, respectiv mai multe soluții – este (respectiv sunt) instabil (respectiv instabile).

Cititorul va putea proba prin demonstrație riguroasă aceste afirmații, făcând apel la exprimarea (2.4.22) pentru exponențiala matriceală.

În cele ce urmează, considerăm utile două exemple cu suport fizic relevant.

Exemplul 2.9.6.

Considerăm o variantă a circuitului electric din Exemplul 2.4.1, în care nu există elementul de tip rezistor. Reprezentarea de stare construită în Exemplul 2.4.1 poate fi utilizată în continuare, atribuind rezistenței valoarea 0, adică $R_e = 0$. Cu aceasta, dinamica de regim liber (în absența semnalului de intrare) este descrisă de un sistem de ecuații diferențiale omogene de forma (2.9.6):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_e} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}.$$

Constatăm că matricea $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ are valorile proprii pur imaginare $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{1/(LC_e)}$, ceea ce înseamnă că ne plasăm în cazul 1a) discutat anterior. Concluzionăm că originea $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ este *singurul punct de echilibru* al sistemului, fiind de tipul simplu stabil. Semnificația fizică a acestei afirmații constă în aceea că indiferent de starea inițială $u_C(0)$, $i_L(0)$, dacă sursa furnizează putere nulă dar permite circulația curentului, atunci mărimile $u_C(t)$, $i_L(t)$ vor rămâne într-o vecinătate a punctului de echilibru $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, fără a prezenta însă comportarea de tip asimptotic

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \begin{bmatrix} u_C(t) & i_L(t) \end{bmatrix}^T \right\| = 0.$$

Dimensiunea vecinătății în care rămân $u_C(t)$, $i_L(t)$ este corelată cu depărtarea stării inițiale $u_C(0)$, $i_L(0)$ (în sensul metricei formulate cu o normă din $\mathbf{R}^2$); mecanismul acestei corelări este de tipul δ şi ε, putând fi uşor formulat analitic, ca o aplicație directă a celor discutate la

începutul paragrafului curent. Practic, în circuit ar trebui să existe oscilaţii neamortizate reproducând periodic valorile iniţiale $u_C(0)$, $i_L(0)$, întrucât lipsa rezistorului face ca energia să se conserve în totalitate (ipoteză care, în realitate, nu este însă complet satisfăcută, datorită rezistenţelor parazite inerente).

Exemplul 2.9.7.

Să reluăm Exemplul 2.9.1 care face referire la condensatorul electric din Exemplul 2.2.1. Dinamica de regim liber este descrisă de ecuaţia diferenţială omogenă:

$$\dot{u}(t) = 0\,,$$

care constituie un caz particular al reprezentării de stare (2.9.6), obţinut pentru $\mathbf{A} = 0 \in \mathbf{R}^{1\times 1}$. Putem spune că $\mathbf{A}$ are o singură valoare proprie care este 0 şi astfel ne plasăm în situaţia 1b) discutată mai sus. Conchidem că sistemul admite o infinitate de puncte de echilibru de tip simplu stabil, concluzie la care s-a ajuns şi în Exemplul 2.9.1 prin aplicarea definiţiei cu δ şi ε.

2.9.1.3. Criterii utilizate în cazul reprezentărilor de stare neliniare

În paragraful 2.6.3 din capitolul curent s-a văzut că modelelor neliniare de forma (2.6.1) şi (2.6.2) li se pot ataşa modele liniare în mici variaţii de forma (2.6.20) şi (2.6.21) care îşi păstrează valabilitatea în vecinătatea unui punct staţionar de funcţionare. Dacă sistemul considerat este izolat faţă de intrări, adică dinamica sa este descrisă de o reprezentare de stare de forma (2.9.1), iar $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ reprezintă un punct de echilibru furnizat de (2.9.2), atunci modelul (2.9.1) poate fi liniarizat în jurul lui $\boldsymbol{\theta}$, ajungând la un model de tipul (2.9.6):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \tilde{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\theta} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n, \tag{2.9.9}$$

pentru care punctul de echilibru corespunzător lui $\boldsymbol{\theta}$ este originea spaţiului $\mathbf{R}^n$.

Fiind vorba despre un model liniarizat (deci aproximativ), valabilitatea descrierii (2.9.9) se păstrează doar într-o vecinătate a punctului de echilibru $\boldsymbol{\theta}$ a sistemului neliniar (2.9.1), ceea ce înseamnă că studierea stabilităţii cu ajutorul lui (2.9.9) nu poate avea decât un *caracter local*. Mai mult chiar, faptul că (2.9.9) este un model aproximativ face ca să nu putem formula nici o concluzie despre natura punctului de echilibru $\boldsymbol{\theta}$ a modelului neliniar (2.9.1), atunci când autovalorile matricei $\tilde{\mathbf{A}}$ din (2.9.9) ne plasează în cazul 1 discutat în paragraful 2.9.1.2. (adică atunci când $\tilde{\mathbf{A}}$ are un număr de autovalori simple, cu partea reală nulă, iar celelalte cu partea reală strict negativă).

Concluzii ferme privind natura punctului de echilibru $\boldsymbol{\theta}$ a sistemului (2.9.1) pot fi formulate cu ajutorul aproximării liniare (2.9.9) numai în următoarele două situaţii:

(i). Dacă punctul de echilibru 0 (originea în $\mathbf{R}^n$) al modelului liniarizat (2.9.9) este asimptotic stabil, atunci punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ al modelului neliniar (2.9.1) este asimptotic stabil.

(ii). Dacă punctul de echilibru 0 (originea în $\mathbf{R}^n$) al modelului liniarizat (2.9.9) este instabil, atunci punctul de echilibru $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ al modelului neliniar (2.9.1) este instabil.

Exemplul 2.9.8.

Să reluăm Exemplul 2.9.3 care face referire la pendulul fizic din Exemplul 6.1.2. Vom considera, cazul $\gamma = 0$ (însemnând neglijarea frecărilor) care a fost detaliat în Exemplul 2.9.3. Vom avea în vedere tot numai punctele de echilibru $[0 \quad 0]^T$ şi $[\pi \quad 0]^T$, din aceleaşi raţiuni ca în Exemplul 2.9.3, dar vom încerca să determinăm natura lor apelând la modelul liniarizat în mici variaţii. Astfel, modelul neliniar de forma (2.9.1) este

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t),$$

$$\dot{\omega}(t) = -(g/l)\sin\varphi(t),$$

având vectorul variabilelor de stare $x(t) = [\varphi(t) \quad \omega(t)]^T$. Efectuând liniarizarea în jurul punctului de echilibru $[0 \quad 0]^T$, vom obţine modelul liniar de forma (2.9.9):

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varphi}}(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(t) \\ \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(t) \\ \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t).$$

Autovalorile matricei $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ sunt $\pm \mathrm{j}\sqrt{g/l}$, ceea ce arată (în baza discuţiei anterioare) că modelul liniarizat nu poate furniza informaţii despre natura punctului de echilibru $[0 \quad 0]^T$ al modelului neliniar (despre care am arătat în Exemplul 2.9.3 că este simplu stabil, prin aplicarea definiţiei cu δ şi ε).

Drept exerciţiu, cititorul poate relua studiul stabilităţii pentru punctele de echilibru ale modelului neliniar în cazul $\gamma \neq 0$ (când nu se neglijează frecările). În acest caz, intuitiv vorbind, punctul de echilibru $[0 \quad 0]^T$ al modelului neliniar este asimptotic stabil, deoarece pierderea de energie prin frecare face ca, în timp, oscilaţiile pendulului să se amortizeze astfel încât

$$\lim_{t\to\infty} \left\| [\varphi(t) \quad \omega(t)]^T \right\| = 0.$$

La această concluzie se poate ajunge şi riguros matematic, construind modelul liniarizat de forma (2.9.9) şi constatând că ambele autovalori ale matricei $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ au părţi reale strict negative. ∎

În finalul acestui paragraf precizăm faptul că acele consideraţii de tip energetic la care am făcut apel din punct de vedere intuitiv (pentru a comenta fizic dinamica unor sisteme utilizate în exemple) pot fi privite ca stând la baza unei metode matematice de investigare a stabilităţii sistemelor, denumită *metoda directă Liapunov*, (după numele matematicianului rus ce a propus-o). În cazul sistemelor neliniare, această metodă poate furniza informaţii ferme privind natura punctelor de echilibru şi în situaţiile când procedeul liniarizării nu permite o asemenea investigaţie. Prezentarea metodei directe Liapunov depăşeşte cadrul propus pentru paragraful de faţă, dar cititorul interesat poate face apel la oricare din sursele bibliografice enumerate la începutul acestei secţiuni.

2.9.2. Problematica stabilităţii externe

2.9.2.1. Conceptul de stabilitate externă

Stabilitatea externă a unui sistem descris de ecuaţiile (2.6.1) şi (2.6.2) se abordează în raport cu *transferul intrare-ieşire* $\mathbf{u}(t) \to \mathbf{y}(t)$, în condiţiile când toate variabilele de stare sunt nule la momentul iniţial t_0, adică $\mathbf{x}(t_0) = 0$. Reformulând în terminologia specifică introdusă pe parcursul acestui capitol, vom spune că studierea stabilităţii externe necesită investigarea *dinamicii de regim forţat.* Spre deosebire de stabilitatea internă, care este o noţiune asociată punctelor de echilibru (în sensul discutat în paragraful 2.9.1), stabilitatea externă este un concept *asociat sistemelor*.

Sistemul descris de ecuaţiile (2.6.1) şi (2.6.2) este *stabil extern* dacă pentru orice constantă $L > 0$ şi orice $t_0 \geq 0$ există o constantă $M(L) > 0$ astfel încât pentru orice vector al mărimilor de intrare u(t) satisfăcând condiţia de mărginire $\|u(t)\| \leq L \; \forall \, t \geq t_0$, vectorul mărimilor de ieşire satisface condiţia de mărginire $\|y(t)\| \leq M(L) \; \forall \, t \geq t_0$. Notaţia $\|\cdot\|$ desemnează o normă finit dimensională, cum ar fi, de exemplu, norma ∞. Altfel spus, stabilitatea externă a sistemului înseamnă că pentru orice mărimi cauză (de intrare) mărginite, mărimile efect (de ieşire) sunt mărginite. Din acest motiv stabilitatea externă mai este referită şi drept *stabilitate intrare mărginită – ieşire mărginită*.

În cazul când nu este îndeplinită definiţia stabilităţii externe prezentate mai sus, vom spune că sistemul este *instabil extern*, sau *instabil intrare mărginită – ieşire mărginită*. Într-o atare situaţie, vor exista mărimi de intrare mărginite u(t) pentru care cel puţin una dintre mărimile de ieşire (adică cel puţin o componentă a vectorului y(t)) va fi nemărginită.

Exemplul 2.9.9.

Să considerăm sistemul mecanic din Exemplul 2.3.1, pentru care dependenţa de timp a deplasării punctului A faţă de originea O are expresia

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{k_e}{\gamma}(t-\tau)} F(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \,,$$

atunci când deplasarea iniţială este nulă, adică $x(t_0) = 0$. Pentru a aplica definiţia stabilităţii în sensul intrare mărginită – ieşire mărginită, considerăm o constantă arbitrară $L > 0$ care mărgineşte modulul forţei $F(t)$ ce acţionează asupra sistemului, adică, indiferent de evoluţia în timp a acestei forţe, avem satisfăcută condiţia $|F(t)| \leq L, \forall \, t \geq t_0$. Să arătăm că în această situaţie de mărginire a mărimii de intrare, mărimea de ieşire satisface condiţia de mărginire:

$$|x(t)| \leq M(L) = \frac{L}{k_e}, \quad \forall t \geq t_0 \,.$$

Într-adevăr, utilizând proprietăţile integralei, putem scrie:

$$|x(t)| \le \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{k_e}{\gamma}(t-\tau)} |F(\tau)| d\tau \le \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{ke}{\gamma}(t-\tau)} L d\tau \le \frac{L}{k_e}\left(1 - e^{\frac{k_e}{\gamma}(t_0 - t)}\right) \le \frac{L}{k_e}, \quad \forall t \ge t_0 .$$

Rezultă, aşadar, că sistemul mecanic considerat este stabil extern, constatare ce confirmă intuiția fizică conform căreia deplasarea punctului A va fi întotdeauna mărginită, atâta vreme cât forța $F(t)$ ce acționează asupra sistemului este mărginită ca amplitudine.

Exemplul 2.9.10.

Să considerăm un condensator electric conectat la o sursă ideală de curent, conform fig. 2.2.2 din Exemplul 2.2.2. Dacă la momentul inițial t_0, tensiunea pe condensator este nulă, atunci la orice moment de timp ulterior $t \ge t_0$, tensiunea pe condensator va fi dată de:

$$x(t) = \frac{1}{C_e}\int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau, \quad t \ge t_0 .$$

Să presupunem că sursa ideală de curent furnizează mărimea de intrare de tip treaptă:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \ge t_0 \end{cases},$$

care, în mod evident, este o mărime mărginită, satisfăcând $|i(t)| \le 1, \forall t \ge t_0$. Mărimea de ieşire ce rezultă pentru acest semnal de intrare va fi:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ (1/C_e)(t - t_0), & t \ge t_0 \end{cases},$$

care nu este mărginită. Într-adevăr, oricare ar fi $M>0$ (în sensul oricât de mare), există un moment de timp finit $t_1(M) = t_0 + MC_e \ge t_0$, astfel încât $u(t)>M$ pentru $t>t_1(M)$. Conchidem că sistemul fizic considerat este *instabil extern*, deşi pentru unele clase de semnale de intrare mărginite, ieşirea sistemului este mărginită (cum ar fi, de exemplu, cazul semnalelor de intrare $i(t)$ de forma sinusoidală, pe care cititorul îl poate investiga drept exercițiu).

Din punct de vedere fizic, facem observația că sub raport strict experimental, producerea semnalului de intrare treaptă constituie o idealizare, datorită duratei de timp infinite pe care trebuie furnizat, dar tocmai această idealizare este capabilă să pună în evidență funcționarea de tip intrare mărginită, ieşire nemărginită (adică instabilitatea IMEM a sistemului). Altfel spus, dacă am lua în considerare un semnal de intrare de aceeaşi factură, dar finit ca durată, de forma:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1, & t_0 \le t \le t_1, \\ 0, & t > t_1, \end{cases}$$

ieşirea rezultată:

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ (1/C_e)(t-t_0), & t_0\le t\le t_1,\\ (1/C_e)(t_1-t_0), & t>t_1,\end{cases}$$

nu ar mai fi nemărginită, adică nu am putea pune în evidență instabilitatea externă.

2.9.2.2. Criteriu de stabilitate externă în cazul reprezentărilor liniare

După cum s-a văzut în secțiunea 2.5. a acestui capitol, oricărei reprezentări de stare liniare de forma (2.5.2) şi (2.5.3) i se poate ataşa o descriere de tip operațional de forma (2.5.7), bazată pe *matricea de transfer* **G**(*s*) cu exprimarea (2.5.8). Egalitatea (2.5.7) furnizează o legătură directă între imaginile prin transformată Laplace a vectorului mărimilor de ieşire şi, respectiv, a vectorului mărimilor de intrare, ce caracterizează complet dinamica de regim forțat. Este, aşadar, de aşteptat ca informațiile privind stabilitatea externă să poată fi explorate prin intermediul proprietăților matricei de transfer **G**(*s*). Un criteriu care permite o atare investigație şi cunoaşte o largă aplicabilitate practică testează modul de amplasare a polilor matricei **G**(*s*) în planul complex şi are următoarea formulare:

Un sistem descris prin reprezentarea de stare liniară (2.5.2) şi (2.5.3) este stabil extern dacă şi numai dacă toți polii matricei de transfer **G**(*s*) au partea reală strict negativă (adică sunt plasați în semiplanul complex $\mathrm{Re}\,s<0$).

Demonstrația poate fi uşor schițată în cazul particular al sistemelor monovariabile (cu o singură intrare $u(t)$ şi o singură ieşire $y(t)$). Semnalele $u(t)$ şi $y(t)$ sunt mărginite, dacă şi numai dacă imaginile lor prin transformarea Laplace $U(s)$ şi respectiv $Y(s)$ posedă un număr de poli *simpli* cu partea reală nulă (adică situați pe axa imaginară $\mathrm{Re}\,s=0$), iar toți ceilalți poli (simpli sau multipli) au partea reală strict negativă (adică sunt situați în semiplanul complex $\mathrm{Re}\,s<0$). Matricea de transfer, în acest caz particular, este de fapt o funcție scalară de variabilă complexă s, care asigură legătura $Y(s) = G(s)\,U(s)$. Se observă imediat că satisfacerea mărginirii pentru semnalul $y(t)$ este (în baza celor discutate anterior) echivalentă cu a cere ca funcția produs $G(s)\,U(s)$ să posede un număr de poli *simpli* pe axa imaginară $\mathrm{Re}\,s=0$ şi toți ceilalți poli ai săi să fie situați în semiplanul complex $\mathrm{Re}\,s<0$. Aşadar, singura contribuție la structura polilor care este admisă pentru funcția $G(s)$, este cu toți polii situați în semiplanul $\mathrm{Re}\,s<0$. Pe acelaşi principiu se poate construi demonstrația şi în cazul general, multivariabil, cititorul interesat putând consulta în acest sens lucrarea (Voicu, 1986).

Din construcția matricei de transfer **G**(*s*) conform (2.5.8), reiese că polii lui $G(s)$ sunt, totodată, autovalori ale matricei **A** din reprezentarea de stare (2.5.2) şi (2.5.3), întrucât $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\left(1/\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\right)\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$. Atragem atenția că afirmația inversă nu este, în general, adevărată, adică nu orice valoare proprie a lui **A** este, în mod obligatoriu, pol al lui **G**(*s*). Existența unor valori proprii ale lui **A** care nu sunt poli ai lui **G**(*s*) se datorează faptului că, în construcția lui **G**(*s*) conform (2.5.8), pot apărea simplificări ale unor factori (ce inițial apar la numitor din dezvoltarea lui $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$, dar, totodată, sunt prezenți şi la numărătorii fracțiilor ce definesc elementele matricei **G**(*s*)). Problematica de acest tip este legată de proprietățile structurale denumite "controlabilitate" şi "observabilitate" (Ionescu, 1985) ale reprezentărilor liniare de stare şi detalierea ei ar depăşi cadrul ce ni l-am propus pentru lucrarea de față).

Astfel, limitându-ne doar la constatările anterioare, de ordin general, care justifică relația de incluziune a mulțimii polilor lui **G**(*s*) în mulțimea valorilor proprii a matricei **A**,

putem formula următoarea *condiție suficientă* de stabilitate externă, bazată pe caracterul global al stabilității interne.

Dacă un sistem descris prin reprezentarea de stare liniară (2.5.2) şi (2.5.3) este *global asimptotic stabil intern*, atunci acel sistem este *stabil extern*. (Reciproca nu este, în general, adevărată). Demonstrația acestei afirmații este imediată, ținând cont de cele discutate în paragraful anterior privind globalitatea stabilității asimptotice care înseamnă că toate valorile proprii ale matricei **A** sunt plasate în semiplanul complex $\mathrm{Re}\, s < 0$, asigurând aceeaşi manieră de plasare şi pentru polii lui **G**(*s*) indiferent de simplificările ce pot apărea în structura lui **G**(*s*)).

Exemplul 2.9.11.

Să considerăm circuitul electric din Exemplul 2.4.1., pentru care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv) discutat în acel exemplu. În baza Exemplului 2.4.5, descrierea de tip operațional a transferului intrare-ieşire se realizează prin intermediul funcției de transfer:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + (R_e/L)s + (1/LC_e)}$$

care are doi poli, ambii cu partea reală strict negativă. Rezultă, astfel, că sistemul posedă o comportare stabilă în sensul intrare mărginită – ieşire mărginită (ceea ce este în deplină concordanță cu intuiția fizică referitoare la funcționarea circuitului).

La aceeaşi concluzie se poate ajunge utilizând discuția referitoare la stabilitatea internă din exemplul 2.9.5 în care am arătat că sistemul este global asimptotic stabil. Drept urmare, sistemul va fi şi stabil extern.

Exemplul 2.9.12.

Să reluăm Exemplul 2.9.10 care face referire la un condensator electric conectat la o sursă ideală de curent, conform Exemplului 2.2.2. Descrierea operațională a transferului intrare – ieşire în regim forțat se realizează prin funcția de transfer $G(s) = 1/(C_e s)$, al cărui unic pol $s = 0$ nu are partea reală strict negativă. Rezultă că sistemul nu este stabil extern, concluzie la care s-a ajuns şi în Exemplul 2.9.10. Mai mult, dacă vom considera un semnal de intrare $i(t)$ treaptă de durată infinită (ca în prima parte a Exemplului 2.9.10), acest semnal va avea transformata Laplace $\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{1}{s}$, iar produsul $G(s)\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$ (care defineşte imaginea semnalului de ieşire $u(t)$) va avea un pol dublu în $s = 0$, arătând că $u(t)$ nu este un semnal mărginit. De asemenea, amintim că în contextul analizei stabilității interne din Exemplul 2.9.7 s-a arătat că sistemul posedă o infinitate de puncte de echilibru simplu stabile, ceea ce înseamnă că nu are sens utilizarea condiției suficiente de stabilitate externă, bazată pe caracterul global al stabilității interne.

Exemplul 2.9.13.

Considerăm o variantă a circuitului electric din Exemplul 2.4.1, în care nu există elementul de tip rezistor, iar matricea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (iv)

discutat în acel exemplu. Descrierea de tip funcție de transfer construită în Exemplul 2.4.5 își păstrează valabilitatea și în această variantă de circuit, atribuind rezistenței valoarea $R_e = 0$, ceea ce va conduce la:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1/(LC_e)}.$$

Cei doi poli $\pm \mathrm{j}/\sqrt{LC_e}$ ai funcției de transfer nu au partea reală strict negativă, deci sistemul este instabil extern. Mai mult, alegând drept semnal de intrare o tensiune sinusoidală de pulsație exact $1/\sqrt{LC_e}$ (care, evident, este mărginită), tensiunea pe bobină va fi un semnal nemărginit, deoarece imaginea Laplace a semnalului de ieşire va avea poli dubli în $\pm \mathrm{j}/\sqrt{LC_e}$. Recomandăm cititorului studiul detaliat al comportării circuitului pentru acest caz care demonstrează că există semnale de intrare mărginite pentru care semnalele de ieşire sunt nemărginite. Cazul acesta particular de comportare corespunde fenomenului cunoscut sub denumirea de "rezonanță pură", când excitarea provenită de la semnalul de intrare sinusoidal coincide, ca frecvență, cu "disponibilitatea" de a oscila a sistemului însuşi. Evident, fenomenul discutat include o doză de idealizare prin aceea că pierderile de energie sunt considerate nule în absența rezistorului (adică $R_e = 0$), ceea ce nu se poate întâmpla în desfăşurarea unui experiment real.

În final mai precizăm că nu are sens utilizarea condiției suficiente de stabilitate externă, bazată pe caracterul global al stabilității interne, deoarece, în Exemplul 2.9.6 s-a arătat că originea spațiului $\mathbf{R}^2$ este singurul punct de echilibru al sistemului, având tipul *simplu stabil* (şi nu asimptotic stabil ca în cazul când $R_e \neq 0$).

2.9.3. Criteriul Hurwitz privind poziția rădăcinilor unui polinom în planul complex

Din paragrafele anterioare ale acestei secțiuni a reieşit faptul că, în cazul modelelor liniare, analiza atât a stabilității interne cât şi a stabilității externe face apel la studierea modului în care sunt situate în planul complex rădăcinile polinoamelor cu coeficienți reali. Dat fiind un polinom oarecare cu coeficienți reali, un atare studiu nu presupune determinarea efectivă a rădăcinilor acestuia, ci numai posibilitatea de a preciza poziția dacă rădăcinile au partea reală negativă, ori, altminteri spus, dacă rădăcinile sunt situate în semiplanul complex negativ (sau semiplanul complex stâng). O astfel de investigație de *factură algebrică* poate fi întreprinsă cu ajutorul următorului criteriu, cunoscut sub denumirea de *criteriul Hurwitz*:

Polinomul monic (cu coeficientul dominant egal cu 1)

$$\begin{aligned} P(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots \\ &\quad + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n, \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{2.9.10}$$

are toate rădăcinile situate în semiplanul complex $\mathrm{Re}\, s < 0$, dacă şi numai dacă toți minorii principali selectați din matricea pătrată $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ definită mai jos sunt strict pozitivi, unde:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}, \tag{2.9.11}$$

iar minorii principali au forma:

$$H_1=a_1,\quad H_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix},\quad H_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$H_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix},\cdots,\quad H_n=\det(\mathbf{H}). \tag{2.9.12}$$

Cititorul interesat în demonstrația acestui rezultat poate consulta (Voicu, 1986).

În aplicații practice, construcția matricei $\mathbf{H}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ definită prin (2.9.11) se recomandă a fi realizată astfel. Mai întâi, se plasează *pe diagonala principală* cei *n* coeficienți ai polinomului *P*(*s*), în ordinea descrescătoare a puterilor, $a_1,\cdots,a_n$. Ulterior, fiecare coloană se completează, *în jos*, cu coeficienții lui *P*(*s*) corespunzători puterilor mai mari, iar *în sus*, cu coeficienții lui *P*(*s*) corespunzători puterilor mai mici (prin raportare la elementul deja existent, ca aparținând diagonalei principale). Pe fiecare coloană, după epuizarea coeficienților lui *P*(*s*) se vor scrie zerouri în toate pozițiile rămase necompletate.

Exemplul 2.9.14.

Se consideră sistemul mecanic din fig. 5.4.19, pentru care, în Exemplul 5.4.3 din Capitolul 5, este construită următoarea ecuație vectorial-matriceală de stare de forma (2.4.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{F}_5 \\ \dot{v}_7 \\ \dot{F}_8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1/m_2 & 0 & 0 \\ k_{e_2} & -k_{e_2}/\gamma & -k_{e_2} & 0 \\ 0 & 1/m_1 & 0 & -1/m_1 \\ 0 & 0 & k_{e_1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ F_5 \\ v_7 \\ F_8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1/m_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}F(t).$$

Considerând sistemul izolat față de mărimea de intrare (adică *F*(*t*)=0 în ecuația de mai sus), studierea stabilității interne revine la a analiza poziționarea autovalorilor, care sunt date

de rădăcinile polinomului caracteristic:

$$s^4 + s^3 \frac{k_{e_2}}{\gamma} + s^2 \left(\frac{k_{e_1}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} \right) + s \frac{k_{e_1} \cdot k_{e_2}}{m\gamma} + \frac{k_{e_1} \cdot k_{e_2}}{m_1 m_2} = 0 .$$

Calculul efectiv al acestor rădăcini nu este posibil în forma parametrizată pe care o au coeficienții polinomului caracteristic, dar, prin aplicarea criteriului Hurwitz se poate verifica faptul că ele sunt situate în semiplanul complex negativ ($\mathbf{C}^-$). În acest scop, se construieşte matricea $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ conform (2.9.11):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{\gamma} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_{e_1}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k_{e_1}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Primul minor principal este:

$$k_{e_2} / \gamma > 0 .$$

Al doilea minor principal este:

$$\begin{vmatrix} \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{\gamma} \\ 1 & \frac{k_{e_1}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} \end{vmatrix} = \frac{k_{e_2}}{\gamma} \left(\frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} \right) > 0 .$$

Al treilea minor principal este:

$$\begin{vmatrix} \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{\gamma} & 0 \\ 1 & \frac{k_{e_1}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{m_1} \\ 0 & \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{\gamma} \end{vmatrix} = \left(\frac{k_{e_2}}{\gamma} \right)^2 \frac{k_{e_1}}{m_1} \cdot \frac{k_{e_2}}{m_1} > 0 .$$

Al patrulea minor principal este:

$$\begin{vmatrix} \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1}\cdot\frac{k_{e_2}}{\gamma} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_{e_1}}{m_1}+\frac{k_{e_2}}{m_1}+\frac{k_{e_2}}{m_2} & \frac{k_{e_1}}{m_1}\cdot\frac{k_{e_2}}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_{e_2}}{\gamma} & \frac{k_{e_1}}{m_1}\cdot\frac{k_{e_2}}{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k_{e_1}}{m_1}+\frac{k_{e_2}}{m_1}+\frac{k_{e_2}}{m_2} & \frac{k_{e_1}}{m_1}\cdot\frac{k_{e_2}}{m_2} \end{vmatrix} = \left(\frac{k_{e_2}}{\gamma}\right)^2\left(\frac{k_{e_1}}{m_1}\right)^2\left(\frac{k_{e_2}}{m_2}\right)^2 > 0 .$$

Am probat astfel că toți cei 4 minori principali ce pot fi selectați din matricea $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ construită mai sunt sunt strict pozitivi, ceea ce este echivalent cu situarea tuturor valorilor proprii ale sistemului studiat în semiplanul complex Re $s < 0$. Concluzionăm că originea spațiului $\mathbf{R}^4$ este punct de echilibru global asimptotic stabil pentru sistemul luat în discuție.

3 Trecere în revistă sistematizată a unor relaţii fundamentale din fizică

Pe parcursul acestui capitol vom trece în revistă o serie de relaţii fundamentale din următoarele domenii ale fizicii, domenii care sunt cel mai frecvent vizate în activitatea de modelare a sistemelor tehnice: (1) circuite electrice; (2) sisteme mecanice (în mişcare de translaţie şi în mişcare de rotaţie); (3) fluide necompresibile; (4) sisteme termice.

Această trecere în revistă se va realiza într-o manieră unitară, în sensul că pentru toate domeniile luate în discuţie se are în vedere un plan comun de expunere, structurat conform problematicii generale de mai jos:

a) mărimi (variabile) specifice domeniului studiat
b) elemente cu acţiuni tipice în procesarea energiei
c) joncţiuni (conectări) tipice de elemente, care conservă puterea.

Modalitatea de tratare este specifica aplicaţiilor inginereşti în care se preferă utilizarea *modelelor cu parametrii concentraţi* (a se vedea clasificarea din paragraful 1.1.4 al Capitolului 1). Astfel, în abordarea fluidelor necompresibile şi a sistemelor termice, modelele cu parametrii concentraţi constituie bune aproximări ale descrierilor cu parametrii distribuiţi (la care se face apel în formulările matematice mai detaliate).

Problematica menţionată se detaliază într-o manieră sistematică, ce permite punctarea obiectivelor discuţiei printr-un *set de abrevieri* sugestive, uşor de identificat în întreaga economie a textului şi anume:

a) Mărimi fizice specifice domeniului studiat

(VP) *Variabilele puterii* – mărimi ce caracterizează puterea P, sub forma produsului

$$\mathsf{P} = e(t) f(t),$$

(e) – mărime generică numită *efort*, notată $e(t)$,
(f) – mărime generică numită *flux*, notată $f(t)$.

(VE) *Variabilele energiei* – mărimi ce caracterizează acumularea variabilelor puterii (VP)

(p) – mărime generică numită *impuls generalizat* ce caracterizează acumularea variabilei de tip (e) prin:

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} e(\tau) d\tau + p(t_0),$$

(q) – mărime generică numită *deplasare generalizată* ce caracterizează acumularea variabilei de tip (f) prin:

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau + q(t_0) .$$

b) Elemente cu acțiuni tipice în procesarea energiei

(I) Elemente ce realizează *acumularea de tip inductiv* sau *inerțial* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*p*)):
(I-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă).
(I|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul liniar.
(I-E) Energia acumulată.
(I|L-E) Energia acumulată în cazul liniar.

(C) Elemente ce realizează *acumularea de tip capacitiv* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*q*)):
(C-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă).
(C|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul liniar.
(C-E) Energia acumulată.
(C|L-E) Energia acumulată în cazul liniar.

(R) Elemente ce realizează *disiparea energiei* prin comportare de tip rezistiv:
(R-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă).
(R|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul liniar.
(R-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată).
(R|L-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată) în cazul liniar.

(S_e) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*e*) prestabilită-*surse de efort*.

(S_f) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*f*) prestabilită-*surse de flux*.

(TF) Elemente ce conservă energia realizând *transformarea variabilelor puterii* prin legarea variabilelor de tip (*e*) între ele şi a variabilelor de tip (*f*) între ele.

(GY) Elemente ce conservă energia realizând *transformarea variabilelor puterii* prin legarea variabilelor de tip (*e*) de variabilele de tip (*f*).

c) Joncțiuni (conectări) tipice de elemente, care conservă puterea

(J0) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*e*).

(J1) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*f*).

În secțiunile acestui capitol, pe lângă abrevierile prezentate mai sus, se va face apel şi la altele mai noi, ale căror semnificații vor fi introduse în mod natural, drept consecințe ale necesității de rafinare şi diferențiere.

Organizarea materialului pe secțiuni este următoarea:

3.1. Circuite electrice.
3.2. Sisteme mecanice.
3.3. Fluide necompresibile.

3.4. Sisteme termice.
3.5. Transferul puterii între subsisteme de natură fizică diferită.

3.1. Circuite electrice

În cadrul acestei secțiuni, trecerea în revistă pe baza planului comun precizat la începutul capitolului curent, se referă la circuitele electrice.

a) Mărimi fizice specifice

(VP) Variabilele puterii:

(e) Denumire variabilă: *potențial electric*, *tensiune electrică* sau *diferență de potențial*.
Notație uzuală: V, $u = \Delta V$.
Unitate de măsură în sistemul S.I.: Volt [V] = [m^2 kg/As^3].

(f) Denumire variabilă: *curent electric* sau *intensitatea curentului electric*.
Notație uzuală: i.
Unitate de măsură în S.I.: Ampère [A] - unitate fundamentală.

(VE) Variabilele energiei:

(p) Denumire variabilă : *flux magnetic*.
Notație uzuală: Φ.
Unitate de măsură în S.I.: Weber[Wb] = [Vs] = [m^2kg/As^2].

(p|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau + \Phi(t_0)\,. \tag{3.1.1}$$

(p|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$u(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t)\,. \tag{3.1.2}$$

(q) Denumire variabilă: *sarcină electrică*.
Notație uzuală: Q sau q.
Unitatea de măsură în S.I.: Coulomb[C] = [As].

(q|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau + Q(t_0)\,. \tag{3.1.3}$$

(q|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$i(t) = \frac{d}{dt}Q(t)\,. \tag{3.1.4}$$

b) Elemente cu acțiuni tipice în procesarea energiei

(I) Elemente ce realizează *acumularea de tip inductiv* sau *inerțial* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*p*)):

Exemplu tipic: Bobină (fig.3.1.1)

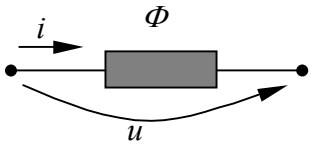


Fig. 3.1.1. Reprezentarea schematizată a unei bobine

(I-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_I(\Phi, i) = 0\,. \tag{3.1.5}$$

(I-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul general neliniar (lege constitutivă) – exprimare în *cauzalitate integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*p*)):

$$i = \Psi_I^i(\Phi)\,, \tag{3.1.6}$$

sau

$$i(t) = \Psi_I^i\left(\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau + \Phi(t_0)\right). \tag{3.1.7}$$

(I-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în *cauzalitate derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$\Phi = \Psi_I^d(i)\,, \tag{3.1.8}$$

sau

$$u(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\Psi_I^d\left(i(t)\right). \tag{3.1.9}$$

(I|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$\Phi - L\,i = 0\,;\ \Psi_I(\Phi, i) = \Phi - Li\,. \tag{3.1.10}$$

Denumire parametru *L*: *inductanță*.
Unitate de măsură în S.I.: Henry [H] = [Vs|A] = [m^2kg/A^2s^2].

(I|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*p*)):

$$i = \frac{1}{L}\Phi\,;\ \Psi_I^i(\Phi) = \frac{1}{L}\Phi\,, \tag{3.1.11}$$

sau

$$i(t) = \frac{1}{L}\left(\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau + \Phi(t_0)\right). \tag{3.1.12}$$

(I|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$\Phi = L\,i\,;\ \Psi_I^d(i) = L\,i\,, \tag{3.1.13}$$

sau

$$u(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = L\frac{d}{dt}i(t)\,. \tag{3.1.14}$$

(I-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{t_0}^{t} i(\tau)u(\tau)d\tau=\int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} i(\Phi)d\Phi=\int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} \Psi_I^i(\Phi)d\Phi\,. \qquad (3.1.15)$$

(I|L-E) Energia acumulată în cazul liniar:

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)}\frac{1}{L}\Phi\,d\Phi=\frac{1}{2L}\Phi^2\Big|_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)}=\frac{L}{2}i^2\Big|_{i(t_0)}^{i(t)}. \qquad (3.1.16)$$

(C) Elemente ce realizează *acumularea de tip capacitiv* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (q)):
Element tipic: condensator (fig. 3.1.2.)

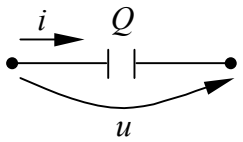


Fig. 3.1.2. Reprezentarea schematică a unui condensator

(C-F) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_C(Q,u)=0\,. \qquad (3.1.17)$$

(C-F|i) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (q)):

$$u(t)=\Psi_C^i(Q)\,, \qquad (3.1.18)$$

sau

$$u(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau+Q(t_0)\right). \qquad (3.1.19)$$

(C-F|d) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (e)):

$$Q=\Psi_C^d(u)\,, \qquad (3.1.20)$$

sau

$$i(t)=\frac{d}{dt}Q(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d\left(u(t)\right). \qquad (3.1.21)$$

(C|L-F) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$Q-C_e u=0\,, \qquad (3.1.22)$$

sau

$$\Psi_C(Q,u)=Q-C_e u\,. \qquad (3.1.23)$$

Denumire parametru C_e: *capacitate electrică*.
Unitate de măsură în S.I.: Farad [F] = [A^2s^4/m^2kg].

(C|L-F|i) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (q)):

$$u = \frac{1}{C_e} Q \; ; \; \Psi_C^i(Q) = \frac{1}{C_e} Q \, , \tag{3.1.24}$$

sau

$$u(t) = \frac{1}{C_e} \left(\int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau + Q(t_0) \right) . \tag{3.1.25}$$

(C|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$Q = C_e u \; ; \; \Psi_C^d(u) = C_e u \, , \tag{3.1.26}$$

sau

$$i(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = C_e \frac{d}{dt} u(t) . \tag{3.1.27}$$

(C-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, i(\tau) d\tau = \int_{Q(t_0)}^{Q(t)} u(Q) dQ = \int_{Q(t_0)}^{Q(t)} \Psi_C^i(Q) dQ \, . \tag{3.1.28}$$

(C|L-E) Energia acumulată în cazul *liniar*:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{Q(t_0)}^{Q(t)} \frac{1}{C_e} Q dQ = \frac{1}{2C_e} Q^2 \Big|_{Q(t_0)}^{Q(t)} = \frac{C_e}{2} u^2 \Big|_{u(t_0)}^{u(t)} . \tag{3.1.29}$$

(R) Elemente ce realizează *disiparea energiei* prin comportare de tip rezistiv:
Exemplu tipic: rezistor (fig. 3.1.3)

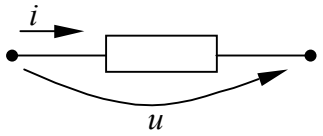


Fig. 3.1.3. Reprezentarea schematizată a unui rezistor

(R-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_R(u, i) = 0 \, . \tag{3.1.30}$$

(R-F|r) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$u = \Psi_R^r(i) \, . \tag{3.1.31}$$

(R-F|c) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$i = \Psi_R^c(u) \, . \tag{3.1.32}$$

(R|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$u - R_e i = 0 \; ; \; \Psi_R(u, i) = u - R_e i \, . \tag{3.1.33}$$

Denumire parametru R_e: *rezistenţă electrică*.
Unitate de măsură în S.I.: Ohm [Ω] = [V/A] = m^2kg/A^2s^3.
Denumire parametru $1/R_e = G$: *conductanţă electrică*.
Unitate de măsură în S.I.: $Ohm^{-1}[\Omega^{-1}]$.

(R|L-F|r) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip(*f*)):

$$u = R_e i\,;\;\; \Psi_R^r(i) = R_e i\,. \tag{3.1.34}$$

(R|L-F|c) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$i = \frac{1}{R_e}u = Gu\,;\; \Psi_R^c(u) = \frac{1}{R_e}u = G_e u\,. \tag{3.1.35}$$

(R-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată):

$$\mathsf{P} = ui = \Psi_R^r(i)i = u\,\Psi_R^c(u)\,. \tag{3.1.36}$$

(R|L-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată) în cazul *liniar*:

$$\mathsf{P} = R_e i^2 = \frac{1}{R_e}u^2 = G_e u^2\,. \tag{3.1.37}$$

(S_e) Elemente ce funcţionează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*e*) prestabilită – *surse de effort*:
Exemplu tipic: sursă ideală de tensiune electrică (fig 3.1.4)

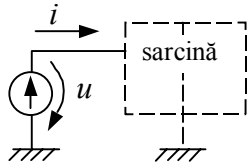


Fig. 3.1.4. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de tensiune electrică

Caracteristică de funcţionare (având cauzalitate unică): $u = u(t)$ prestabilit (impus sarcinii) – mărime cauză; $i(t)$ rezultă din specificul sarcinii – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condiţiile lui $u(t)$ prestabilit.

(S_f) Elemente ce funcţionează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*f*) prestabilită – *surse de flux*:
Exemplu tipic: sursă ideală de curent (fig. 3.1.5)

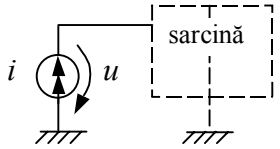


Fig. 3.1.5. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de curent

Caracteristică de funcţionare (având cauzalitate unică): $i = i(t)$ prestabilit (impus sarcinii) – mărime cauză; $u(t)$ rezultă din specificul sarcinii – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condiţiile lui $i(t)$ prestabilit.

(TF) Elemente ce conservă energia realizând *transformarea variabilelor puterii*:
Exemplu tipic: transformator electric (fig.3.1.6)

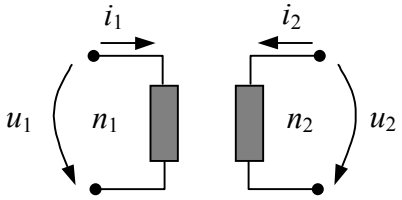


Fig. 3.1.6. Reprezentarea schematizată a unui transformator electric

(TF-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*:

$$u_1 i_1 = u_2 i_2 . \tag{3.1.38}$$

(TF-F|12) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în cauzalitate 1, 2 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 1 este cauză şi cea indexată 2 este efect

$$\begin{aligned} u_2 &= k_{TF}^{1,2} u_1 , \\ i_1 &= k_{TF}^{1,2} i_2 . \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

Denumire parametru $k_{TF}^{1,2}$: *raport de transformare*.

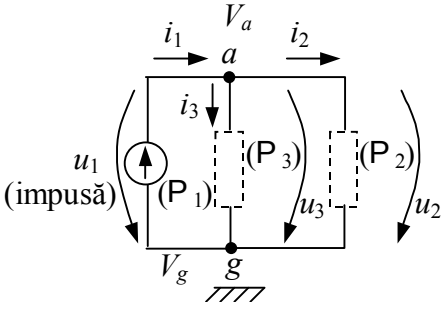
Unitatea de măsura în S.I: adimensional.
Exemplu: În cazul transformatorului din fig. 3.1.6 raportul de transformare este numeric egal cu raportul numărului de spire din cele două înfăşurări (n_2/n_1).

(TF-F|21) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 2,1 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 2 este cauză şi cea indexată 1 este efect

$$u_1 = k_{TF}^{2,1} u_2 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} u_2 , \qquad i_2 = k_{TF}^{2,1} i_1 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} i_1 . \tag{3.1.40}$$

c) Joncțiuni (conectări) tipice de elemente, care conservă puterea

(J0) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*e*)
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematică este dată în fig.3.1.7 (conexiune electrică în paralel).



$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = V_a - V_g , \\ \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = V_a - V_g , \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0. \end{cases}$$

Fig.3.1.7. Reprezentarea schematizată a unei joncțiuni (J0) cu trei elemente

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J0-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*e*) şi legea de conservare a puterii:

$$\begin{cases} u_1 = \ldots = u_j = \ldots = u_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(u_j i_j \right) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.1.41}$$

sau

$$\begin{cases} u_1 = \ldots = u_j = \ldots = u_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j i_j = 0, \qquad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.1.42}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

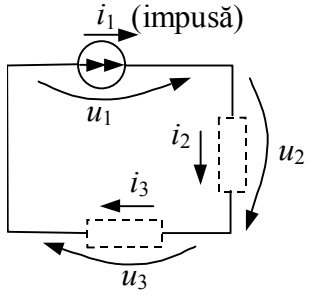
(J0-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (*e*) este impusă de elementul având indicele *k*

$$\begin{cases} u_j = u_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k, \\ i_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j i_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} i_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.1.43}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig.3.1.7., exprimarea cauzală (J0-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} u_2 = u_1, \quad u_3 = u_1, \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases}$$

(J1) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*f*)
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în figura 3.1.8 (conexiune electrică serie).



$$\begin{cases} i_1 = i_2 = i_3, \\ \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} i_1 = i_2 = i_3, \\ u_1 - u_2 - u_3 = 0. \end{cases}$$

Fig.3.1.8. Reprezentarea schematizată a unei joncțiuni (J1) cu trei elemente

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J1-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*f*) şi legea de conservare a puterii:

$$\begin{cases} i_1 = \ldots = i_j = \ldots = i_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (u_j i_j) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.1.44}$$

sau

$$\begin{cases} i_1 = \ldots = i_j = \ldots = i_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.1.45}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice

(J1-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (f) este impusă de elementul având indicele k

$$\begin{cases} i_j = i_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k, \\ u_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j u_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} u_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.1.46}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din figura 3.1.8, exprimarea cauzală (J1-F|k) are loc pentru $k = 1$ ceea ce revine la:

$$\begin{cases} i_2 = i_1, \quad i_3 = i_1, \\ u_1 = u_2 + u_3. \end{cases}.$$

3.2. Sisteme mecanice

În cadrul acestei secțiuni, trecerea în revistă pe baza planului comun precizat la începutul capitolului se referă la sisteme mecanice, primul paragraf ocupându-se de mișcarea de translație iar al doilea de mișcarea de rotație.

3.2.1. Sisteme mecanice în mişcare de translaţie

a) Mărimi fizice specifice

(VP) Variabilele puterii:

(e) Denumire variabilă: *forță*.
Notație uzuală: F.
Unitate de măsură în S.I.: Newton [N]=[kg·m/s^2].

(f) Denumire variabilă: *viteză*.
Notație uzuală: v.
Unitate de măsură în S.I.: [m/s].

(VE) Variabilele energiei:

(p) Denumire variabilă: *impuls*.
Notaţie uzuală: *p*.
Unitate de măsură în S.I.: [Ns]=[kg·m/s].

(p|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + p(t_0)\,. \tag{3.2.1}$$

(p|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$F(t) = \frac{d}{dt}p(t)\,. \tag{3.2.2}$$

(q) Denumire variabilă: *deplasare liniară*.
Notaţie uzuală: *x* sau *s*.
Unitate de măsură în S.I: Metru [m] – unitate fundamentală.

(q|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii de tip (*f*):

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + x(t_0)\,. \tag{3.2.3}$$

(q|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)\,. \tag{3.2.4}$$

b) Elemente cu acţiuni tipice în procesarea energiei

Elemente ce realizează *acumularea de tip inductiv* sau *inerţial* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*p*)):
Exemplu tipic: corp în mişcare de translaţie (fig. 3.2.1)

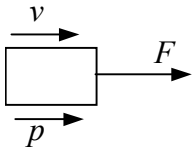


Fig. 3.2.1. Reprezentarea schematizată a unui corp în mişcare de translaţie

(I-F) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_I(p,v) = 0\,. \tag{3.2.5}$$

(I-F|i) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în *cauzalitate integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*p*)):

$$v = \Psi_I^i(p)\,, \tag{3.2.6}$$

sau

$$v(t) = \Psi_I^i\left(\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + p(t_0)\right). \tag{3.2.7}$$

(I-F|d) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în *cauzalitate derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$p = \Psi_I^d(v)\,, \tag{3.2.8}$$

sau

$$F = \frac{d}{dt}p(t) = \frac{d}{dt}\Psi_I^d\big(v(t)\big). \tag{3.2.9}$$

(I|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*

$$p - mv = 0,\ \ \Psi_I(p,v) = p - mv\,. \tag{3.2.10}$$

Denumire parametru *m*: masă
Unitate de măsură în S.I.: [kg] – unitate fundamentală.

(I|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*p*)):

$$v = \frac{1}{m}p,\ \ \Psi_I^i(p) = \frac{1}{m}p\,, \tag{3.2.11}$$

sau

$$v(t) = \frac{1}{m}\left(\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + p(t_0)\right). \tag{3.2.12}$$

(I|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip(*f*)):

$$p = mv,\ \ \Psi_I^d(v) = mv\,, \tag{3.2.13}$$

sau

$$F(t) = \frac{d}{dt}p(t) = m\frac{d}{dt}v(t)\,. \tag{3.2.14}$$

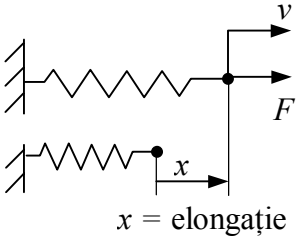
(I-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)F\big(\tau\big)d(\tau) = \int_{p(t_0)}^{p(t)} v(p)dp = \int_{p(t_0)}^{p(t)} \Psi_I^i(p)dp\,. \tag{3.2.15}$$

(I|L-E) Energia acumulată în cazul *liniar*:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{p(t_0)}^{p(t)} \frac{1}{m}pdp = \frac{1}{2m}p^2\Big|_{p(t_0)}^{p(t)} = \frac{m}{2}v^2\Big|_{v(t_0)}^{v(t)}\,. \tag{3.2.16}$$

(C) Elemente ce realizează *acumularea de tip capacitiv* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*q*)):
Exemplu tipic: resort elastic liniar (arc de întindere – compresiune) (fig. 3.2.2)



x = elongație

Fig. 3.2.2. Reprezentarea schematizată a unui resort elastic liniar (arc de întindere - compresiune)

(C-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_C(x,F)=0\,. \tag{3.2.17}$$

(C-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*q*)):

$$F(t)=\Psi_C^i(x)\,, \tag{3.2.18}$$

sau

$$F(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau+x(t_0)\right). \tag{3.2.19}$$

(C-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$x=\Psi_C^d(F)\,, \tag{3.2.20}$$

sau

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d\left(F(t)\right). \tag{3.2.21}$$

(C|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$k_e x-F=0\,, \tag{3.2.22}$$

sau

$$\Psi_C(x,F)=k_e x-F\,. \tag{3.2.23}$$

Denumire parametru k_e: *constantă elastică*.
Unitate de măsură în S.I.: [N/m]=[kg/s^2].

(C|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*q*)):

$$F=k_e x;\quad \Psi_C^i(x)=k_e x\,, \tag{3.2.24}$$

sau

$$F(t)=k_e\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau+x(t_0)\right). \tag{3.2.25}$$

(C|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$x=\frac{1}{k_e}F,\quad \Psi_C^d(F)=\frac{1}{k_e}F\,, \tag{3.2.26}$$

sau

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=\frac{1}{k_e}\frac{d}{dt}F(t)\,. \tag{3.2.27}$$

(C-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{t_0}^{t}F(\tau)v(\tau)d\tau=\int_{x(t_0)}^{x(t)}F(x)dx=\int_{x(t_0)}^{x(t)}\Psi_C^i(x)dx\,. \tag{3.2.28}$$

(C|L-E) Energia acumulată în cazul liniar:

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{x(t_0)}^{x(t)} k_e x dx=\frac{k_e}{2}x^2\Big|_{x(t_0)}^{x(t)}=\frac{1}{2k_e}F^2\Big|_{F(t_0)}^{F(t)}. \qquad (3.2.29)$$

(R) Elemente ce realizează disiparea energiei prin comportare de tip rezistiv:
Exemplu tipic: corp în mişcare de translaţie cu frecare pe o suprafaţă sau într-un mediu fluid (fig.3.2.3).

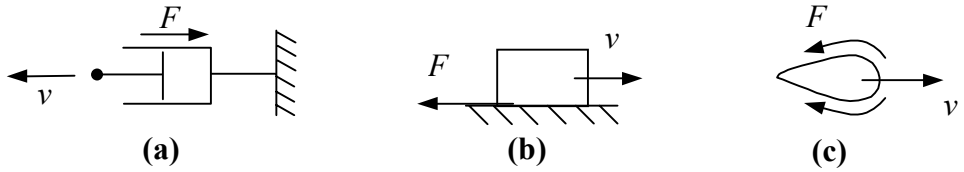


Fig. 3.2.3. Reprezentarea schematizată a unui corp în mişcare de translaţie cu frecare: **(a)** frecare vâscoasă; **(b)** frecare uscată; **(c)** frecare cu fluid

(R-F) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_R(F,v)=0. \qquad (3.2.30)$$

(R-F|r) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$F=\Psi_R^r(v). \qquad (3.2.31)$$

(R-F|c) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$v=\Psi_R^c(F). \qquad (3.2.32)$$

(R|L-F) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* corespunzător frecării vâscoase(lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$F-\gamma v=0,\quad \Psi_R(F,v)=F-\gamma v. \qquad (3.2.33)$$

Denumire parametru γ: *coeficient de frecare vâscoasă la translaţie* (*constantă de amortizare*).
Unitatea de măsură în S.I.: [Ns/m] = [kg/s].

(R|L-F|r) Caracteristică de funcţionare în cazul liniar (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$F=\gamma v,\quad \Psi_R^r(i)=\gamma v. \qquad (3.2.34)$$

(R|L-F|c) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$v=\frac{1}{\gamma}F,\quad \Psi_R^c(F)=\frac{1}{\gamma}F. \qquad (3.2.35)$$

(R-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată):

$$\mathsf{P} = Fv = \Psi_R^r(v)v = F\Psi_R^c(F)\,. \tag{3.2.36}$$

(R|L-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată) în cazul *liniar*:

$$\mathsf{P} = \gamma v^2 = \frac{1}{\gamma}F^2\,. \tag{3.2.37}$$

(S_e) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*e*) prestabilită – *surse de effort*:
Exemplu tipic: forța de greutate ca forță activă (fig. 3.2.4). Această forță este însoțită întotdeauna de o forță de inerție (mobilă cu un element I) care, în acest caz, are sens opus greutății.

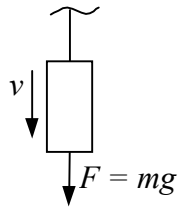


Fig. 3.2.4. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de forță reprezentată printr-o greutate

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $F = F(t)$ prestabilit (impus sistemului) – mărime cauză; $v = v(t)$ rezultă din funcționarea sistemului – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condițiile lui $F(t)$ prestabilit.

(S_f) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*f*) prestabilită – *sursă de flux:*
Exemplu tipic: mecanism cu culisă oscilantă (fig. 3.2.5)

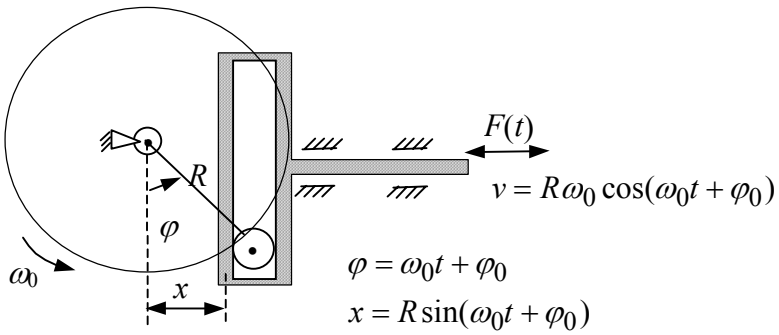


Fig. 3.2.5. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de viteză reprezentată de tija unui mecanism cu culisă

În anumite situații se consideră că asupra unui sistem mecanic se poate acționa cu o viteză prestabilită (cu semnificația de mărime cauză) şi a cărei valoare nu este influențată de comportarea sistemului. De exemplu, dacă mecanismul cu culisă din figura 3.2.5 operează cu ω_0 constant, atunci el poate fi utilizat ca o sursă ideală de viteză cu lege armonică prestabilită, care nu este influențată, între anumite limite, de dinamica sistemului acționat de capătul tijei.
Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $v = v(t)$ prestabilită (impusă sistemului) – mărime cauză; $F(t)$ rezultă din funcționarea sistemului –

mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condițiile $v(t)$ prestabilit.

(TF) Elemente ce conservă energia realizând *transformarea variabilelor puterii*:
Exemple tipice: pârghia în cazul deplasărilor mici (fig. 3.2.6.a); scripetele (fig 3.2.6.b)

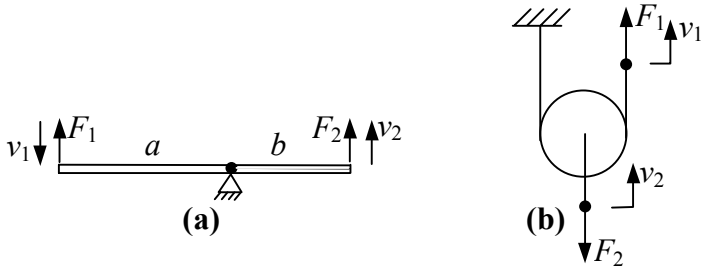


Fig. 3.2.6. Reprezentarea schematizată a unor elementelor ce realizează transformarea variabilelor puterii: **(a)** pârghia; **(b)** scripetele

(TF-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 . \tag{3.2.38}$$

(TF-F|12) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 1, 2 pentru mărimi de tip (e), unde mărimea (e) indexată 1 este cauză şi cea indexată 2 este efect:

$$\begin{aligned} F_2 &= k_{TF}^{1,2} F_1 , \\ v_1 &= k_{TF}^{1,2} v_2 . \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Denumire parametru $k_{TF}^{1,2}$: *raport de multiplicare a forței*.

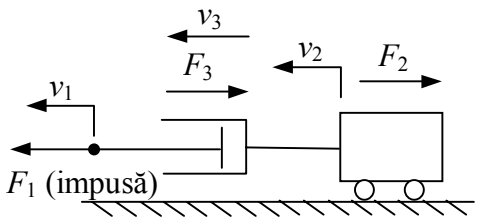
Unitatea de măsură în S.I.: adimensional.
Exemplu: În cazul pârghiei din fig. 3.2.6(a) raportul de multiplicare a forței este numeric egal cu raportul brațelor pârghiei (adică a/b), iar în cazul scripetelui din fig. 3.2.6.(b) este egal cu 2.

(TF-F|21) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 2, 1 pentru mărimi de tip (e), unde mărimea (e) indexată 2 este cauză şi cea indexată 1 este efect:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{TF}^{1,2} F_2 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} F_2 , \\ v_2 &= k_{TF}^{1,2} v_1 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} v_1 . \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

c) Joncțiuni (conectări) tipice de elemente care conservă puterea

(J0) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (e):
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în figura 3.2.7



$$\begin{cases} F_1 = F_2 = F_3, \\ \mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_3 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = F_3, \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.2.7. Reprezentarea schematizată a unei joncțiuni (J0) cu trei elemente

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J0-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*e*) şi legea de conservare a puterii:

$$\begin{cases} F_1 = \ldots = F_j = \ldots = F_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(F_j v_j \right) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.2.41}$$

sau

$$\begin{cases} F_1 = \ldots = F_j = \ldots = F_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.2.42}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

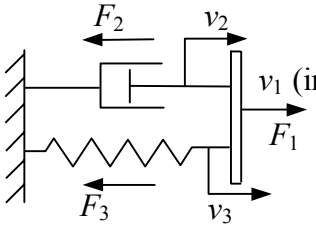
(J0-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (*e*) este impusă de elementul având indicele *k*:

$$\begin{cases} F_j = F_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k \\ v_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j v_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} v_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.2.43}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig. 3.2.7., exprimarea cauzală (J0-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} F_2 = F_1, \quad F_3 = F_1, \\ v_1 = v_2 + v_3. \end{cases}$$

(J1) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*f*):
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în fig. 3.2.8



$$\begin{cases} v_1 = v_2 = v_3, \\ \mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_3 = 0, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} v_1 = v_2 = v_3, \\ F_1 - F_2 - F_3 = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.2.8. Reprezentarea schematizată a unei joncțiuni (J1) cu trei elemente

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J1-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*f*) și legea de conservare a puterii

$$\begin{cases} v_1 = \ldots = v_j = \ldots = v_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(F_j v_j \right) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.2.44}$$

sau

$$\begin{cases} v_1 \ldots = v_j = \ldots = v_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.2.45}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

(J1-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (*f*) este impusă de elementul având indicele *k*:

$$\begin{cases} v_j = v_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k, \\ F_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j F_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} F_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.2.46}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig. 3.2.6, exprimarea cauzală (J1-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} v_2 = v_1, \quad v_3 = v_1, \\ F_1 = F_2 + F_3. \end{cases}$$

3.2.2. Sisteme mecanice în mişcare de rotaţie

a) Mărimi fizice specifice

(VP) Variabilele puterii:

(e) Denumire variabilă: *moment* (cuplu).
Notație uzuală: *M*.
Unitate de măsură în S.I.: [Nm] = [kg·m^2/s^2].

(f) Denumire variabilă: *viteză unghiulară*.
Notație uzuală: ω.
Unitate de măsură în S.I.: [rad/s] = [s^{-1}].

(VE) Variabilele energiei:

(p) Denumire variabilă : *moment cinetic*.
Notație uzuală: *L*.
Unitate de măsură în S.I.: [Nms] = [kgm^2/s].

(p|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} M(\tau) d\tau + L(t_0) . \tag{3.2.47}$$

(p|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$M(t) = \frac{d}{dt} L(t) . \tag{3.2.48}$$

(q) Denumire variabilă : *deplasare unghiulară* (*unghi de rotaţie*).
Notaţie uzuală: θ.
Unitate de măsură în S.I.: [rad].

(q|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) d\tau + \theta(t_0) . \tag{3.2.49}$$

(q|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) . \tag{3.2.50}$$

b) Elemente cu acţiuni tipice în procesarea energiei

(I) Elemente ce realizează *acumularea de tip inductiv* sau *inerţial* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*p*)):
Exemplu tipic: corp în mişcare de rotaţie (fig 3.2.9)

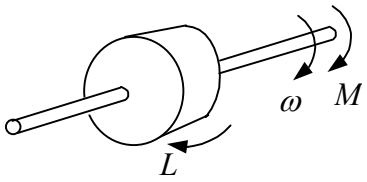


Fig. 3.2.9. Reprezentarea schematizată a unui corp în mişcare de rotaţie

(I-F) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\psi_I(L, \omega) = 0 . \tag{3.2.51}$$

(I-F|i) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) - exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip(*p*)):

$$\omega = \psi_I^i(L) , \tag{3.2.52}$$

sau

$$\omega(t) = \psi_I^i\left(\int_{t_0}^{t} M(\tau) d\tau + L(t_0) \right). \tag{3.2.53}$$

(I-F|d) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) - exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$L = \psi_I^d(\omega) , \tag{3.2.54}$$

sau

$$M(t) = \frac{d}{dt} L(t) = \frac{d}{dt} \psi_I^d\left(\omega(t)\right). \tag{3.2.55}$$

(I|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$L - J\omega = 0\,,\ \ \Psi_I(L,\,\omega) = L - J\omega\,. \tag{3.2.56}$$

Denumire parametru J: *moment de inerție mecanic*.
Unitatea de măsură în S.I.: [kg · m^2].

(I|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (p)):

$$\omega = \frac{1}{J} L\,,\ \ \Psi_I^i(L) = \frac{1}{J} L\,, \tag{3.2.57}$$

sau

$$\omega(t) = \frac{1}{J}\left(\int_{t_0}^{t} M(\tau) d\tau + L(t_0) \right). \tag{3.2.58}$$

(I|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (f)):

$$L = J\omega\ \ ,\ \Psi_I^d(\omega) = J\omega\,, \tag{3.2.59}$$

sau

$$M(t) = \frac{d}{dt} L(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t)\,. \tag{3.2.60}$$

(I-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) M(\tau) d\tau = \int_{L(t_0)}^{L(t)} \omega(L) dL = \int_{L(t_0)}^{L(t)} \Psi_I^i(L) dL\,. \tag{3.2.61}$$

(I|L-E) Energia acumulată în cazul *liniar*:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{L(t_0)}^{L(t)} \frac{1}{J} L dL = \frac{1}{2J} L^2 \Big|_{L(t_0)}^{L(t)} = \frac{J}{2} \omega^2 \Big|_{\omega(t_0)}^{\omega(t)}\,. \tag{3.2.62}$$

(C) Elemente ce realizează *acumularea de tip capacitiv* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (q)):
Element tipic: resort elastic torsionat (arc de torsiune) (fig. 3.2.10)

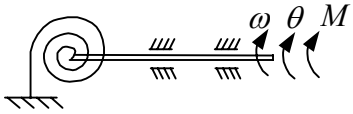


Fig. 3.2.10. Reprezentarea schematizată a unui resort elastic torsionat (arc de torsiune)

(C-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_C\left(\theta, M\right) = 0\,. \tag{3.2.63}$$

(C-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (q)):

$$M(t) = \Psi_C^i(\theta)\,, \tag{3.2.64}$$

sau

$$M(t) = \Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} \omega(\tau)d\tau + \theta(t_0)\right). \tag{3.2.65}$$

(C-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip(*e*)):

$$\theta = \Psi_C^d(M)\,, \tag{3.2.66}$$

sau

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{d}{dt}\Psi_C^d\left(M(t)\right). \tag{3.2.67}$$

(C|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$k_t\theta - M = 0\,, \tag{3.2.68}$$

sau

$$\Psi_C\left(\theta, M\right) = k_t\theta - M\,. \tag{3.2.69}$$

Denumire parametru k_t: *constantă de torsiune*.
Unitatea de măsură în S.I.: [Nm/rad] = [kg · m^2/s^2].

(C|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul liniar (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate integrală (mărimea cauză este variabila de tip (*q*)):

$$M = k_t\theta\,,\ \Psi_C^i(\theta) = k_t\theta\,, \tag{3.2.70}$$

sau

$$M(t) = k_t\left(\int_{t_0}^{t} \omega(\tau)d\tau + \theta(t_0)\right). \tag{3.2.71}$$

(C|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$\theta = \frac{1}{k_t}M\ ,\ \Psi_C^d\left(M\right) = \frac{1}{k_t}M\,, \tag{3.2.72}$$

sau

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{1}{k_t}\frac{d}{dt}M(t)\,. \tag{3.2.73}$$

(C-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} M(\tau)\omega(\tau)d\tau = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} M(\theta)d\theta = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \Psi_C^i(\theta)d\theta\,. \tag{3.2.74}$$

(C|L-E) Energia acumulată în cazul *liniar*:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} k_t\theta d\theta = \frac{k_t}{2}\theta^2\Big|_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} = \frac{1}{2k_t}M^2\Big|_{M(t_0)}^{M(t)}\,. \tag{3.2.75}$$

(R) Elemente ce realizează *disiparea energiei* prin comportare de tip rezistiv:
Exemplu tipic: corp în mişcare de rotaţie cu frecare (fig.3.2.11)

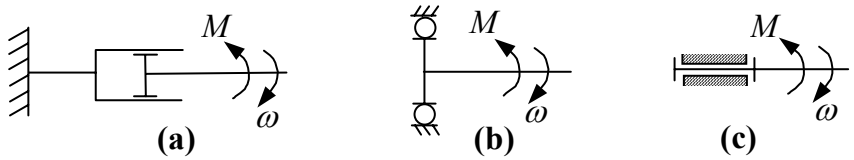


Fig. 3.2.11. Reprezentarea schematizată a unui corp în mişcare de rotaţie cu frecare: **(a)** frecare vâscoasă; **(b)** frecare în lagăr cu rulment; **(c)** frecare în lagăr cu alunecare

(R-F) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_R(M,\omega)=0\,. \tag{3.2.76}$$

(R-F|r) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$M=\Psi_R^r(\omega)\,. \tag{3.2.77}$$

(R-F|c) Caracteristică de funcţionare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$\omega=\Psi_R^c(M)\,. \tag{3.2.78}$$

(R|L-F) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$M-\gamma_t\omega=0\,;\Psi_R(M,\,\omega)=M-\gamma_t\omega\,. \tag{3.2.79}$$

Denumirea parametrului γ_t: *coeficientul de frecare vâscoasă la rotaţie* (*constantă de amortizare la rotaţie*).
Unitatea de măsură în S.I.: [Nms/rad] = [kgm^2/s].

(R|L-F|r) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este de tip (*f*)):

$$M=\gamma_t\omega\,,\ \ \Psi_R^r(\omega)=\gamma_t\omega\,. \tag{3.2.80}$$

(R|L-F|c) Caracteristică de funcţionare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$\omega=\frac{1}{\gamma_t}M\,,\ \ \Psi_R^c(M)=\frac{1}{\gamma_t}M\,. \tag{3.2.81}$$

(R-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată):

$$\mathsf{P}\ =M\omega=\Psi_R^r(\omega)\omega=M\Psi_R^c(M)\,. \tag{3.2.82}$$

(R|L-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată) în cazul *liniar*:

$$\mathsf{P}\ =\gamma_t\omega^2=\frac{1}{\gamma_t}M^2\,. \tag{3.2.83}$$

(S_e) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*e*) prestabilită – *sursă de efort*:
Exemplu tipic: motor care furnizează un cuplu constant la arbore (fig. 3.2.12)

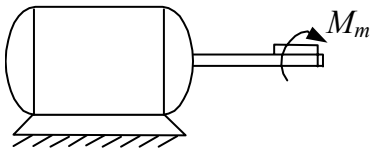


Fig. 3.2.12. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de cuplu reprezentată de un motor ce furnizează un cuplu constant

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $M = M(t)$ prestabilit (impus sistemului) – mărime cauză; $\omega = \omega(t)$ rezultă din funcționarea sistemului – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condițiile lui $M(t)$ prestabilit.

(S_f) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*f*) prestabilită – *sursă de flux*:
Exemplu tipic: motor electric cu turație constantă (fig. 3.2.13)

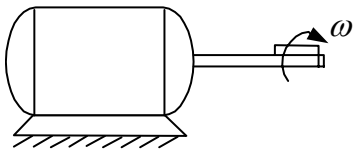


Fig. 3.2.13. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de viteză unghiulară reprezentată de un motor de c.c. al cărui arbore se roteşte cu turaţie constantă

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $\omega = \omega(t)$ prestabilită (impusă sistemului) – mărime cauză; $M(t)$ rezultă din funcționarea sistemului – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condițiile $\omega(t)$ prestabilit.

(TF) Elemente ce conservă energia realizând transformarea variabilelor puterii:
Exemplu tipic: angrenaj (fig. 3.2.14)

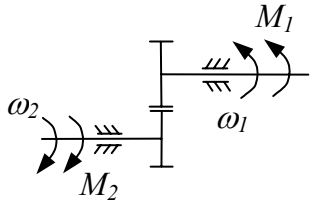


Fig.3.2.14. Reprezentarea schematizată a unui angrenaj

(TF-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*:

$$M_1\omega_1 = M_2\omega_2\,. \tag{3.2.84}$$

(TF-F|12) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 1, 2 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 1 este cauză şi cea indexată 2 este efect:

$$\begin{aligned} M_2 &= k_{TF}^{1,2} M_1, \\ \omega_1 &= k_{TF}^{1,2} \omega_2. \end{aligned} \tag{3.2.85}$$

Denumire parametru $k_{TF}^{1,2}$: *raport de transmisie*.

Unitatea de măsură S.I.: adimensional.

Exemplu: În cazul angrenajului din fig. 3.2.14 raportul de transmisie este numeric egal cu raportul razelor roților (adică R_2/R_1) și se notează uzual i_{12}.

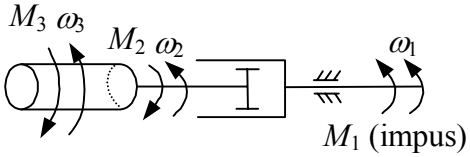
(TF-F|21) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 2, 1 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 2 este cauză și cea indexată 1 este efect:

$$M_1 = k_{TF}^{2,1} M_2 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} M_2, \qquad \omega_2 = k_{TF}^{2,1} \omega_1 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} \omega_1. \tag{3.2.86}$$

c) Joncțiuni (conectări) tipice de elemente, care conservă puterea

(J0) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeași variabilă de tip (*e*):

Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în fig. 3.2.15.



$$\begin{cases} M_1 = M_2 = M_3, \\ \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} M_1 = M_2 = M_3, \\ \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0. \end{cases}$$

Fig.3.2.15. Reprezentare schematizată a unei joncțiuni (J0) cu trei elemente.

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J0-F) Caracteristică de funcționare acauzală a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*e*) și legea de *conservare* a puterii:

$$\begin{cases} M_1 = \ldots = M_j = \ldots = M_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(M_j \omega_j \right) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.2.87}$$

sau

$$\begin{cases} M_1 = \ldots = M_j = \ldots = M_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \omega_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.2.88}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

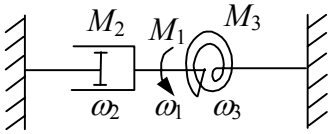
(J0-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (*e*) este impusă de elementul având indicele *k*:

$$\begin{cases} M_j = M_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k, \\ \omega_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j \omega_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} \omega_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.2.89}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig 3.2.15, exprimarea cauzală (J0-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} M_2 = M_1, \;\; M_3 = M_1, \\ \omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \end{cases}$$

(J1) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabila de tip (f):
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în figura 3.2.16



(impusă)

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3, \\ \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 = 0, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3, \\ M_1 - M_2 - M_3 = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.2.16. Reprezentare schematizată a unei joncțiuni J1 cu trei elemente

Cazul general a n elemente conectate:

(J1-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (f) şi legea de conservare a puterii

$$\begin{cases} \omega_1 = \ldots = \omega_j = \ldots = \omega_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(M_j \omega_j \right) = 0, \;\; \alpha_j \in \{-1, +1\}, \end{cases} \tag{3.2.90}$$

sau

$$\begin{cases} \omega_1 = \ldots = \omega_j = \ldots = \omega_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j M_j = 0, \;\; \alpha_j \in \{-1, +1\}, \end{cases} \tag{3.2.91}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

(J1-F|k) Exprimarea *cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (f) este impusă de elementul având indicele k:

$$\begin{cases} \omega_j = \omega_k, \;\; j = 1, \ldots, n, \;\; j \neq k, \\ M_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j M_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} M_j, \;\; \alpha_j, \alpha_k \in \{-1, +1\}. \end{cases} \tag{3.2.92}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig.3.2.16, exprimarea cauzală (J1-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} \omega_2 = \omega_1, \;\; \omega_3 = \omega_1, \\ M_1 = M_2 + M_3. \end{cases}$$

3.3. Fluide necompresibile

În cadrul acestei secțiuni, trecerea în revistă pe baza planului comun precizat la începutul capitolului; se referă la sisteme care operează cu fluide necompresibile.

a) Mărimi fizice specifice

(VP) Variabilele puterii:

(e) Denumire variabilă: *presiune, diferența de presiune*.
Notație uzuală: P, ΔP.
Unitatea de măsură în S.I.: [N/m^2] = [kg/s^{2}m] = [Pa].

(f) Denumire variabilă: *debit volumic*.
Notație uzuală: Q.
Unitatea de măsură în S.I.: [m^3/s].

(VE) Variabilele energiei:

(p) Denumire variabilă: *impulsul presiunii*.
Notație uzuală: p_P.
Unitate de măsură în S.I.: [Ns/m^2] = [kg/sm].
Observație: Acestei mărimi i se poate atribui semnificația de impuls mecanic al unei mase de fluid ce se află la un anumit moment într-o conductă (vezi figura 3.3.1) raportat la aria secțiunii.

(p|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$p_P(t) = \int_{t_0}^{t} \Delta P(\tau)\, d\tau + p_P(t_0)\,. \tag{3.3.1}$$

(p|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*e*):

$$\Delta P(t) = \frac{d}{dt} p_P(t)\,. \tag{3.3.2}$$

(q) Denumire variabilă: *volum*.
Notație uzuală: V.
Unitatea de măsură în S.I.: [m^3].

(q|i) Exprimare sub *formă integrală* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} Q(\tau)\, d\tau + V(t_0)\,. \tag{3.3.3}$$

(q|d) Exprimare sub *formă derivativă* a legăturii cu variabila de tip (*f*):

$$Q(t) = \frac{d}{dt} V(t)\,. \tag{3.3.4}$$

b) Elemente cu acțiuni tipice în procesarea energiei

(I) Elemente ce realizează *acumularea de tip inductiv* sau *inerțial* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*p*)):
Exemplu tipic: tub (conductă) cu scurgere laminară (fig. 3.3.1)

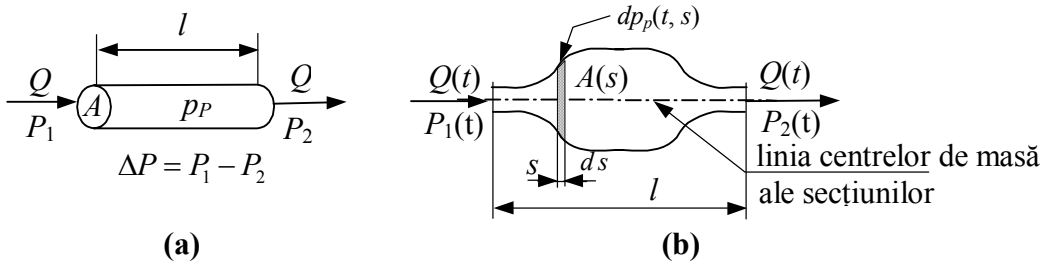


Fig. 3.3.1. Reprezentarea schematizată a unei conducte cu scurgere laminară: **(a)** secțiune constantă; **(b)** secțiune variabilă

(I-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_I(p_P, Q) = 0\,. \tag{3.3.5}$$

(I-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*p*)):

$$Q = \Psi_I^i(p_P)\,, \tag{3.3.6}$$

sau

$$Q(t) = \Psi_I^i\left(\int_{t_0}^{t} \Delta P(\tau)d\tau + p_P(t_0)\right). \tag{3.3.7}$$

(I-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$p_P = \Psi_I^d(Q)\,, \tag{3.3.8}$$

sau

$$\Delta P(t) = \frac{d}{dt}p_P(t) = \frac{d}{dt}\Psi_I^d\left(Q(t)\right). \tag{3.3.9}$$

(I|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$p_P - L_f Q = 0\,,\quad \Psi_I(p_P, \omega) = p_P - L_f Q\,. \tag{3.3.10}$$

Denumire parametru L_f: *inductanța fluidică*.
Unitatea de măsură în S.I.:[kg/m^4].

Observaţie: Pentru conducta din figura 3.3.1a, în cazul secțiunii constante, p_P se poate exprima (în baza remarcii ce însoțește definiția impulsului presiunii), sub forma:

$$p_P(t) = \frac{mv(t)}{A} = \frac{(\rho l A)v(t)}{A} = \frac{\rho l}{A}Av(t)\,, \tag{3.3.11}$$

în care $Av(t)$ este debitul, iar t este timpul. Drept urmare se identifică parametrul L_f ca fiind:

$$L_f = \frac{\rho l}{A}\,. \tag{3.3.12}$$

În cazul în care conducta are secțiune variabilă (figura 3.3.1.b), parametrul L_f se calculează din exprimarea diferențială

$$dp_P(t,s) = \frac{\rho A(s) ds}{A(s)} v(t,s) = \frac{\rho ds}{A(s)} Q(t), \tag{3.3.13}$$

în care s-a ținut cont de faptul că debitul $Q(t) = A(s)v(s)$ este dependent numai de t. Prin integrare după s, din precedenta relație se obține:

$$p_P(t) = \int_0^l \frac{\rho ds}{A(s)} Q(t), \tag{3.3.14}$$

din care rezultă expresia parametrului L_f

$$L_f = \int_0^l \frac{\rho ds}{A(s)}. \tag{3.3.15}$$

(I|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (p)):

$$Q = \frac{1}{L_f} p_P, \quad \Psi_I^i(p_P) = \frac{1}{L_f} p_P, \tag{3.3.16}$$

sau

$$Q(t) = \frac{1}{L_f}\left(\int_{t_0}^t \Delta P(\tau) d\tau + p_P(t_0) \right). \tag{3.3.17}$$

(I|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (f))

$$p_P = L_f Q, \ \Psi_I^d(Q) = L_f Q, \tag{3.3.18}$$

sau

$$\Delta P(t) = \frac{d}{dt} p_P(t) = L_f \frac{d}{dt} Q(t). \tag{3.3.19}$$

(I-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{t_0}^t Q(\tau)\Delta P(\tau) d\tau = \int_{p_P(t_0)}^{p_P(t)} Q(p_P) dp_P = \int_{p_P(t_0)}^{p_P(t)} \Psi_I^i(p_P) dp_P. \tag{3.3.20}$$

(I|L-E) Energia acumulată în cazul liniar:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{p_P(t_0)}^{p_P(t)} \frac{1}{L_f} p_P dp_P = \frac{1}{2L_f} p_P{}^2 \Big|_{p_P(t_0)}^{p_P(t)} = \frac{L_f}{2} Q^2 \Big|_{Q(t_0)}^{Q(t)}. \tag{3.3.21}$$

(C) Elemente ce realizează *acumularea de tip capacitiv* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (q)):
Element tipic: rezervor (fig.3.3.2)

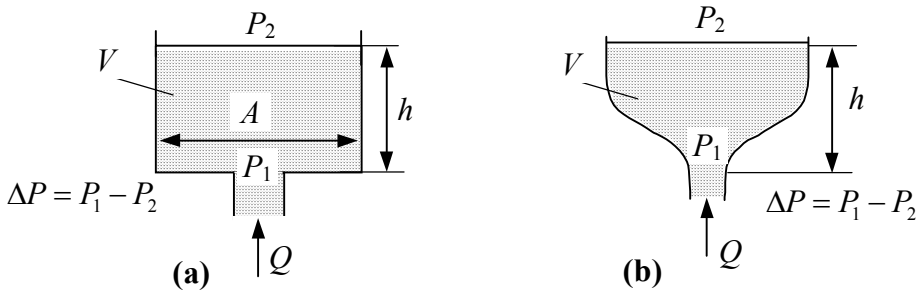


Fig. 3.3.2. Reprezentarea schematizată a unui rezervor:
(a) cu secțiune constantă; **(b)** cu secțiune variabilă

(C-F) Caracteristică de funcționare în cazul *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_c(V, \Delta P) = 0. \tag{3.3.22}$$

Observaţie: În cazul când rezervorul are secțiunea variabilă (figura 3.3.2.b), presiunea ΔP creată de fluid, se exprimă sub forma:

$$\Delta P(t) = \rho g h(t) = \rho g H\big(V(t)\big),$$

unde $H(V(t))$ este o funcție neliniară, care, în general, poate fi explicitată din relația de calcul a volumului.

(C-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (q)):

$$\Delta P = \Psi_C^i(V), \tag{3.3.23}$$

sau

$$\Delta P(t) = \Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} Q(\tau)d\tau + V(t_0)\right). \tag{3.3.24}$$

(C-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (e)):

$$V = \Psi_C^d(\Delta P), \tag{3.3.25}$$

sau

$$Q(t) = \frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\Psi_C^d\big(\Delta P(t)\big). \tag{3.3.26}$$

(C|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*

$$V - C_f \Delta P = 0, \tag{3.3.27}$$

sau

$$\Psi_C(V, \Delta P) = V - C_f \Delta P. \tag{3.3.28}$$

Denumire parametru C_f: *capacitate fluidică*.
Unitatea de măsură în S.I.: [m^4s^2/kg].
Observaţie: Pentru rezervorul cu secțiune constantă din figura 3.3.2.a, presiunea ΔP creată de fluid se poate exprima sub forma

$$\Delta P(t) = \rho g h(t) = \rho g \frac{V(t)}{A} = \frac{\rho g}{A} V(t). \tag{3.3.29}$$

Drept urmare, se identifică parametrul C_f ca fiind

$$C_f = \frac{A}{\rho g}. \tag{3.3.30}$$

(C|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (q)):

$$\Delta P = \frac{1}{C_f} V, \qquad \Psi_C^i(V) = \frac{1}{C_f} V, \tag{3.3.31}$$

sau

$$\Delta P(t) = \frac{1}{C_f}\left(\int_{t_0}^{t} Q(\tau) d\tau + V(t_0) \right). \tag{3.3.32}$$

(C|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (e)):

$$V = C_f \Delta P, \ \Psi_C^d(\Delta P) = C_f \Delta P, \tag{3.3.33}$$

sau

$$Q(t) = \frac{d}{dt} V(t) = C_f \frac{d}{dt} \Delta P(t). \tag{3.3.34}$$

(C-E) Energia acumulată:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Delta P(\tau) Q(\tau) d\tau = \int_{V(t_0)}^{V(t)} \Delta P(V) dV = \int_{V(t_0)}^{V(t)} \Psi_C^i(V) dV. \tag{3.3.35}$$

(C|L-E) Energia acumulată în cazul liniar:

$$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \int_{V(t_0)}^{V(t)} \frac{1}{C_f} V dV = \frac{1}{2C_f} V^2 \Big|_{V(t_0)}^{V(t)} = \frac{C_f}{2} \Delta P^2 \Big|_{\Delta P(t_0)}^{\Delta P(t)}. \tag{3.3.36}$$

(R) Elemente ce realizează *disiparea energiei* prin comportare de tip rezistiv:
Exemplu tipic: conductă lungă de secțiune constantă (fig.3.3.3a), robinet (fig.3.3.3b)

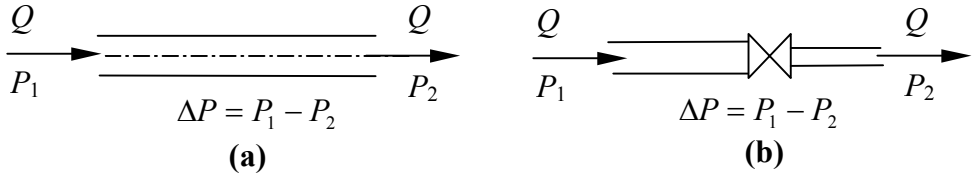


Fig. 3.3.3. Reprezentare schematizată:
(a) conductă lungă de secțiune constantă; **(b)** robinet

(R-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*

$$\Psi_R(\Delta P, Q) = 0. \tag{3.3.37}$$

Observaţie: În cazul când curgerea prin conducta din figura 3.3.3a nu este laminară, diferența de presiune ΔP se poate scrie cu ajutorul expresiei aproximative

$$\Delta P = a_t Q^{7/4}, \tag{3.3.38}$$

unde a_t este o constantă ce se determină experimental (Rosenberg and Karnopp, 1983).

În cazul robinetului din figura 3.3.3 b, pentru diferența de presiune se poate scrie o relație de forma:

$$\Delta P = \frac{\xi \rho}{2A^2} Q^2, \tag{3.3.39.}$$

unde ξ notează coeficientul de rezistență locală a robinetului (stabilit experimental), iar A este aria secțiunii de curgere a fluidului prin robinet (depinzând de gradul de deschidere a robinetului).

(R-F|r) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (f)):

$$\Delta P = \Psi_R^r(Q). \tag{3.3.40}$$

(R-F|c) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (e)):

$$Q = \Psi_R^c(\Delta P). \tag{3.3.41}$$

(R|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$\Delta P - R_f Q = 0, \ \Psi_R(\Delta P, Q) = \Delta P - R_f Q. \tag{3.3.42}$$

Denumire parametru R_f: *rezistență fluidică*.

Unitatea de măsură în S.I.:[kg/sm^4].

Observaţie: În cazul când curgerea prin conducta din figura 3.3.3 a este laminară, diferența de presiune ΔP se poate exprima sub forma (Rosenberg and Karnopp, 1983):

$$\Delta P = \frac{128 \mu l}{\pi d^4} Q, \tag{3.3.43}$$

unde μ este coeficientul de vâscozitate dinamică [Ns/m^2], l este lungimea conductei şi d este diametrul interior al conductei. Prin urmare se identifică parametrul R_f ca fiind:

$$R_f = \frac{128 \mu l}{\pi d^4}, \tag{3.3.44}$$

(R|L-F|r) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (f):

$$\Delta P = R_f Q, \ \Psi_R^r(Q) = R_f Q. \tag{3.3.45}$$

(R|L-F|c) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$Q = \frac{1}{R_f}\Delta P\,,\quad \Psi_R^c(\Delta P) = \frac{1}{R_f}\Delta P\,. \tag{3.3.46}$$

(R-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată)

$$\mathsf{P} = \Delta P Q = \Psi_R^r(Q)Q = \Delta P\,\Psi_R^c(\Delta P)\,. \tag{3.3.47}$$

(R|L-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată) în cazul liniar

$$\mathsf{P} = R_f Q^2 = \frac{1}{R_f}\Delta P^2\,. \tag{3.3.48}$$

(S_e) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*e*) prestabilită – *surse de efort*

Exemple tipice: un rezervor cu fluid la nivel constant (fig.3.3.4a.) şi pompa centrifugă (fig.3.3.4.b)

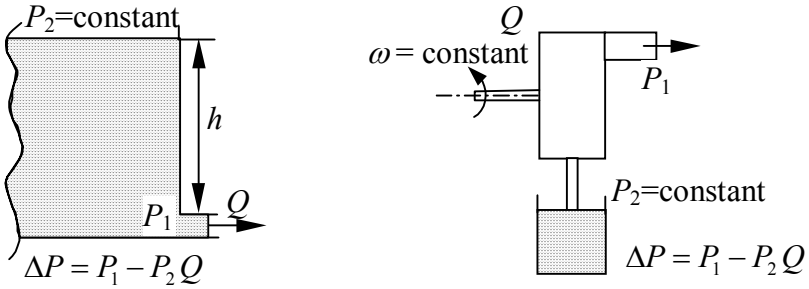


Fig. 3.3.4. Reprezentarea schematizată:
(a) rezervor cu fluid la nivel constant; **(b)** pompă centrifugă

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $\Delta P = \Delta P(t)$ prestabilit (impus sistemului) – mărime cauză; $Q(t)$ rezultă din funcționarea sistemului – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condițiile lui $\Delta P(t)$ prestabilit.

(S_f) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*f*) prestabilită – *surse de flux*:

Exemplu tipic: pompa cu pistonaşe (fig. 3.3.5)

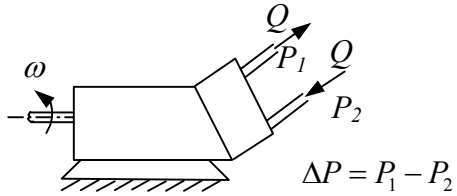


Fig. 3.3.5. Reprezentarea schematizată a unei pompe cu pistonaşe

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $Q = Q(t)$ prestabilită (impusă sistemului) – mărime cauză; $\Delta P(t)$ rezultă din funcționarea sistemului – mărime efect. Se consideră că o astfel de sursă poate furniza orice putere în condițiile $Q(t)$ prestabilit.

(TF) Elemente ce conservă energia realizând *transformarea variabilelor puterii*:
Exemplu tipic: transformator hidraulic (fig. 3.3.6)

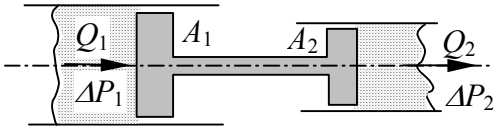


Fig. 3.3.6. Reprezentarea schematizată a unui transformator hidraulic

(TF-F) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*:

$$\Delta P_1 Q_1 = \Delta P_2 Q_2 . \tag{3.3.49}$$

(TF-F|12) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 1, 2 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 1 este cauză şi cea indexată 2 este efect:

$$\Delta P_2 = k_{TF}^{1,2} \Delta P_1 , \tag{3.3.50}$$

$$Q_1 = k_{TF}^{1,2} Q_2 . \tag{3.3.51}$$

Denumire parametru $k_{TF}^{1,2}$: *raport de transformare*.

Unitatea de măsură în S.I.: adimensional.

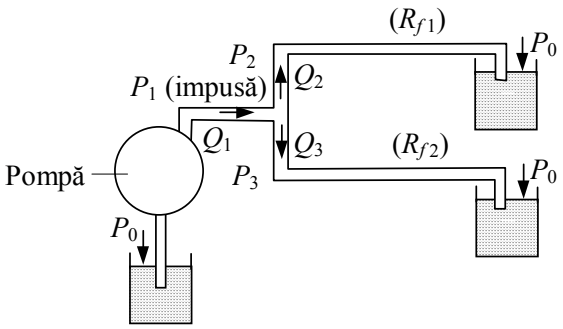
Exemplu: În cazul transformatorului hidraulic din fig. 3.3.6, raportul de transformare este numeric egal cu raportul ariilor pistoanelor (A_1/A_2).

(TF-F|21) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 2, 1 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 2 este cauză şi cea indexată 1 este efect:

$$\Delta P1 = k_{TF}^{2,1} \Delta P_2 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} \Delta P_2 , \qquad Q_1 = k_{TF}^{2,1} Q_2 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} Q_2 . \tag{3.3.52}$$

c) Joncţiuni (conectări) tipice de elemente care conservă puterea

(J0) Joncţiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*e*):
Exemplu: În cazul conectării a trei elemente, reprezentarea schematică este dată în figura 3.3.7.



$$\begin{cases} \Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P_3 , \\ \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P_3 , \\ Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.3.7. Reprezentarea schematizată de conectare a trei elemente la aceeaşi presiune (joncţiune (J0))

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J0-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*e*) şi legea de conservare a puterii:

$$\begin{cases} \Delta P_1 = \ldots = \Delta P_j = \ldots = \Delta P_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\Delta P_j Q_j \right) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1, +1\}, \end{cases} \tag{3.3.53}$$

sau

$$\begin{cases} \Delta P_1 = \ldots = \Delta P_j = \ldots \Delta P_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.3.54}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

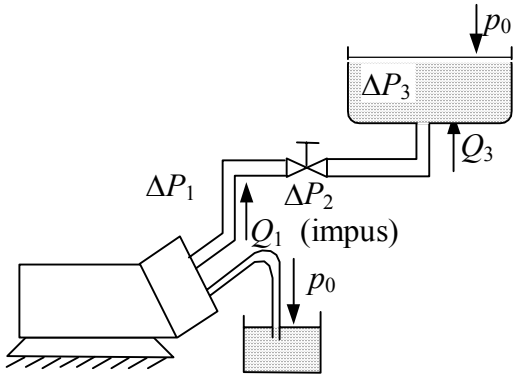
(J0-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (*e*) este impusă de elementul având indicele *k*.

$$\begin{cases} \Delta P_j = \Delta P_k, \quad j = 1, \ldots, n, \quad j \neq k, \\ Q_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j Q_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} Q_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.3.55}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig.3.3.7, exprimarea cauzală (J0-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} P_2 = P_1, \quad P_3 = P_1, \\ Q_1 = Q_2 + Q_3. \end{cases}$$

(J1) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*f*):
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în figura 3.3.8.



$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = Q_3, \\ \mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_3 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = Q_3, \\ \Delta P_1 - \Delta P_2 - \Delta P_3 = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.3.8. Reprezentarea schematizată a unei joncțiuni (*J*1) cu trei elemente

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J1-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a joncțiunii (conectării) – egalitatea variabilelor de tip (*f*) şi legea de conservare a puterii:

$$\begin{cases} Q_1 = \ldots = Q_j = \ldots = Q_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\Delta P_j Q_j \right) = 0, \quad \alpha_j \in \{-1, +1\}, \end{cases} \tag{3.3.56}$$

sau

$$\begin{cases} Q_1 = \ldots = Q_j = \ldots Q_n, \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Delta P_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1, +1\}, \end{cases} \tag{3.3.57}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

(J1-F|k) *Exprimare cauzală* a legii de funcționare a joncțiunii (conectării) când variabila de tip (*f*) este impusă de elementul având indicele *k*:

$$\begin{cases} Q_j = Q_k, j = 1, \ldots, n, \quad j \neq k, \\ \Delta P_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j \Delta P_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} \Delta P_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1, +1\}. \end{cases} \tag{3.3.58}$$

Exemplu: În cazul conectării celor trei elemente din fig.3.3.8, exprimarea cauzală (J1–F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} Q_2 = Q_1, \quad Q_3 = Q_1, \\ \Delta P_1 = \Delta P_2 + \Delta P_3. \end{cases}.$$

3.4. Sisteme termice

În cele ce urmează ne referim la două modalități de abordare a sistemelor termice bazate pe noțiunea de entropie şi respectiv pe cea de cantitate de căldură. Întrucât abordarea bazată pe entropie face apel la descrieri matematice care diferă în raport cu descrierile formulate în secțiunile anterioare, vom detalia numai abordarea bazată pe cantitatea de căldură.

3.4.1. Prezentarea de principiu a sistemelor termice bazată pe entropie

a) Mărimi fizice specifice

(VP) Variabilele puterii:

(e) Denumire variabilă: *temperatura termodinamică* (*temperatura absolută*).
Notație uzuală: *T*.
Unitatea de măsură în S.I.: Kelvin [K] - unitatea fundamentală.

(f) Denumire variabilă: *flux de entropie*.
Notație uzuală: $\dot{s}$.
Unitatea de măsură în S.I.: [J/Ks]

(VE) Variabilele energiei:
(p) Nu este necesar a fi definită o astfel de variabilă pentru sistemele termice.
(q) Denumire variabilă: *entropie*.
Notație uzuală: *s*.
Unitate de măsură în S.I. [J/K].

Entropia *s* se defineşte în abordarea statistică a termodinamicii ca fiind:

$$s = k \ln P , \tag{3.4.1}$$

unde *k* este constanta lui Botzman iar *P* este probabilitatea termodinamică a stării sistemului definit drept numărul de microstări ale sistemului corespunzătoare unei macrostări date (Reif, 1983).

În cazul unui transfer infinitezimal de căldură, relația de definiție a entropiei (3.4.1) conduce la exprimarea:

$$ds = \frac{\delta Q}{T} , \tag{3.4.2}$$

unde s-a folosit notația *ds* întrucât evaluarea lui *s* este independentă de drumul de integrare (adică *ds* este o diferențială totală exactă) în timp ce δQ notează o cantitate infinitezimală de căldură.

Elementele cu acțiuni tipice în procesarea energiei posedă particularități comportamentale care necesită o descriere matematică diferă față de domeniile fizicii abordate anterior. Ne limităm doar la precizarea că elementele cu acțiuni tipice se încadrează în schema generală construită pe baza considerentelor energetice evidențiate în cursul secțiunilor anterioare.

3.4.2. Prezentarea sistemelor termice bazată pe cantitatea de căldură

În practica inginerească curentă, folosirea entropiei şi a temperaturii absolute (termodinamice) nu este deloc comodă şi se preferă, în locul acestor variabile, utilizarea cantității de căldură *Q* şi respectiv a temperaturii *T* fără ca această temperatură să fie neapărat temperatura absolută (de exemplu poate fi exprimată în grade Celsius).

a) ***Mărimi fizice specifice***

În cazul alegerii fluxului de căldură şi a temperaturii ca variabile de tip (*f*) şi respectiv (*e*), atunci produsul lor nu mai reprezintă o putere, ceea ce face ca ele să nu mai poată fi definite ca variabile ale puterii. De asemenea nu putem vorbi nici de variabilele energiei. Aceste diferențe nu implică dezavantaje majore în utilizarea acestor variabile, iar strânsa lor legătură cu practica precum şi obişnuința de a le utiliza le fac a fi preferate.

(e) Denumire variabilă: *temperatură* sau *variație de temperatură*.
Notație uzuală: *T*, ΔT.

Unitate de măsură în S.I.: Kelvin [K] – unitate fundamentală, dar se poate folosi şi gradul Celsius [C^o].

(f) Denumire variabilă: *flux de căldură*.
Notație uzuală: $\dot{Q}$.
Unitate de măsură în S.I.: [J/s] = [W].

(p) Nu este necesar a fi definită o astfel de variabilă.

(q) Denumire variabilă: *cantitate de căldură*.
Notație uzuală: Q.
Unitate de măsură în S.I.: Joul [J].

b) Elemente cu acțiuni tipice în procesarea energiei

(I) Elemente ce realizează *acumularea de tip inductiv* sau *inerțial* a energiei (prin intermediul variabilelor de tip (*p*)):
În sistemele termice nu sunt astfel de elemente ceea ce justifică afirmația de mai sus referitoare la variabila de tip (*p*).

(C) Elemente ce realizează *acumularea de tip capacitiv* a energiei (prin intermediul variabilei de tip (*q*)):
Element tipic: masă de substanță încălzită cu un flux termic (figura 3.4.1). Se furnizează din exterior un flux termic $\dot{Q}$, substanța acumulând o cantitate de căldură Q, fapt ce determină creşterea temperaturii cu $\Delta T(t)$ de la temperatura inițială $T_0 = T(t_0)$ la temperatura $T(t) = T(t_0) + \Delta T(t)$.

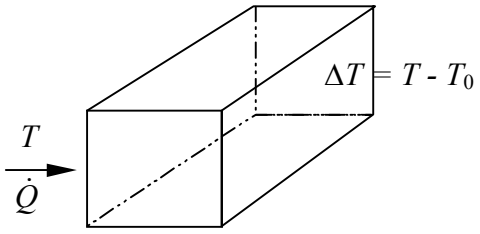


Fig. 3.4.1. Reprezentarea schematizată a unei mase de substanță încălzită cu un flux termic jucând rolul unui condensator

(C-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_C(Q, \Delta T) = 0\,. \tag{3.4.3}$$

(C-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*q*)):

$$\Delta T = \Psi_C^i(Q) = \Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} \dot{Q} d\tau + Q(t_0)\right). \tag{3.4.4}$$

(C-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$Q = \Psi_C^d(\Delta T), \tag{3.4.5}$$

sau

$$\dot{Q} = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Psi_C^d(\Delta T(t)). \tag{3.4.6}$$

(C|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$Q - C_t \Delta T = 0\,, \tag{3.4.7}$$

sau

$$\Psi_C\left(\Delta T, Q\right) = Q - C_t \Delta T\,. \tag{3.4.8}$$

Denumire parametru $C_t = mc$: *capacitatea termică*, unde *m* este masa de substanță, iar *c* este căldura specifică considerată constantă.
Unitatea de măsură în S.I.[J/K], (iar pentru c [J/kg·K]).

(C|L-F|i) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *integrală* (mărimea cauză este variabila de tip (*q*)):

$$\Delta T = \frac{Q}{C_t} = \frac{Q}{mc},\ \Psi_C^i = \frac{1}{C_t} Q = \frac{1}{mc} Q = \frac{1}{mc}\left(\int_{t_0}^{t} \dot{Q} d\tau + Q(t_0)\right). \tag{3.4.9}$$

(C|L-F|d) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *derivativă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$Q = C_t \Delta T = mc\Delta T\,,\quad \Psi_C^d = C_t \Delta T = mc\Delta T\,, \tag{3.4.10}$$

sau

$$\dot{Q} = C_t \frac{d}{dt}\left(\Delta T\right). \tag{3.4.11}$$

Energia acumulată este chiar cantitatea de căldură *Q*, adică variabila de tip (*q*).

(R) Elemente ce realizează disiparea energiei prin comportare de tip rezistiv:
Exemplu tipic: perete având temperaturi diferite pe cele două fețe şi străbătut de un flux termic (fig. 3.4.2). Dacă peretele este străbătut de un flux termic $\dot{Q}$, atunci între cele doua fețe apare diferența de temperatură $\Delta T(t) = T_2(t) - T_1(t)$ şi invers, dacă pe fețele peretelui sunt temperaturi diferite, atunci prin perete apare un flux termic.

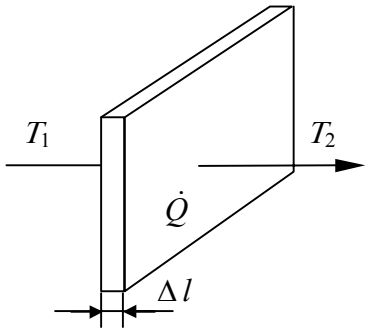


Fig. 3.4.2. Reprezentarea schematizată a unui perete care joacă rolul de rezistență termică

(R-F) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare *acauzală*:

$$\Psi_R\left(\Delta T, \dot{Q}\right) = 0\,. \tag{3.4.12}$$

(R-F|r) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$\Delta T = \Psi_R^r(\dot{Q})\,. \tag{3.4.13}$$

(R-F|c) Caracteristică de funcționare în cazul general *neliniar* (lege constitutivă) exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$\dot{Q} = \Psi_R^c(\Delta T)\,. \tag{3.4.14}$$

(R|L-F) Caracteristică de funcționare în cazul *liniar* (lege constitutivă liniară) – exprimare *acauzală*:

$$\Delta T - R_t\dot{Q} = 0\,,\quad \Psi_R(\Delta T, \dot{Q}) = \Delta T - R_t\dot{Q}\,. \tag{3.4.15}$$

Denumire parametru $R_t = \Delta l/kA$: *rezistență termică*, unde *k* este conductivitatea termică, *A* este aria suprafeței iar Δl este grosimea peretelui.
Unitate de măsură în S.I.: [K/W], (iar pentru *k* [W/Km]).

(R|L-F|r) Caracteristică de funcționare *liniară* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *rezistivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*f*)):

$$\Delta T = R_t\dot{Q}\,,\ \Psi_R^r(\dot{Q}) = R_t\dot{Q}\,. \tag{3.4.16}$$

(R|L-F|c) Caracteristică de funcționare *liniară* (lege constitutivă liniară) – exprimare în cauzalitate *conductivă* (mărimea cauză este variabila de tip (*e*)):

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_t}\Delta T\,,\ \Psi_R^C(\Delta T) = \frac{1}{R_t}\Delta T\,. \tag{3.4.17}$$

(R-E) Energia disipată în unitatea de timp (puterea disipată) este chiar fluxul termic $\dot{Q}$.

(S_e) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*e*) prestabilită – *sursă de efort*:
Exemplu tipic: masă mare de fluid la o temperatură constantă (se presupune că poate furniza flux termic fără a i se modifica temperatura) (fig. 3.4.3)

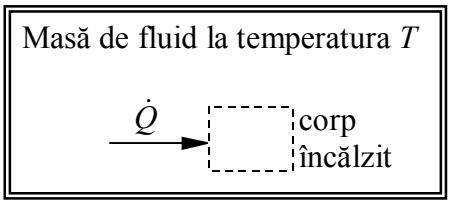


Fig. 3.4.3. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de temperatură

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $T = T(t)$ prestabilit (impus corpului încălzit aflat inițial la o temperatură $T_0 < T$) mărime cauză; $\dot{Q}(t)$ rezultă din specificul transferului termic – mărime efect.
Observație: Dacă corpul în contact cu sursa are temperatura mai mare decât aceasta, atunci el se consideră că se răceşte până ajunge la temperatura sursei furnizând acesteia flux termic fără ca sursa să-şi modifice temperatura (sursa absoarbe flux termic la temperatură prestabilită).

(S_f) Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere, cu variabila de tip (*f*) prestabilită – *sursă de flux*:

Exemplu tipic: Încălzitor electric constând dintr-o rezistență electrică care furnizează flux termic $\dot{Q}$ (egal cu puterea disipată de rezistență) într-o incintă (fig. 3.4.4)

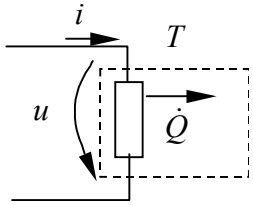


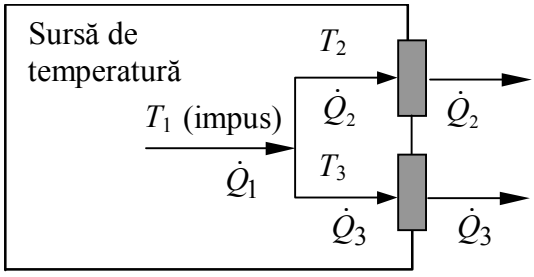
Fig.3.4.4. Reprezentarea schematizată a unei surse ideale de flux termic

Caracteristică de funcționare (având cauzalitate unică): $\dot{Q} = \dot{Q}(t)$ prestabilit (impus incintei) – mărime cauză; $T = T(t)$ rezultă din specificul transferului termic către incintă – mărime efect.

(TF) Elemente ce conservă energia realizând transformarea variabilelor puterii:
Nu se pune problema unor astfel de elemente din cauza modului particular în care am definit variabilele de tip (*e*) şi (*f*).

c) Joncțiuni (conectări) tipice de elemente, care conservă puterea

(J0) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*e*):
Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în fig. 3.4.5



$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T_3, \\ \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 - \dot{Q}_3 = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.4.5. Reprezentarea schematizată a trei elemente conectate care au aceeaşi temperatură

Cazul general a *n* elemente conectate:

(J0-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a conectării (joncțiunii) – egalitatea variabilelor de tip (*e*) şi legea de conservare a puterii:

$$T_1 = \ldots = T_j = \ldots = T_n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \dot{Q}_j = 0, \quad \alpha_j \in [-1,+1], \tag{3.4.18}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

(J0-F|k) *Exprimare cauzală* a legii de funcționare a conectării (joncțiunii) când variabila de tip (*e*) este impusă de elementul având indicele *k*:

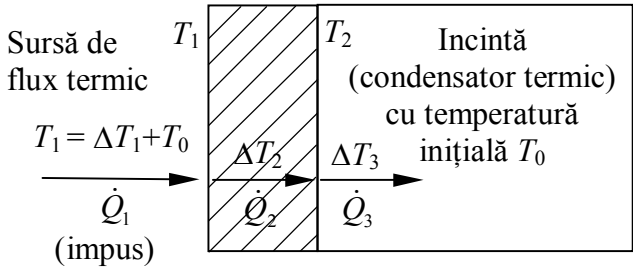
$$\begin{cases} T_j = T_k, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad j \neq k, \\ \dot{Q}_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j \dot{Q}_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} \dot{Q}_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}, \end{cases} \tag{3.4.19}$$

Exemplu: În cazul celor trei elemente în fig.3.4.5, exprimarea cauzală (J0-F|k) are loc pentru $k = 1$,ceea ce revine la:

$$\begin{cases} T_2 = T_1, \quad T_3 = T_1, \\ \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3. \end{cases}$$

(J1) Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabilă de tip (f):

Exemplu: În cazul a trei elemente, reprezentarea schematizată este dată în fig. 3.4.6.



$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3, \\ \Delta T_1 - \Delta T_2 - \Delta T_3 = 0, \end{cases}$$
$$\Delta T_2 = T_1 - T_2,$$
$$\Delta T_3 = T_2 - T_0.$$

Fig. 3.4.6 Reprezentarea schematizată a conectării a trei elemente având acelaşi flux termic

Cazul general a n elemente conectate:

(J1-F) Caracteristică de funcționare *acauzală* a conectării (joncțiunii) – egalitatea variabilelor de tip (f) şi legea de conservare a *temperaturii*:

$$\begin{aligned} &\dot{Q}_1 = \ldots = \dot{Q}_j = \ldots = \dot{Q}_n, \\ &\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Delta T_j = 0, \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}, \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

în care α_j simbolizează semnele algebrice.

(J1-F|k) *Exprimarea cauzală* a legii de funcționare a conectării (joncțiunii) când variabila de tip (f) este impusă de elementul având indicele k:

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = \dot{Q}_k, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad j \neq k, \\ \Delta T_k = \dfrac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j \Delta T_j = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} \Delta T_j, \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}. \end{cases} \tag{3.4.21}$$

Exemplu: În cazul celor trei elemente din fig. 3.4.6, exprimarea cauzală (J1-F|k) are loc pentru $k = 1$, ceea ce revine la:

$$\begin{cases} \dot{Q}_2 = \dot{Q}_1, \quad \dot{Q}_3 = \dot{Q}_1, \\ \Delta T_1 = \Delta T_2 + \Delta T_3. \end{cases}$$

3.5. Transferul puterii între subsisteme de natură fizică diferită

În general, în sistemele fizico-tehnice există subsisteme care interacţionează, fiecare dintre acestea procesând un tip diferit de energie. Conectarea a două sisteme cu natură fizică diferită, între care se conservă puterea, se realizează prin elemente cu acţiuni tipice care pot funcţiona fie după legile constitutive ale *transformatorului* (exemplificate în paragrafele anterioare) fie după legile constitutive ale *giratorului* de care ne vom ocupa în paragraful 3.5.2 al acestei secţiuni.

3.5.1. Elemente de tip transformator

Vom prezenta câteva exemple de transformatoare care operează între domenii energetice diferite, făcând apel la acelaşi mod de organizare şi abreviere deja utilizat în secţiunile anterioare.

3.5.1.1. Exemplu de transformare a parametrilor puterii între un sistem mecanic în mişcare de translaţie şi un sistem hidraulic

Se consideră un sistem acţionat de un fluid hidraulic (fig. 3.5.1). Variabilele puterii hidraulice (ΔP şi Q) sunt transformate în variabilele puterii mecanice (F şi v) şi reciproc.

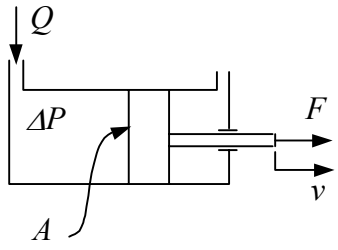


Fig. 3.5.1. - Reprezentarea schematizată a unui transformator între variabilele puterii mecanice şi variabilele puterii hidraulice

(TF-F) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*:

$$\Delta P Q = F v, \tag{3.5.1}$$

care este de forma:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2, \tag{3.5.2}$$

unde $e_1 = \Delta P,\ f_1 = Q,\ e_2 = F,\ f_2 = v.$

(TF-F|12) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 1, 2 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 1 este cauză şi cea indexată 2 este efect:

$$\begin{aligned} F &= k_{TF}^{1,2}\ \Delta P, \\ Q &= k_{TF}^{1,2} v. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Parametrul $k_{TF}^{1,2}$ exprimă raportul de transformare şi este numeric egal cu aria suprafeţei pistonului:

$$k_{TF}^{1,2} = \mathrm{A}\left[\mathrm{m}^2\right]. \tag{3.5.4}$$

Observaţie: Se constată că, spre deosebire de cazul transformatoarelor care operează în acelaşi domeniu energetic, în acest caz raportul de transformare nu mai este adimensional.

(TF-F|21) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 2, 1 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 2 este cauză şi cea indexată 1 este efect:

$$\begin{aligned} \Delta P &= k_{TF}^{2,1} F = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} F = \frac{1}{\mathrm{A}} F, \\ v &= {}_{TF}^{2,1}\ Q = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} Q = \frac{1}{\mathrm{A}} Q. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

3.5.1.2. Exemplu de transformare a parametrilor puterii mecanice ai mişcării de translaţie în parametrii puterii mecanice ai mişcării de rotaţie

Se consideră un angrenaj pinion-cremalieră (fig. 3.5.2). Variabilele puterii mecanice din mişcarea de translaţie (*F* şi *v*) sunt transformate în variabilele puterii mecanice din mişcarea de rotaţie (*M* şi ω), şi reciproc.

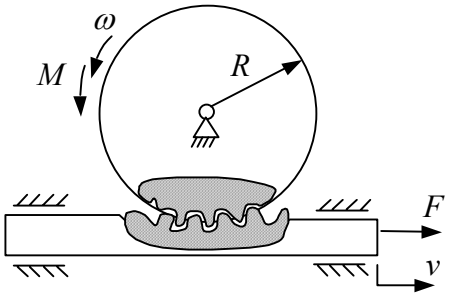


Fig. 3.5.2. - Reprezentarea schematizată a unui transformator între variabilele puterii mecanice ale mişcării de translaţie şi respectiv ale mişcării mecanice de rotaţie

(TF-F) Caracteristică de funcţionare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare acauzală:

$$M\omega = Fv, \tag{3.5.6}$$

care este de forma:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2, \tag{3.5.7}$$

unde $e_1 = M,\ f_1 = \omega,\ e_2 = F,\ f_2 = v.$

(TF-F|12) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 1, 2 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 1 este cauză şi cea indexată 2 este efect:

$$F = k_{TF}^{1,2} M, \qquad \omega = k_{TF}^{1,2} v. \tag{3.5.8}$$

Parametrul $k_{TF}^{1,2}$ exprimă raportul de transformare şi este numeric egal cu inversul razei pinionului:

$$k_{TF}^{1,2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left[\mathrm{m}^{-1}\right]. \tag{3.5.9}$$

(TF-F|21) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* 2, 1 pentru mărimi de tip (*e*), unde mărimea (*e*) indexată 2 este cauză şi cea indexată 1 este efect:

$$M = k_{TF}^{2,1} F = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} F = RF, \qquad v = k_{TF}^{2,1} \omega = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} \omega = R\omega. \tag{3.5.10}$$

3.5.2. Elemente de tip girator

Giratorul este un element care conservă puterea conform aceleiaşi legi constitutive ca şi a transformatorului:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2. \tag{3.5.11}$$

Spre deosebire de transformator, la care caracteristica de funcționare în exprimare cauzală leagă între ele mărimile de acelaşi tip (adică (*e*) cu (*e*) şi (*f*) cu (*f*)), la girator, relația cauză - efect este între o mărime de tip (*e*) (respectiv (*f*)) şi o mărime de tip (*f*) (respectiv (*e*)).

Giratoarele, în mod uzual, servesc la descrierea transferului de putere (cu conservarea acesteia) dintr-un domeniu energetic în altul, neexistând exemple simple de giratoare care operează între subsisteme de aceeaşi natură. Din acest motiv, elementul de tip girator nu a fost luat în discuție în paragrafele anterioare şi am considerat drept oportună ilustrarea funcționării giratoarelor prin exemplele de mai jos (care au în vedere transferul de putere între subsisteme de natură diferită).

3.5.2.1. Exemplu de transformare a parametrilor puterii între un sistem electric şi unul mecanic în mişcare de translaţie

Se consideră polii unui magnet permanent între care există un câmp magnetic de inducție B şi un conductor rectiliniu de lungime l care se poate deplasa perpendicular pe liniile de câmp. Variabilele puterii electrice sunt u şi i iar ale puterii mecanice F şi v (fig. 3.5.3).

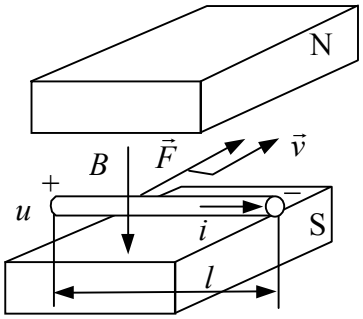


Fig. 3.5.3. - Reprezentarea schematizată a unui girator care transformă variabilele puterii electrice în cele ale puterii mecanice

(GY-F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*:

$$Fv = ui\,, \tag{3.5.12-a}$$

care este de forma:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2\,, \tag{3.5.12-b}$$

unde $e_1 = F,\ f_1 = v,\ e_2 = u,\ f_2 = i.$

(GY-F|fe) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate de tip* f, e, unde mărimile cauză sunt cele de tip (f) iar mărimile efect sunt cele de tip (e):

$$F = k_{GY}^{fe} i \ \ (F \text{ este forța electromagnetică - efect}), \tag{3.5.13}$$

$$u = k_{GY}^{fe} v \ \ (u \text{ este tensiune electromotoare indusă - efect}). \tag{3.5.14}$$

Parametrul k_{GY}^{fe} exprimă raportul de transformare şi este numeric egal cu produsul dintre inducția B a câmpului magnetic şi lungimea l a conductorului:

$$k_{GY}^{fe} = lB\left[\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}\right] = \left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^2\right]. \tag{3.5.15}$$

(GY-F|ef) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate de tip* e, f, unde mărimile cauză sunt cele de tip (e), iar mărimile efect sunt cele de tip (f):

$$i = k_{GY}^{ef} F = \frac{1}{k_{GY}^{fe}} F \ (F \text{ este forță de natură mecanică - cauză}), \tag{3.5.16}$$

$$v = k_{GY}^{ef} u = \frac{1}{k_{GY}^{fe}} u \text{ (} u \text{ este tensiunea aplicată conductorului - cauză).} \qquad (3.5.17)$$

3.5.2.2. Exemplu de transformare între parametrii puterii mişcării de translaţie şi cei corespunzători mişcării mecanice de rotaţie prin intermediul unui girator

Sistemul mecanic este format dintr-un ax orizontal AB de care este fixat un volant având momentul de inerție mecanic J față de axa de rotație Gx' în jurul căreia acesta se rotește cu viteză unghiulară constantă ω_v de valoare foarte mare (fig. 3.5.4). Centrul de masă este în originea reperului $R(G, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ şi rămâne fix în timpul mişcării. Greutatea volantului se neglijează, iar momentul cinetic al acestuia în raport cu polul G este $\vec{L}_G = J\omega_v \vec{i}'$. Dacă se acționează cu o forță $\vec{F}_1$ paralelă cu Gy' aşa cum se arată în fig. 3.5.4, atunci momentul ei în raport cu polul G este $\vec{M}_G(\vec{F}_1) = F_1 l\vec{k}'$.

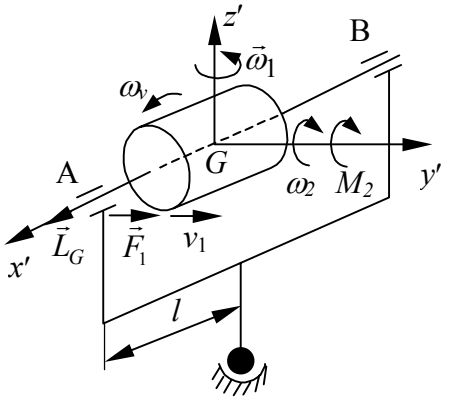


Fig. 3.5.4. - Sistem mecanic care se modelează cu ajutorul giratorului

Conform teoremei momentului cinetic, acest moment trebuie să fie egal cu derivata în raport cu timpul a momentului cinetic calculat în raport cu polul G, $\vec{L}_G$. Această derivată se calculează cu formula generală:

$$\dot{\vec{L}}_G = \frac{d}{dt}\left[\vec{L}_G\right]_r + \vec{\omega} \times \vec{L}_G, \qquad (3.5.18)$$

unde indicele r simbolizează o derivare relativă, adică o derivare în care versorii reperului mobil $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ şi $\vec{k}'$ sunt consideraţi constanţi. Cum produsul $J\omega_v$ este constant, rezultă că derivata relativă a vectorului $\vec{L}_G$ este nulă, rezultând relația:

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_G = \vec{M}_G(\vec{F}_1) = F_1 l\vec{k}'. \qquad (3.5.19)$$

Pentru ca egalitatea să aibă loc, trebuie ca rotorul să fie supus acțiunii unei viteze unghiulare $\vec{\omega}_2$ care să fie orientată în sensul negativ al axei Gy'.

Din relația (3.5.19), rezultă următoarea egalitate între modulii vectorilor:

$$\left|\vec{\omega}_2\right| \cdot \left|\vec{L}_G\right| \sin\left(\vec{\omega}_2, \vec{L}_G\right) = \left|\vec{M}_G(\vec{F}_1)\right|. \tag{3.5.20}$$

Deoarece unghiul dintre $\vec{\omega}_2$ şi $\vec{L}_G$ este $\pi/2$, rezultă:

$$\omega_2 J \omega_v = F_1 l. \tag{3.5.21}$$

Această egalitate leagă forţa F_1 de viteza unghiulară ω_2 şi ea este prima relaţie din legea constitutivă a giratorului care se mai scrie

$$F_1 = r\omega_2, \tag{3.5.22}$$

unde

$$r = \frac{J\omega_v}{l} \tag{3.5.23}$$

este parametrul giratorului. El nu este adimensional ca la transformator ci are întotdeauna dimensiuni.

Dacă se consideră acum că se aplică un cuplu

$$\vec{M}_G = -M_2 \vec{j}' \tag{3.5.24}$$

orientat în sensul negativ al axei *Gy'*, atunci rezultă că trebuie să aibă loc egalitatea

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_G = -M_2 \vec{j}', \tag{3.5.25}$$

care este îndeplinită numai dacă rotorul este supus unei viteze unghiulare $\vec{\omega}_1$ orientată în sensul pozitiv al axei *Gz'* care va determina deplasarea punctului A cu o viteză $\vec{v}_1$ având sensul pozitiv al axei *Gy'* (vezi fig. 3.5.4) şi având mărimea

$$v_1 = \omega_1 l. \tag{3.5.26}$$

Din relaţia (3.5.25) rezultă următoarea egalitate între modulii vectorilor

$$\left|\vec{\omega}_1\right| \cdot \left|\vec{L}_G\right| \sin\left(\vec{\omega}_1, \vec{L}_G\right) = \left|M_2\right|. \tag{3.5.27}$$

Ţinând cont că unghiul dintre $\vec{\omega}_1$ şi $\vec{L}_G$ este $\pi/2$ şi de relaţia (3.5.26), se obţine egalitatea

$$v_1 \frac{J\omega_v}{l} = M_2, \tag{3.5.28}$$

sau

$$v_1 = rM_2, \tag{3.5.29}$$

care este cea de a doua relaţie din legea constitutivă a giratorului, unde

$$r = \frac{J\omega_v}{l} \tag{3.5.30}$$

este parametrul giratorului.

Dacă se înmulţesc relaţiile (3.5.22) si (3.5.29) se obţine, ca si în cazul transformatorului, o lege de conservare a puterii

$$F_1 v_1 = M_2 \omega_2 . \tag{3.5.31}$$

(GY–F) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare *acauzală*

$$F_1 v_1 = M_2 \omega_2 , \tag{3.5.32}$$

care este forma

$$e_1 f_1 = e_2 f_2 , \tag{3.5.33}$$

unde $e_1 = F_1,\ f_1 = v_1, e_2 = M_2,\ f_2 = \omega_2 .$

(GY–F|fe) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* de tip f, e, unde mărimile cauză sunt cele de tip (f) iar mărimile efect sunt cele de tip (e)

$$F_1 = k_{GY}^{fe} \omega_2 , \tag{3.5.34}$$

$$M_2 = k_{GY}^{fe} v_1 , \tag{3.5.35}$$

unde parametrul k_{GY}^{fe} exprimă raportul de transformare şi este

$$k_{GY}^{fe} = \frac{J\omega_v}{l} \left[\mathrm{N \cdot s}\right] = \left[\mathrm{kg \cdot m/s}\right]. \tag{3.5.36}$$

(GY–F|ef) Caracteristică de funcționare (lege constitutivă bazată pe conservarea puterii) – exprimare în *cauzalitate* de tip e, f, unde mărimile cauză sunt cele de tip (e), iar mărimile efect cele de tip (f).

$$\omega_2 = k_{GY}^{ef} F_1 = \frac{1}{k_{GY}^{fe}} F_1 , \tag{3.5.37}$$

$$v_1 = k_{GY}^{ef} M_2 = \frac{1}{k_{GY}^{fe}} M_2 . \tag{3.5.38}$$

Observație: Sistemul mecanic de mai sus este numai în linii mari un girator, deoarece forțe suficient de mari ar putea mişca corpul cu unghiuri mari sau chiar ar putea să apară momente cinetice semnificative în jurul altor axe decât cea de sprijin.

4. Analogii între diverse domenii ale fizicii

În urma parcurgerii capitolului anterior, se poate constata existența unor similitudini în descrierea *cu parametrii concentrați a* comportării elementelor cu acțiuni tipice în procesarea energiei, indiferent de natura acesteia. O afirmație de aceeaşi natură poate face referire la relațiile matematice aferente modurilor de conectare a elementelor. Organizarea capitolului curent a fost proiectată de aşa manieră încât să permită evidențierea tuturor acestor analogii, printr-o prezentare sistematică, sub formă tabelară, a fiecărui element sau mod de conectare în parte incorporând toate domeniile energetice luate în discuție în Capitolul 3. Drept urmare a manifestărilor acestor similitudini la nivel fundamental, vor apărea analogii între modelele asociate sistemelor de natură fizică diferită a căror structură este formată din elemente şi moduri de conectare ce se corespund ca descriere matematică. Prezența analogiilor poate fi pusă în evidență pentru numeroase exemple de sisteme fizice, parte dintre ele având o construcție deosebit de simplă.

Pentru a asigura o înțelegere cât mai profundă a problematicii analogiilor comportamentale, în acest capitol se face apel la o abordare graduală organizată pe secțiuni, după cum urmează:

4.1. Studiul comparativ al mărimilor (variabilelor) specifice diferitelor domenii ale fizicii.
4.2. Studiul comparativ al elementelor cu acțiuni tipice în procesarea energiei.
4.3. Studiul comparativ al modalităților tipice de conectare (joncțiuni).
4.4. Prezentare sintetică a exprimărilor cauzale ale legilor fizicii.
4.5. Exemple de sisteme fizice ilustrând analogii comportamentale.

4.1. Studiul comparativ al mărimilor (variabilelor) specifice diferitelor domenii ale fizicii

Aşa după cum rezultă şi din capitolul anterior, fiecare domeniu al fizicii utilizează mărimi (variabile) specifice cu ajutorul cărora se pot descrie fenomenele fizice care îi sunt caracteristice. Se observă că există patru mărimi fundamentale care stau la baza descrierii tuturor fenomenelor fizice din fiecare domeniu. Aceste mărimi sunt *variabilele puterii* (efortul, notat e, şi fluxul, notat f) şi *variabilele energiei* (impulsul generalizat, notat p, şi deplasarea generalizată, notată q). Variabilele puterii se mai numesc şi *variabile coenergetice*. Fiecăreia dintre cele patru variabile generice menționate îi corespunde o variabilă concretă specifică domeniului din care face parte după cum urmează:

- variabila *efort* se regăseşte în domeniul circuitelor electrice sub forma mărimii denumită potențial (notat u) sau diferență de potențial (notat ΔV), în domeniul mişcării mecanice de translație sub forma mărimii denumită forță (notată F), în domeniul mişcării mecanice

de rotație sub forma mărimii denumită cuplu (notată M), în domeniul fluidelor necompresibile variabila denumită presiune sau diferență de presiune (notată P sau ΔP) iar în domeniul sistemelor termice variabila denumită temperatură termodinamică (temperatură absolută) sau variație de temperatură (notată T sau ΔT);

- variabila *flux* se regăseşte în domeniul circuitelor electrice sub forma mărimii denumită curent electric (notată i), în domeniul mişcării mecanice de translație sub forma mărimii denumită viteză liniară (notată v), în domeniul mişcării mecanice de rotație sub forma mărimii denumită viteză unghiulară (notată ω), în domeniul fluidelor necompresibile sub forma mărimii debit volumetric (notată Q) iar în domeniul sistemelor termice sub forma mărimii denumită flux de căldură (notată $\dot{Q}$);
- variabila *impuls generalizat* se regăseşte în domeniul circuitelor electrice sub forma mărimii denumită flux magnetic (notat Φ), în domeniul mişcării mecanice de translație sub forma mărimii denumită impuls (notată p), în domeniul mişcării mecanice de rotație sub forma mărimii denumită moment cinetic (notat L), în domeniul fluidelor necompresibile sub forma mărimii denumită impulsul presiunii (notat p_P) iar în domeniul sistemelor termice se constată că nu există corespondent al acestei mărimi;
- variabila denumită *deplasare generalizată* se regăseşte în domeniul circuitelor electrice sub forma mărimii denumită cantitate de electricitate (notată Q), în domeniul mişcării mecanice de translație sub forma mărimii denumită deplasare liniară (notată x), în domeniul mişcării mecanice de rotație mărimea denumită deplasare unghiulară (notată θ), în domeniul fluidelor incompresibile mărimea denumită volum (notat V) iar în domeniul sistemelor termice mărimea denumită cantitate de căldură (notată Q).

În tabelul 4.1.1 este prezentată concis o vedere generală asupra corespondențelor dintre mărimile fizice aparținând unor domenii fizice diferite împreună cu unitățile de măsură şi relațiile matematice dintre ele. Tabelul sugerează aspectul unitar al mărimilor necesare descrierii fenomenelor fizice şi deschide calea unei abordări simplificate a studiului acestor fenomene bazată pe similitudinile existente între tipurile de mărimi şi între relațiile dintre ele.

Tabelul 4.1.1.a. Mărimi (variabile) utilizate în modelare - variabilele puterii (VP) sau variabilele coenergetice

Domenii ale fizicii	Efort (e)			Flux (f)		
	Denumire variabilă	Notație uzuală	U.m. S.I.	Denumire variabilă	Notație uzuală	U.m. S.I.
Circuite electrice	potențial, tensiune electrică	u	[V]	curent electric	i	[A]
Mişcare de translație	forță	F	[N]	viteză liniară	v	[m/s]
Mişcare de rotație	cuplu	M	[Nm]	viteză unghiulară	ω	[rad/s]
Fluide necompresibile	presiune (diferență de presiune)	P (ΔP)	[N/m^2]	debit volumetric	Q	[m^3/s]
Sisteme termice	temperatură termo-dinamică (temperatură absolută) sau variație de temperatură	T (ΔT)	[K]	flux de căldură	$\dot{Q}$	[J/s] [W]

4.2. Studiul comparativ al elementelor cu acţiuni tipice în procesarea energiei

În analiza sistemelor fizice un rol esențial îl joacă studierea procesării energiei. Energia este mai întâi furnizată sistemului ca fiind de un anumit tip şi având anumiți parametri. Sistemul o procesează modificându-i parametrii şi eventual tipul iar apoi fie o stochează, fie o eliberează, fie o stochează parțial şi restul îl eliberează. Modelarea *cu parametri concentrați* a procesării energiei se realizează cu ajutorul unui număr de şapte elemente distincte, fiecare având rolul său bine precizat. Funcționarea acestor elemente este descrisă de relații matematice a căror formă depinde de tipul elementului precum şi de liniaritatea ori neliniaritatea acestuia. Ele au fost deja prezentate în capitolul anterior în cadrul fiecărui domeniu energetic. Pe baza acelei prezentări, se poate dezvolta în continuare o vedere de ansamblu, unificatoare, asupra fiecăruia din cele şapte tipuri de elemente utilizate în modelarea procesării energiei.

4.2.1. Elemente ce realizează acumularea de tip inerţial (inductiv) a energiei (elemente I)

Acest tip de element, notat I şi denumit element inerțial sau inductiv, modelează elementele fizice care acumulează energie printr-un fenomen similar cu acumularea energiei cinetice de către mase (de unde denumirea de acumulare de tip inerțial) ori acumularea energiei într-un câmp magnetic al unei bobine (de unde denumirea de acumulare de tip inductiv). Urmărind elementul inerțial în cadrul capitolului anterior, în diverse domenii ale fizicii, se poate constata comportamentul similar al acestuia constând în modelarea cu relații matematice de aceeaşi formă în care variabilele se corespund conform tabelului 4.1.1. În această idee se poate concluziona că un astfel de element se regăseşte în toate domeniile energetice abordate, cu excepția sistemelor termice, şi are aceeaşi formă a caracteristicii de funcționare precum şi acelaşi mod de calcul al energiei acumulate. Tabelul 4.2.1. evidențiază similitudinea comportamentului elementului inerțial (inductiv) în domeniile energetice în care există, dând astfel posibilitatea unei tratări unitare a acestuia în cadrul modelării sistemelor fizice.

4.2.2. Elemente ce realizează acumularea de tip capacitiv a energiei (elemente C)

Acest tip de element, notat C şi denumit element *capacitiv* sau *condensator*, modelează elementele fizice care acumulează energie printr-un fenomen similar acumulării de energie în câmpul electric al unui condensator, fapt care justifică denumirea de acumulare de tip capacitiv. Aşa cum reiese din capitolul anterior, acest element apare în toate domeniile fizicii care au fost abordate şi are un comportament asemănător constând în similaritatea relațiilor matematice în care variabilele se corespund conform tabelului 4.1.1. Astfel se constată aceeaşi formă a caracteristicii de funcționare şi acelaşi mod de calcul al energiei acumulate. Aceste aspecte sunt tratate sintetic în tabelul 4.2.2, el evidențiind posibilitatea unei tratări unitare a elementului capacitiv în cadrul modelării sistemelor fizice.

Tabelul 4.1.1. b. Mărimi (variabile) utilizate în modelare - variabilele energiei (VE)

Domenii ale fizicii	Impuls generalizat (p)					Deplasare generalizată (q)				
	Denumire variabilă	Notație uzuală	U.m. S.I.	(p | i) $p(t)=\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau+p(t_0)$	(p | d) $e=\frac{dp}{dt}$	Denumire variabilă	Notație uzuală	U.m. S.I.	(q | i) $q(t)=\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau+q(t_0)$	(q | d) $f=\frac{dq}{dt}$
Circuite electrice	flux magnetic	Φ	[Wb]	$\Phi(t)=\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau+p(t_0)$	$u=\frac{d\Phi}{dt}$	cantitate de electricitate	Q sau q	[C]	$Q(t)=\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau+Q(t_0)$	$i=\frac{dQ}{dt}$
Mişcare de translație	impuls	p	[Ns]	$p(t)=\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau+p(t_0)$	$F=\frac{dp}{dt}$	deplasare liniară	x	[m]	$x(t)=\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau+x(t_0)$	$v=\frac{dx}{dt}$
Mişcare de rotație	moment cinetic	L	[Nms]	$L(t)=\int_{t_0}^{t} M(\tau)d\tau+L(t_0)$	$M=\frac{dL}{dt}$	deplasare unghiulară	θ	[rad]	$\theta(t)=\int_{t_0}^{t} \omega(\tau)d\tau+\theta(t_0)$	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
Fluide necompresibile	impulsul presiunii	p_P	[Ns/m^2]	$p_P(t)=\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau+p_P(t_0)$	$p(t)=\frac{dp_P}{dt}$	volum	V	[m^3]	$V(t)=\int_{t_0}^{t} Q(\tau)d\tau+V(t_0)$	$Q=\frac{dV}{dt}$
Sisteme termice						cantitate de căldură	Q	[J]	$Q=\int_{t_0}^{t} \dot{Q}dt+Q(t_0)$	$\dot{Q}=\frac{dQ}{dt}$

Tabelul 4.2.1.a. Elemente ce realizează acumularea de tip inductiv a energiei (prin intermediul variabilei de tip (p)) – cazul general neliniar

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)			Energia acumulată
		Forma acauzală	Forma cauzală		
		(I-F)	(I-F|i)	(I-F|d)	I-E
		$\Psi_{\mathrm{I}}(p,f)=0$	$f=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}(p)$ sau $f(t)=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}\left(\int_{t_0}^{t}e(\tau)d\tau+p(t_0)\right)$	$p=\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(f)$ sau $e(t)=\frac{d}{dt}p(t)=\frac{d}{dt}\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(f(t))$	$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{p(t_0)}^{p(t)}\Psi_I^i(p)dp$
Circuite electrice	Bobină fig. 3.1.1.	$\Psi_{\mathrm{I}}(\Phi,i)=0$	$i=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}(\Phi)$ sau $i(t)=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}\left(\int_{t_0}^{t}u(\tau)d\tau+\Phi(t_0)\right)$	$\Phi=\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(i)$ sau $u(t)=\frac{d}{dt}\Phi(t)=\frac{d}{dt}\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(i(t))$	$\int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)}\Psi_I^i(\Phi)d\Phi$
Mişcare de translație	Corp în mişcare de translație fig. 3.2.1.	$\Psi_{\mathrm{I}}(p,v)=0$	$v=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}(p)$ sau $v(t)=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}\left(\int_{t_0}^{t}F(\tau)d\tau+p(t_0)\right)$	$p=\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(v)$ sau $F(t)=\frac{d}{dt}p(t)=\frac{d}{dt}\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(v(t))$	$\int_{p(t_0)}^{p(t)}\Psi_I^i(p)dp$
Mişcare de rotație	Corp în mişcare de rotație fig. 3.2.9.	$\Psi_{\mathrm{I}}(L,\omega)=0$	$\omega=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}(L)$ sau $\omega(t)=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}\left(\int_{t_0}^{t}M(\tau)d\tau+L(t_0)\right)$	$L=\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(f)$ sau $M(t)=\frac{d}{dt}L(t)=\frac{d}{dt}\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(\omega(t))$	$\int_{L(t_0)}^{L(t)}\Psi_I^i(L)dL$
Fluide incompresibile	Fluidul dintr-o conductă lungă în care are loc o curgere laminară (fig. 3.3.1.)	$\Psi_{\mathrm{I}}(p_P,Q)=0$	$Q=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}(p_P)$ sau $Q(t)=\Psi_{\mathrm{I}}^{i}\left(\int_{t_0}^{t}\Delta P(\tau)d\tau+p_P(t_0)\right)$	$p_P=\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(Q)$ sau $\Delta P(t)=\frac{dp_P}{dt}=\frac{d}{dt}\Psi_{\mathrm{I}}^{d}(Q(t))$	$\int_{p_P(t_0)}^{p_P(t)}\Psi_I^i(p_P)dp_P$
Transfer de căldură (Sisteme termice)	Nu sunt astfel de elemente în sistemele termice				

Tabelul 4.2.1.b. Elemente ce realizează acumularea de tip inductiv a energiei (prin intermediul variabilei de tip (*p*)) – cazul liniar

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)				Energia acumulată
		Forma acauzală	Parametrul k_I	Forma cauzală		I|L-E
		(I|L-F)		(I|L-F|i)	(I|L-F|d)	
		$p - k_I f = 0$	Denumire U.m. S.I.	$f = (1/k_I)p$ sau $f(t) = (1/k_I)\left[\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + p(t_0)\right]$	$p = k_I f$ sau $e(t) = \frac{d}{dt}p(t) = k_I \frac{d}{dt} f(t)$	$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) =$ $= \frac{1}{2k_I} p^2 \Big\|_{p(t_0)}^{p(t)} = \frac{k_I}{2} f^2 \Big\|_{f(t_0)}^{f(t)}$
Circuite electrice	Bobină fig. 3.1.1.	$\Phi - Li = 0$	$k_I = L$ L - inductanța $[\mathrm{H}] = \left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\right]$	$i = (1/L)\Phi$ sau $i(t) = (1/L)\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau + \Phi(t_0)\right]$	$\Phi = LI$ sau $u(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = L\frac{d}{dt} i(t)$	$\frac{1}{2L}\Phi^2 \Big\|_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} = \frac{L}{2} i^2 \Big\|_{i(t_0)}^{i(t)}$
Mișcare de translație	Corp în mișc de transl. fig.3.2.1.	$p - mv = 0$	$k_I = m$ m - masa [kg]	$v = (1/m)p$ sau $v(t) = (1/m)\left[\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + p(t_0)\right]$	$p = mv$ sau $F(t) = \frac{d}{dt}p(t) = m\frac{d}{dt} v(t)$	$\frac{1}{2m} p^2 \Big\|_{p(t_0)}^{p(t)} = \frac{m}{2} v^2 \Big\|_{v(t_0)}^{v(t)}$
Mișcare de rotație	Corp în mișcare de rotație fig. 3.2.9.	$L - J\omega = 0$	$k_I = J$ J – mom. de inerție mec. [kg·m^2]	$\omega = \frac{1}{J}L$ sau $\omega(t) = (1/J)\left[\int_{t_0}^{t} M(\tau)d\tau + L(t_0)\right]$	$L = J\omega$ sau $M(t) = \frac{d}{dt}(L(t)) = J\frac{d}{dt}\omega(t)$	$\frac{1}{2J} L^2 \Big\|_{L(t_0)}^{L(t)} = \frac{1}{2} J\omega^2 \Big\|_{\omega(t_0)}^{\omega(t)}$
Fluide incompre-sibile	Fluid în curgere laminară fig. 3.3.1.	$p_P - L_f Q = 0$	$k_I = L_f$ L_f – induct. fluid.[kg/m^4]	$Q = (1/L_f)p_P$ sau $Q(t) = \frac{1}{L_f}\left[\int_{t_0}^{t} \Delta P(\tau)d\tau + p_p(t_0)\right]$	$p_P = L_f Q$ sau $\Delta P(t) = \frac{d}{dt} p_P(t) = L_f \frac{d}{dt} Q(t)$	$\frac{1}{2L_f} p_p^2 \Big\|_{p_P(t_0)}^{p_P(t)} = \frac{1}{2} L_f Q^2 \Big\|_{Q(t_0)}^{Q(t)}$
Transfer de căldură	Nu sunt astfel de elemente în sistemele termice					

Tabelul 4.2.2.a Elemente ce realizează acumularea de tip capacitiv a energiei (prin intermediul variabilei de tip (q) – cazul general neliniar

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)			Energia acumulată
		Forma acauzală	Forma cauzală		
		(C-F)	(C-F|i)	(C-F|d)	C-E
		$\Psi_C(q,e)=0$	$e=\Psi_C^i(q)$ sau $e(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau+q(t_0)\right)$	$q=\Psi_C^d(e)$ sau $f(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d(e(t))$	$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=$ $=\int_{q(t_0)}^{q(t)}\Psi_C^i(q)dq$
Circuite electrice	Condensator fig. 3.1.2.	$\Psi_C(Q,u)=0$	$u(t)=\Psi_C^i(Q)$ sau $u(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau+Q(t_0)\right)$	$Q=\Psi_C^d(u)$ sau $i(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d(u(t))$	$\int_{Q(t_0)}^{Q(t)}\Psi_C^i(Q)dQ$
Mişcare de translație	Arc liniar (resort) fig. 3.2.2.	$\Psi_C(x,F)=0$	$F(t)=\Psi_C^i(x)$ sau $F(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau+x(t_0)\right)$	$x=\Psi_C^d(F)$ sau $v(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d(F(t))$	$\int_{x(t_0)}^{x(t)}\Psi_C^i(x)dx$
Mişcare de rotație	Arc de torsiune fig. 3.2.10.	$\Psi_C(\theta,M)=0$	$M(t)=\Psi_C^i(\theta)$ sau $M(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} \omega(\tau)d\tau+\theta(t_0)\right)$	$\theta=\Psi_C^d(M)$ sau $\omega(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d(M(t))$	$\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)}\Psi_C^i(\theta)d\theta$
Fluide necompresibile	Rezervor fig. 3.3.2.	$\Psi_C(V,\Delta P)=0$	$\Delta P=\Psi_C^i(V)$ sau $\Delta P(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} Q(\tau)d\tau+V(t_0)\right)$	$V=\Psi_C^d(\Delta P)$ sau $Q(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d(\Delta P(t))$	$\int_{V(t_0)}^{V(t)}\Psi_C^i(V)dV$
Sisteme termice	Masă de substanță încălzită cu un flux termic fig. 3.4.1.	$\Psi_C(Q,\Delta T)=0$	$\Delta T=\Psi_C^i(Q)$	$Q=\Psi_C^d(\Delta T)$ sau $\dot{Q}=\frac{d}{dt}\Psi_C^d(\Delta T(t))$	

Tabelul 4.2.2.b. Elemente ce realizează acumularea de tip capacitiv a energiei (prin intermediul variabilei de tip (q)) – cazul liniar

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)				Energia acumulată
		Forma acauzală	Parametrul k_C Denumire U.m. S.I.	Forma cauzală		
		(C|L-F)		(C|L-F|i)	(C|L-F|d)	C|L-E
		$q - k_C e = 0$		$e = (1/k_C)q$ sau $e(t) = (1/k_C)\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + q(t_0)\right)$	$q = k_C e$ sau $f(t) = \frac{d}{dt}q(t) = k_C \frac{d}{dt}e(t)$	$\mathsf{E}(t) - \mathsf{E}(t_0) = \frac{1}{2k_C}q^2\Big\|_{q(t_0)}^{q(t)} = \frac{k_C}{2}e^2\Big\|_{e(t_0)}^{e(t)}$
Circuite electrice	Condensator fig. 3.1.2.	$Q - C_e u = 0$	$k_C = C_e$ capacitate $[\mathrm{F}] = \left[\frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{m^2 kg}}\right]$	$u = \frac{1}{C_e}Q$ sau $u(t) = \frac{1}{C_e}\left(\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + Q(t_0)\right)$	$Q = C_e u$ sau $i(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = C_e \frac{d}{dt}u(t)$	$\frac{1}{2C_e}Q^2\Big\|_{Q(t_0)}^{Q(t)} = \frac{1}{2}C_e u^2\Big\|_{u(t_0}^{u(t)}$
Mişcare de translație	Corp în mişcare de translație fig. 3.2.2.	$x - \frac{1}{k_e}F = 0$	$k_C = 1/k_e$ k_e=ct. elastică $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}\right]$	$F = k_e x$ sau $F = k_e\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + x(t_0)\right)$	$x = (1/k_e)F$ sau $v(t) = \frac{d}{dt}x = \frac{1}{k_e}\frac{dF}{dt}$	$\frac{1}{2}k_e x^2\Big\|_{x(t_0)}^{x(t)} = \frac{1}{2k_e}F^2\Big\|_{F(t_0)}^{F(t)}$
Mişcare de rotație	Arc de torsiune fig. 3.2.10.	$\theta - \frac{1}{k_t}M = 0$	$k_C = 1/k_t$ k_t=ct. torsiune $\left[\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2}}\right]$	$M = k_t\theta$ sau $M = k_t\left(\int_{t_0}^{t} \omega(\tau)d\tau + \theta(t_0)\right)$	$\theta = \frac{1}{k_t}M$ sau $\omega(t) = \frac{d(\theta)}{dt} = \frac{1}{k_t}\frac{dM}{dt}$	$\frac{1}{2}k_t\theta^2\Big\|_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} = \frac{1}{2k_t}M^2\Big\|_{M(t_0)}^{M(t)}$
Fluide necompresib.	Rezervor fig. 3.3.2.	$V - C_f \Delta P = 0$	$k_C = C_f$ cap. fluidică $[\mathrm{m^4 s^2/kg}]$	$\Delta P = (1/C_f)V$ sau $\Delta P = (1/C_f)\left(\int_{t_0}^{t} Q(\tau)d\tau + V(t_0)\right)$	$V = C_f \Delta P$ sau $Q(t) = \frac{d}{dt}(V(t)) = C_f \frac{d}{dt}\Delta P$	$\frac{V^2}{2C_f}\Big\|_{V(t_0)}^{V(t)} = \frac{C_f}{2}(\Delta P)^2\Big\|_{\Delta P(t_0)}^{\Delta P(t)}$
Sisteme termice	Subst. încălzită cu flux termic fig. 3.4.1.	$Q - C_t \Delta T = 0$	$k_C = C_t = mc$ cap. termică [J/K]	$\Delta T = \frac{1}{C_t}Q = \frac{1}{mc}Q$	$Q = C_t \Delta T = mc\Delta T$ sau $\dot{Q} = \frac{d}{dt}(Q) = C_t \frac{d(\Delta T)}{dt}$	

Tabelul 4.2.3.a. Elemente ce realizează disiparea energiei prin comportare de tip rezistiv – cazul general neliniar

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)			Energia disipată în unitatea de timp
		Forma acauzală	Forma cauzală		
		R-F	R-F|r	R-F|c	R-E
		$\Psi_R(e,f)=0$	$e=\Psi_R^r(f)$	$f=\Psi_R^c(e)$	$P=ef=\Psi_R^r(f)f=e\Psi_R^c(e)$
Circuite electrice	Rezistor (fig. 3.1.3.)	$\Psi_R(u,i)=0$	$u=\Psi_R^r(i)$	$i=\Psi_R^c(u)$	$P=u\cdot i=\Psi_R^r(i)\cdot i=u\cdot\Psi_R^c(u)$
Mişcare de translație	Corp în mişcare de translație cu frecare (fig. 3.2.3.)	$\Psi_R(F,v)=0$	$F=\Psi_R^r(v)$	$v=\Psi_R^c(F)$	$P=F\cdot v=\Psi_R^r(v)\cdot v=F\cdot\Psi_R^c(F)$
Mişcare de rotație	Corp în mişcare de rotație cu frecare (fig. 3.2.11.)	$\Psi_R(M,\omega)=0$	$M=\Psi_R^r(\omega)$	$\omega=\Psi_R^c(M)$	$P=M\cdot\omega=\Psi_R^r(\omega)\cdot\omega=$ $=M\cdot\Psi_R^c(M)$
Fluide necompresibile	Conductă de secțiune constantă (fig. 3.3.3.)	$\Psi_R(\Delta P,Q)=0$	$\Delta P=\Psi_R^r(Q)$	$Q=\Psi_R^c(\Delta P)$	$P=\Delta P\cdot Q=\Psi_R^r(Q)\cdot Q=$ $=\Delta P\cdot\Psi_R^c(\Delta P)$
Sisteme termice	Perete având temperaturi diferite pe cele două fețe şi străbătut de un flux termic (fig. 3.4.2.)	$\Psi_R(\Delta T,\dot{Q})=0$	$\Delta T=\Psi_R^r(\dot{Q})$	$\dot{Q}=\Psi_R^c(\Delta T)$	Q

Tabelul 4.2.3.b. Elemente ce realizează disiparea energiei prin comportare de tip rezistiv – cazul liniar

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)				Energia disipată în unitatea de timp
		Forma acauzală	Parametru Denumire U.M. în S.I.	Forma cauzală		
		R|L-F		R|L -F|r	R|L -F|c	R|L -E
		$e - k_R f = 0$		$e = k_R f$	$f = \frac{1}{k_R} e$	$P = k_R f^2 = \frac{e^2}{k_R}$
Circuite electrice	Rezistor fig. 3.1.3.	$u - R_e i = 0$ sau $u - \frac{1}{G_e} i = 0$	R_e = rezistență electrică $[\Omega] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right] = \left[\mathrm{m}^2\mathrm{kg/A}^2\mathrm{s}^3\right]$ G_e = conductanță electrică $[\Omega^{-1}]$	$u = R_e i$	$i = \frac{1}{R_e} u = G_e u^2$	$P = R_e i^2 = \frac{1}{R_e} u^2 = G_e u^2$
Mişcare de translație	Corp în mişcare de translație cu frecare fig. 3.2.3.	$F - \gamma v = 0$	γ = coeficient de frecare vâscoasă la translație [Ns/m]	$F = \gamma v$	$v = (1/\gamma) F$	$P = \gamma v^2 = \frac{1}{\gamma} F^2$
Mişcare de rotație	Corp în mişcare de rotație cu frecare fig. 3.2.11.	$M - \gamma_t \omega = 0$	γ_t = coeficient de frecare vâscoasă la rotație [Nms/rad]	$M = \gamma_t \omega$	$\omega = (1/\gamma_t) M$	$P = \gamma_t \omega^2 = \frac{1}{\gamma_t} M^2$
Fluide necompresibile	Conductă de secțiune constantă fig. 3.3.3.	$\Delta P - R_f Q = 0$	R_f = rezistența fluidică [kg/sm^4]	$\Delta P = R_f Q$	$Q = \left(1/R_f\right) \Delta P$	$P = R_f Q^2 = \frac{1}{R_f} \Delta P^2$
Sisteme termice	Perete având temperaturi diferite pe cele două fețe şi străbătut de un flux termic fig. 3.4.2.	$\Delta T - R_t \dot{Q} = 0$	R_t = rezistența termică [K/W]	$\Delta T = R_t \dot{Q}$	$\dot{Q} = (1/R_t) \Delta T$	Q

Tabelul 4.2.4. Elemente ce funcționează ca surse ideale de putere

Domenii ale fizicii	Surse ideale cu variabila de tip (e) impusă (S_e)		Surse ideale cu variabila de tip (f) impusă (S_f)	
	Element tipic	Caracteristică de funcționare $e(t)$ – prestabilit $f(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului	Element tipic	Caracteristică de funcționare $f(t)$ – prestabilit $e(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului
Circuite electrice	Sursă ideală de tensiune electrică fig. 3.1.4.	$u(t)$ – prestabilit $i(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului	Sursă ideală de curent fig. 3.1.5.	$i(t)$ – prestabilit $u(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului
Mișcare de translație	Sursă ideală de forță fig. 3.2.4.	$F(t)$ – prestabilit $v(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului	Sursă ideală de viteză fig. 3.2.5.	$v(t)$ – prestabilit $F(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului
Mișcare de rotație	Sursă ideală de cuplu fig. 3.2.12.	$M(t)$ – prestabilit $\omega(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului	Sursă ideală de viteză unghiulară fig. 3.2.13.	$\omega(t)$ – prestabilit $M(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului
Fluide necombresibile	Sursă ideală de presiune fig. 3.3.4.	$\Delta P(t)$ – prestabilit $Q(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului	Sursă ideală de debit fig. 3.3.5.	$Q(t)$ – prestabilit $\Delta P(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului
Sisteme termice	Sursă ideală de temperatură fig. 3.4.3.	$T(t)$ – prestabilit $\dot{Q}(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului	Sursă ideală de flux termic fig. 3.4.4.	$\dot{Q}(t)$ – prestabilit $T(t)$ – rezultă din funcționarea sistemului

Tabelul 4.2.5 Elemente ce conservă energia realizând transferul puterii după principiul transformatorului

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)			Raport de transformare
		Forma acauzală	Forma cauzală		
		(TF-F)	(TF-F|12)	(TF-F|21)	
		$e_1 f_1 = e_2 f_2$	$e_2 = k_{TF}^{1,2} e_1$ $f_1 = k_{TF}^{1,2} f_2$	$e_1 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) e_2$ $f_2 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) f_1$ $k_{TF}^{2,1} = 1/k_{TF}^{1,2}$	$k_{TF}^{1,2} = \frac{e_2}{e_1}$
Circuite electrice	Transformator electric (fig. 3.1.6.)	$u_1 i_1 = u_2 i_2$	$u_2 = k_{TF}^{1,2} u_1$ $i_1 = k_{TF}^{1,2} i_2$	$u_1 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) u_2$ $i_2 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) i_1$	$k_{TF}^{1,2} = \frac{u_2}{u_1}$
Mişcare de translație	Pârghie (fig.3.2.6.a.) Scripete (fig. 3.2.6.b.)	$F_1 v_1 = F_2 v_2$	$F_2 = k_{TF}^{1,2} F_1$ $v_1 = k_{TF}^{1,2} v_2$	$F_1 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) F_2$ $v_2 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) v_1$	$k_{TF}^{1,2} = \frac{F_2}{F_1}$
Mişcare de rotație	Angrenaj cilindric (fig. 3.2.14.)	$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$	$M_2 = k_{TF}^{1,2} M_1$ $\omega_1 = k_{TF}^{1,2} \omega_2$	$M_1 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) M_2$ $\omega_2 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) \omega_1$	$k_{TF}^{1,2} = \frac{M_2}{M_1}$
Fluide necompresibile	Transformatorul hidraulic (fig. 3.3.6.)	$\Delta P_1 Q_1 = \Delta P_2 Q_2$	$\Delta P_2 = k_{TF}^{1,2} \Delta P_1$ $Q_1 = k_{TF}^{1,2} Q_2$	$\Delta P_1 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) \Delta P_2$ $Q_2 = \left(1/k_{TF}^{1,2}\right) Q_1$	$k_{TF}^{1,2} = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}$
Sisteme termice	În cadrul unor astfel de sisteme nu se pune problema acestor tipuri de elemente din cauza modului specific de definire a variabilelor de tip (e) şi (f)				

Tabelul 4.2.6. Elemente ce conservă energia realizând transferul puterii după principiul giratorului

Domenii ale fizicii	Exemplu de element tipic	Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)			Raport de transformare
		Forma acauzală	Forma cauzală		
		(GY-F)	(GY-F|fe)	(GY-F|ef)	
		$e_1 f_1 = e_2 f_2$	$e_2 = k_{GY}^{fe} f_1$ $e_1 = k_{GY}^{fe} f_2$	$f_1 = \left(1/k_{GY}^{fe}\right) e_2$ $f_2 = \left(1/k_{GY}^{fe}\right) e_1$ $k_{GY}^{fe} = 1/k_{GY}^{ef}$	$k_{GY}^{fe} = \dfrac{e_2}{f_1}$
Sisteme electro-mecanice	Conductor în câmp magnetic (fig. 3.5.3.)	$Fv = ui$	$F = k_{GY}^{fe} i$ $u = k_{GY}^{fe} v$	$i = \left(1/k_{GY}^{fe}\right) F$ $u = \left(1/k_{GY}^{fe}\right) v$	$k_{GY}^{fe} = \dfrac{F}{i}$ $k_{GY}^{fe} = lB\ [\mathrm{T \cdot m}] = [\mathrm{kg \cdot m/A \cdot s^2}]$
Sisteme mecanice “translație – rotație”	Sistem mecanic tip giroscop (fig. 3.5.4)	$F_1 v_1 = F_2 v_2$	$F_1 = k_{GY}^{fe} v_2$ $F_2 = k_{GY}^{fe} v_1$	$v_2 = k_{GY}^{fe} F_1$ $v_1 = k_{GY}^{fe} F_2$	$k_{GY}^{fe} = \dfrac{F_1}{\omega_2}$ $k_{GY}^{fe} = \dfrac{J\omega_v}{l}\quad [\mathrm{N \cdot s}] = \left[\dfrac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}\right]$

Tabelul 4.3.1. Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabila de tip (*e*) (joncțiunea J0)

Domenii ale fizicii	Exemplu de conectare a trei elemente	Cazul general a *n* elemente conectate. Caracteristica de funcționare a conectării (joncțiunii)	
		Forma acauzală (J0-F)	Forma cauzală (J0-F|k) conexiunea (elementul) cu indice *k* al joncțiunii impune valoarea comună a variabilelor de tip (*e*)
		$e_1=\ldots=e_j=\ldots=e_n$ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j=0 \quad \alpha_j\in\{-1,+1\}$	$e_j=e_k \quad j=1,\ldots,n; \quad j\neq k; \quad f_k=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j f_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_k}f_j \quad \alpha_j,\alpha_k\in\{-1,+1\}$
Circuite electrice	Fig. 3.1.7.	$u_1=\ldots=u_j=\ldots=u_n$ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j i_j=0 \quad \alpha_j\in\{-1,+1\}$	$u_j=u_k \quad j=1,\ldots,n; \quad j\neq k; \quad i_k=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j i_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_k}i_j \quad \alpha_j,\alpha_k\in\{-1,+1\}$
Mişcare de translație	Fig. 3.2.7.	$F_1=\ldots=F_j=\ldots=F_n$ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j=0 \quad \alpha_j\in\{-1,+1\}$	$F_j=F_k \quad j=1,\ldots,n; \quad j\neq k$ $v_k=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j v_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_k}v_j \quad \alpha_j,\alpha_k\in\{-1,+1\}$
Mişcare de rotație	Fig. 3.2.15.	$M_1=\ldots=M_j=\ldots=M_n$ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\omega_j=0 \quad \alpha_j\in\{-1,+1\}$	$M_j=M_k \quad j=1,\ldots,n; \quad j\neq k$ $\omega_k=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j\omega_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\omega_j \quad \alpha_j,\alpha_k\in\{-1,+1\}$
Fluide necompresibile	Fig. 3.3.7.	$\Delta P_1=\ldots=\Delta P_j=\ldots=\Delta P_n$ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j Q_j=0 \quad \alpha_j\in\{-1,+1\}$	$\Delta P_j=\Delta P_k \quad j=1,\ldots,n; \quad j\neq k$ $Q_k=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j Q_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_k}Q_j \quad \alpha_j,\alpha_k\in\{-1,+1\}$
Sisteme termice	Fig. 3.4.5.	$\Delta T_1=\ldots=\Delta T_j=\ldots=\Delta T_n$ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\dot{Q}_j=0 \quad \alpha_j\in\{-1,+1\}$	$\Delta T_j=\Delta T_k \quad j=1,\ldots,n; \quad j\neq k$ $\dot{Q}_k=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j\dot{Q}_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\dot{Q}_j \quad \alpha_j,\alpha_k\in\{-1,+1\}$

Tabelul 4.3.2. Joncțiunea (conectarea) mai multor elemente ce posedă aceeaşi variabila de tip (*f*) (joncțiunea J1)

Domenii ale fizicii	Exemplu de conectare a trei elemente	Cazul general a *n* elemente conectate. Caracteristica de funcționare a conectării (joncțiunii)	
		Forma acauzală (J1-F)	Forma cauzală (J0-F|k) conexiunea (elementul) cu indice *k* al joncțiunii impune valoarea comună a variabilelor de tip (*f*)
		$f_1 = \ldots = f_2 = \ldots = f_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}$	$f_j = f_k \quad j = 1,\ldots,n; \quad j \neq k; \quad e_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} e_j \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}$
Circuite electrice	Fig. 3.1.8.	$i_1 = \ldots = i_j = \ldots = i_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}$	$i_j = i_k \quad j = 1,\ldots,n; \quad j \neq k; \quad u_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j u_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} u_j \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}$
Mişcare de translație	Fig. 3.2.8.	$v_1 = \ldots = v_j = \ldots = v_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}$	$v_j = v_k \qquad j = 1,\ldots,n; \quad j \neq k$ $F_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} F_j \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}$
Mişcare de rotație	Fig. 3.2.16.	$\omega_1 = \ldots = \omega_j = \ldots = \omega_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j M_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}$	$\omega_j = \omega_k \qquad j = 1,\ldots,n; \quad j \neq k$ $M_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j M_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} M_j \qquad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}$
Fluide necompresibile	Fig. 3.3.8.	$\Delta Q_1 = \ldots = \Delta Q_j = \ldots = \Delta Q_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Delta P_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}$	$\Delta Q_j = \Delta Q_k \qquad j = 1,\ldots,n; \quad j \neq k$ $\Delta P_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j \Delta P_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \Delta P_j \qquad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}$
Sisteme termice	Fig. 3.4.6	$\dot{Q}_1 = \ldots = \dot{Q}_j = \ldots = \dot{Q}_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Delta T_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1,+1\}$	$\dot{Q}_j = \dot{Q}_k \qquad j = 1,\ldots,n; \quad j \neq k$ $\Delta T_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j \Delta T_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \Delta T_j \qquad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1,+1\}$

4.2.3. Elemente ce realizează disiparea energiei (elemente R)

Disiparea energiei în sisteme este modelată de un element, notat R, şi denumit *rezistor* sau *element disipativ* pentru faptul că modelează disiparea energiei în mod similar cu rezistența electrică. Din capitolul anterior rezultă că acest element este prezent în toate domeniile fizicii care au fost abordate şi are un comportament asemănător constând în similaritatea relațiilor matematice în care variabilele se corespund conform tabelului 4.1.1. Astfel se constată aceeaşi formă a caracteristicii de funcționare şi acelaşi mod de calcul al energiei disipate în unitatea de timp. Aceste aspecte sunt tratate sintetic în tabelul 4.2.3, el evidențiind posibilitatea tratării unitare a elementului disipativ în cadrul modelării sistemelor fizice.

4.2.4. Elemente care funcţionează ca surse ideale de putere (elemente S_e şi S_f)

Puterea este furnizată sistemelor fizice de aşa numitele surse de putere care sunt reprezentate de motoare, pompe, surse de căldură etc. Ele sunt alese astfel încât să poată elibera puterea necesară sistemului pentru ca acesta să-şi poată îndeplini rolul pentru care a fost conceput. După cum rezultă din capitolul anterior, puterea unei surse se calculează efectuând produsul dintre variabilele puterii numite generic efort şi respectiv flux care, în funcție de domeniul energetic în care se lucrează, corespund unor mărimi fizice concrete care se pot găsi în tabelul 4.1.1. Pentru modelarea surselor se ține cont de faptul că, în realitate, una dintre variabilele puterii poate fi considerată impusă de sursă (eventual constantă) iar cealaltă poate să ia valori într-un anumit interval în funcție de necesarul de putere al sistemului, fără a depăşi posibilitățile fizice reale ale sursei. De exemplu, o sursă de energie electrică poate avea tensiune constantă şi poate furniza curentul cu intensitatea între anumite limite (sursă de tensiune) sau poate furniza curent de o anumită intensitate însă cu tensiunea între anumite limite (sursă de curent). În această idee, modelarea surselor se bazează pe conceperea unui model denumit sursă ideală de putere care este considerat ca putând furniza orice putere având prestabilită una dintre variabilele puterii. Cealaltă variabilă a puterii se consideră că poate lua orice valoare necesară pentru a furniza sistemului puterea de care are nevoie, cu alte cuvinte acest model de sursă ideală nu este influențat cu nimic din ceea ce se întâmplă în sistem, sursa ideală putând face față unei cereri oricât de mari de putere din partea sistemului.

S-au conceput, pe baza observațiilor de mai sus, două tipuri de surse ideale de putere, şi anume:

- *surse ideale de efort* (notate S_e) care au *variabila efort prestabilită* iar variabila flux rezultând din funcționarea sistemului. Aceste tipuri de surse sunt prezentate sintetic în tabelul 4.2.4, din care reiese gradul larg de generalitate al acestui model, sursele de efort regăsindu-se în toate domeniile energetice abordate cu respectarea corespondenței variabilelor conform tabelului 4.1.1.
- *surse ideale de flux* (notate S_f) care au *variabila flux prestabilită* iar variabila efort rezultând din funcționarea sistemului. Aceste tipuri de surse sunt prezentate sintetic în tabelul 4.2.4, din care reiese gradul larg de generalitate al modelului, sursele de flux regăsindu-se şi ele în toate domeniile energetice abordate respectând corespondența variabilelor dată în tabelul 4.1.1.

4.2.5. Elemente ce conservă energia realizând transferul puterii după principiul transformatorului (elemente TF)

În cursul procesării energiei de către un sistem, pot exista situații în care *puterea se conservă,* însă cele două variabile ale ei își modifică valorile astfel încât produsul lor rămâne constant. Sunt două tipuri de elemente ideale care modelează un astfel de transfer de putere, adică modifică în acest mod valorile variabilelor puterii. Unul realizează transferul puterii după *principiul transformatorului*, iar celălalt după *principiul giratorului*.

Elementele ideale care modelează transferul puterii după principiul transformatorului, notate TF, conservă puterea modificând însă valorile variabilelor acesteia utilizând o lege similară cu cea care guvernează funcționarea unui transformator electric, adică raportul de transformare este dat de raportul dintre tensiunea de ieşire şi cea de intrare şi este totodată egal cu raportul dintre intensitatea curentului de intrare şi cea a curentului de ieşire. În majoritatea domeniilor energetice există elemente care se pot modela astfel, variabilele puterii domeniului energetic respectiv respectând corespondența ce este evidențiată în tabelul 4.1.1. În capitolul anterior au fost prezentate elementele TF şi, pe baza similitudinii caracteristicilor de funcționare, în tabelul 4.2.5 s-a realizat o prezentare sintetică a acestor elemente evidențiindu-se gradul larg de generalitate al modelului.

4.2.6. Elementele ce conservă energia realizând transferul puterii după principiul giratorului (elemente GY)

Elementele ideale care modelează transferul puterii după principiul giratorului, notate GY, se deosebesc de elementele TF prin aceea că raportul de transformare este un raport între efortul de ieşire şi fluxul de intrare, respectiv între efortul de intrare şi fluxul de ieşire, deci nu este un raport între variabilele de acelaşi tip. De regulă aceste elemente realizează transferul puterii dintr-un domeniu energetic în altul, de exemplu transferă energie din domeniul mecanic în domeniul electric, conservând puterea. Păstrând corespondența variabilelor conform tabelului 4.1.1, în tabelul 4.2.6 se evidențiază generalitatea unui astfel de element care, deşi apare mai puțin frecvent în aplicații, îşi are aportul său în modelarea sistemelor.

4.3. Studiul comparativ al modalităţilor tipice de conectare (joncţiuni)

Toate elementele menționate până acum modelează procesarea energiei în cadrul sistemelor, dar, pentru a modela efectiv circulația acesteia în sistem, trebuie luată în discuție conectarea lor, adică modul în care se face transferul energetic de la un element la altul. Pentru realizarea conectării există două posibilități care sunt date de conectarea directă între elemente şi de conectarea prin intermediul unor elemente specifice de conectare numite *joncțiuni*. Acestea din urmă se utilizează, de regulă, atunci când este necesară conectarea a mai mult de două elemente care au aceeaşi valoare pentru una din variabilele puterii. Ele sunt de două tipuri: joncțiuni zero, notate J0 şi joncțiuni unu, notate J1.

4.3.1. Conectarea elementelor ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*e*) (joncţiuni J0)

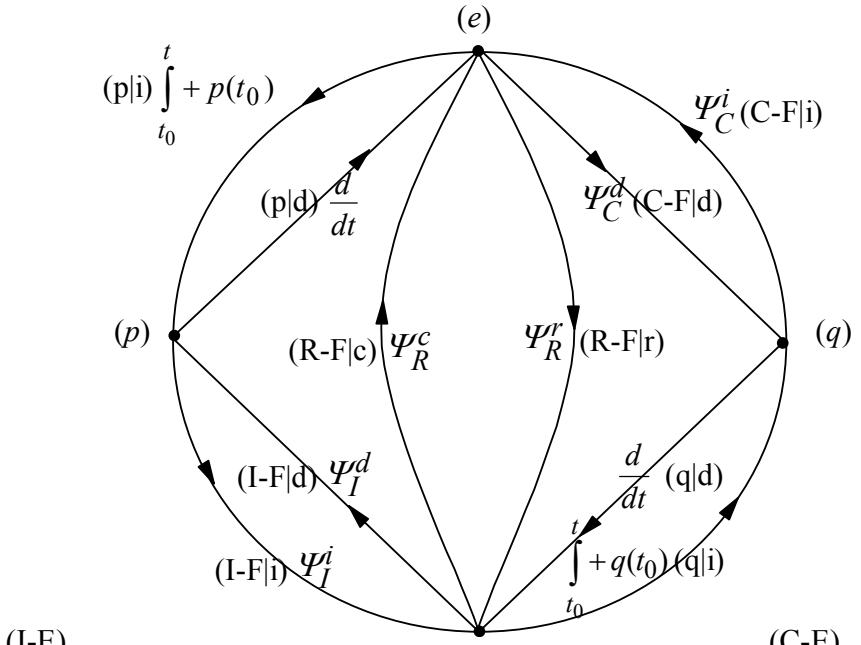
Dacă mai multe elemente au aceeaşi valoare pentru variabila de tip (*e*), atunci ele se conectează folosind un element numit joncțiune zero (J0). În capitolul anterior s-a arătat modul de utilizare şi de funcționare a acestei joncțiuni în cadrul unor sisteme care prelucrează diverse tipuri de energie. Tabelul 4.3.1 prezintă sintetic ceea ce a fost discutat anterior pe domenii energetice, evidențiindu-se astfel, pe baza corespondenței dintre variabilele puterii dată în tabelul 4.1.1, posibilitatea de a defini un element J0 generalizat care conectează elemente ce au aceeaşi valoare a variabilei de tip (*e*) indiferent de domeniul energetic căruia îi aparține elementul conectat. De remarcat că joncțiunea J0 conservă puterea.

4.3.2. Conectarea elementelor ce posedă aceeaşi variabilă de tip (*f*) (joncţiuni J1)

Elementele care au aceeaşi valoare pentru variabila de tip (*f*) se pot conecta folosind un element similar cu J0 numit de această dată joncțiune unu (J1). În capitolul anterior s-a arătat modul de folosire şi de funcționare a acestei joncțiuni în cadrul unor sisteme care prelucrează diverse tipuri de energie. Aceste rezultate sunt prezentate sintetic în tabelul 4.3.2 pentru a putea remarca mai uşor, pe baza corespondenței variabilelor puterii dată în tabelul 4.1.1, că se poate defini un element J1 generalizat care conectează elemente ce au aceeaşi valoare a variabilei de tip (*f*), indiferent de domeniul energetic căruia îi aparține elementul conectat. La fel ca şi joncțiunea J0, joncțiunea J1 conservă puterea.

4.4. Prezentare sintetică a exprimărilor cauzale pentru legile fizicii discutate anterior

Sinteza făcută în paragrafele anterioare conduce la posibilitatea de a realiza o privire de ansamblu asupra legilor din diverse domenii energetice ale fizicii bazată atât pe corespondența celor patru variabile (*e*, *f*, *p* şi *q*) cât şi pe similitudinea formelor relațiilor dintre acestea. Astfel în orice domeniu energetic în care sunt definite cele patru variabile, relațiile dintre ele au aceeaşi formă generală care se poate scrie sintetic folosind elementele I, C şi R. Acest fapt permite să putem raționa independent de domeniul energetic în care lucrăm şi să folosim, în scrierea relațiilor, elementele de natură generală definite anterior. În figurile 4.4.1 şi 4.4.2 sunt prezentate relațiile de bază dintre mărimile fundamentale *e*, *f*, *p* şi *q*, desenul dorind să fie şi un mijloc mnemonic eficient pentru a ilustra aceste relații. Sensul atribuit săgeților indică procesarea cauzală a semnalelor în funcție de tipul de element generic I, C, sau R. Diagramele conțin, sub formă compactă, informațiile generale referitoare la cele trei tipuri de elemente care se găsesc pe prima linie a fiecăruia dintre tabelele 4.2.1, 4.2.2 şi 4.2.3. Se observă imediat că, datorită liniarității, relațiile din fig. 4.4.2 reprezintă un caz particular al descrierilor matematice formulate pentru diagrama din fig.4.4.1.



(I-E)

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{p(t_0)}^{p(t)}\Psi_I^i(p)dp$$

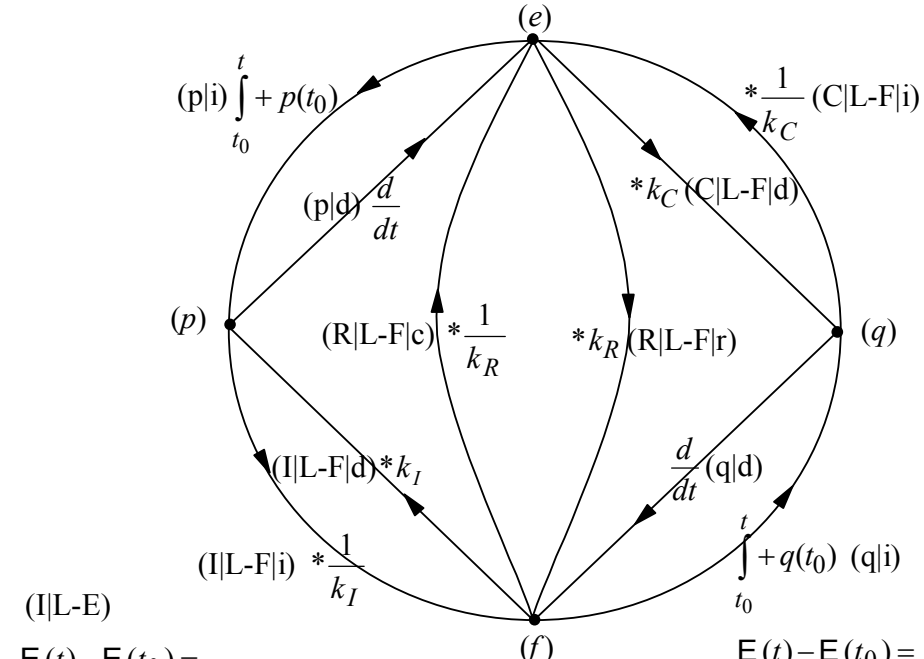
(R-E)

$$\mathsf{P}=ef=\Psi_R^r(f)f=\Psi_R^C(e)e$$

(C-E)

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=\int_{q(t_0)}^{q(t)}\Psi_C^i(q)dq$$

Fig. 4.4.1. Similarități în exprimarea legilor fizicii utilizând variabile generalizate $e, f, p, q.$ – cazul general neliniar



(I|L-E)

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=$$

$$=\frac{1}{2k_I}p^2\Big|_{p(t_0)}^{p(t)}=\frac{k_I}{2}f^2\Big|_{f(t_0)}^{f(t)}$$

(R|L-E)

$$\mathsf{P}=k_Rf^2=\frac{1}{k_R}e^2$$

(C|L-E)

$$\mathsf{E}(t)-\mathsf{E}(t_0)=$$

$$=\frac{1}{2k_C}q^2\Big|_{q(t_0)}^{q(t)}=\frac{k_C}{2}e^2\Big|_{e(t_0)}^{e(t)}$$

Fig. 4.4.2. Similarități în exprimarea legilor fizicii utilizând variabile generalizate e, f, p, q – cazul liniar

4.5. Exemple de sisteme fizice ilustrând analogii comportamentale

Aşa după cum s-a arătat, între diverse domenii ale fizicii există analogii la nivelul elementelor fundamentale cu ajutorul cărora se construiesc sistemele precum şi la nivelul modalităților de conectare a acestor elemente. Aceste analogii vor fi evidențiate în continuare cu ajutorul unor sisteme aparținând unor domenii energetice diferite dar care, din punct de vedere structural şi comportamental, sunt analoge.

4.5.1. Sisteme conţinând elemente S_e, R, C, conectate prin J1

Se consideră sistemul electric din fig. 4.5.1, sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translație din fig. 4.5.2, sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotație din fig. 4.5.3, sistemul hidraulic cu curgere laminară din fig. 4.5.4 şi sistemul termic din fig. 4.5.5.

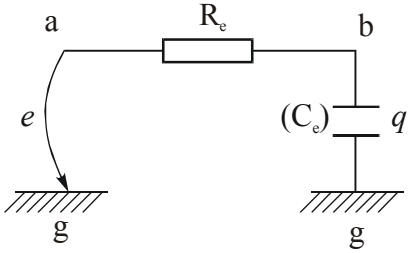


Fig. 4.5.1. Sistem electric format din elementele S_e, R, C şi J1

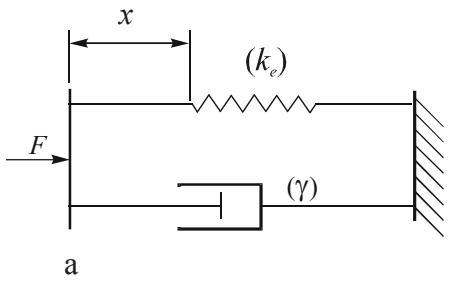


Fig. 4.5.2. Sistem mecanic în mişcare de translație format din elementele S_e, R, C şi J1

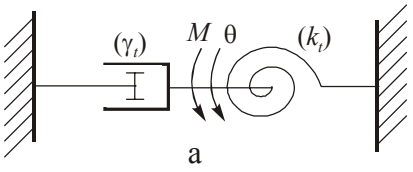


Fig. 4.5.3. Sistem mecanic în mişcare de rotație format din elementele S_e, R, C şi J1

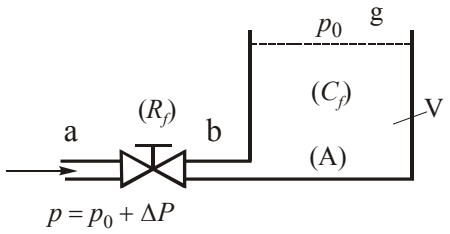


Fig. 4.5.4. Sistemul hidraulic format din elementele S_e, R, C şi J1

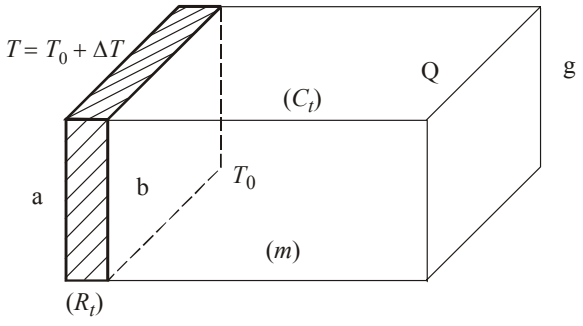


Fig. 4.5.5. Sistem termic format din elementele S_e, R, C şi J1

Fiecare dintre ele este alcătuit din: un subsistem generator de putere (un element S_e de tip sursă ideală de efort) care este o sursă de tensiune de mărime *e* pentru sistemul electric, un motor liniar care furnizează o forță *F* pentru sistemul mecanic în mişcare de translație, un motor rotativ care furnizează un cuplu *M* pentru sistemul mecanic în mişcare de rotație, o pompă care furnizează o diferență de presiune ΔP pentru sistemul hidraulic şi respectiv o sursă de temperatură care furnizează temperatura ΔT pentru sistemul termic; un subsistem disipativ de energie (un element *R* de tip rezistiv) care este o rezistența electrică de valoare R_e pentru sistemul electric, un amortizor vâscos liniar având un coeficient de frecare vâscoasă γ pentru sistemul mecanic în mişcare de translație, un amortizor vâscos rotativ având coeficientul de frecare vâscoasă γ_t pentru sistemul mecanic în mişcare de rotație, un robinet având rezistența fluidică R_f pentru sistemul hidraulic şi respectiv un perete având rezistența termică R_t pentru sistemul termic; un subsistem acumulator de energie (un element C de tip condensator) care este un condensator electric de capacitate C_e pentru sistemul electric, un arc liniar având constanta elastică k_e pentru sistemul mecanic în mişcare de translație, un arc de torsiune având constanta de torsiune k_t pentru sistemul mecanic în mişcare de rotație, un rezervor de arie constantă *A* având capacitatea fluidică C_f pentru sistemul hidraulic şi respectiv o masă de substanță *m* dintr-o incintă încălzită având capacitatea termică C_t pentru sistemul termic.

În cadrul celor cinci tipuri de sisteme, elementele S_e, C şi R au aceeaşi variabilă de tip *f* (intensitatea *i* a curentului pentru circuitul electric, viteza *v* a punctului a pentru sistemul mecanic în mişcare de translație, viteza unghiulară ω din punctul a pentru sistemul mecanic în mişcare de rotație, debitul *Q* pentru sistemul hidraulic şi fluxul de căldură $\dot{Q}$ pentru sistemul termic), prin urmare legătura între ele poate fi modelată cu ajutorul unei joncțiuni J1. Sursele nu sunt desenate în mod explicit, ci sunt sugerate numai eforturile aplicate de ele (tensiunea *e*, forța *F*, cuplul *M*, presiunea ΔP respectiv temperatura ΔT) care sunt şi mărimile de intrare notate generic cu *u*. Mărimile de ieşire, care se notează generic cu *y*, sunt cantitatea de electricitate *q* care trece prin circuit şi se acumulează în condensator pentru sistemul electric (fig. 4.5.1), deplasarea liniară *x* pentru sistemul mecanic în mişcare de translație (fig. 4.5.2), deplasarea unghiulară θ pentru sistemul mecanic în mişcare de rotație (fig. 4.5.3), volumul de lichid *V* transportat prin conducte şi acumulat în rezervor pentru sistemul hidraulic (fig. 4.5.4) şi respectiv cantitatea de căldură *Q* care străbate peretele şi se acumulează în masa de substanță din incintă pentru sistemul termic (fig. 4.5.5.).

Pe lângă o structură fizică analogă, care reiese din cele de mai sus, se va arăta că cele cinci tipuri de sisteme pot fi modelate printr-o *ecuație diferențială generică* de forma (2.3.1):

$$k_R \dot{y} + \frac{1}{k_C} y = u ,$$

în care parametrii k_R şi k_C capătă semnificații corespunzătoare categoriei energetice procesate de sistem.

În cazul *sistemului electric* din fig. 4.5.1. tensiunea *e*, furnizată de sursă, este egală cu suma căderilor de tensiune u_R pe rezistență şi u_c pe condensator:

$$e = u_R + u_C .$$

Pe de altă parte, se pot scrie relațiile

$$u_R = R_e i = R_e \dot{q}$$

şi

$$u_C = \frac{1}{C_e} q ,$$

care, după înlocuire, conduc la ecuaţia diferenţială care modelează comportarea circuitului

$$R_e \dot{q} + \frac{1}{C_e} q = e .$$

Aceasta are forma generică arătată anterior dar cu următoarea semnificaţie a coeficienţilor

$$k_R = R_e \text{ şi } k_C = C_e .$$

Pentru *sistemul mecanic* din fig. 4.5.2 se scrie ecuaţia de echilibru dinamic a lui d'Alembert pentru placa de masă neglijabilă din punctul a

$$F - F_e - F_a = 0 ,$$

unde F_e este forţa elastică dezvoltată de arc iar F_a este forţa din amortizor. Dacă pentru $x = 0$ forţa elastică este nulă, atunci se pot scrie relaţiile

$$F_e = k_e x$$

şi

$$F_a = \gamma v = \gamma \dot{x} ,$$

care, înlocuite în ecuaţia de echilibru dinamic, o aduc la forma

$$\gamma \dot{x} + k_e x = F ,$$

care este de tipul ecuaţiei generice cu precizarea că valorile coeficienţilor sunt

$$k_R = \gamma \text{ şi } k_C = \frac{1}{k_e} .$$

Sistemul mecanic din fig. 4.5.3 nu conţine mase în rotaţie şi ecuaţia de echilibru dinamic este

$$M - M_e - M_a = 0 ,$$

în care M_e este momentul elastic al arcului de torsiune iar M_a este momentul de amortizare. Dacă pentru $\theta = 0$ momentul elastic este nul, atunci se pot scrie relaţiile

$$M_e = k_t \cdot \theta$$

şi

$$M_a = \gamma_t \omega = \gamma_t \dot{\theta} ,$$

care, înlocuite în ecuaţia de echilibru dinamic, o aduc la forma

$$\gamma_t \dot{\theta} + k_t \theta = M ,$$

care este de tipul ecuaţiei diferenţiale generice cu precizarea că semnificaţia coeficienţilor este

$$k_R = \gamma_t \text{ şi } k_C = \frac{1}{k_t}.$$

În cazul *sistemului hidraulic* cu curgere laminară din fig. 4.5.4. diferența de presiune ΔP creată de pompă este egală cu pierderea de presiune din robinet ΔP_r sumată cu presiunea de la baza rezervorului ΔP_v datorată volumului V de lichid, adică

$$\Delta P = \Delta P_r + \Delta P_v.$$

Utilizând relațiile

$$\Delta P_r = R_f Q = R_f \dot{V}$$

şi

$$\Delta P_v = \frac{1}{C_f} V$$

relația devine

$$R_f \dot{V} + \frac{1}{C_f} V = \Delta P,$$

adică o ecuație diferențială având aceeaşi formă cu a ecuației diferențiale generice cu precizarea că semnificația coeficienților este

$$k_R = R_f \text{ şi } k_C = C_f.$$

În *sistemul termic* din fig. 4.5.5, diferența de temperatură ΔT aplicată de sursa de temperatură este egală cu suma dintre pierderea de temperatură datorată rezistenței termice a peretelui ΔT_R şi diferența de temperatură corespunzătoare încălzirii masei de substanță ΔT_m, adică are loc relația

$$\Delta T = \Delta T_R + \Delta T_m.$$

Pe baza relațiilor

$$\Delta T_R = R_t \dot{Q},$$

$$\Delta T_m = \frac{1}{C_t} Q,$$

se obține, după înlocuirile corespunzătoare, ecuația diferențială

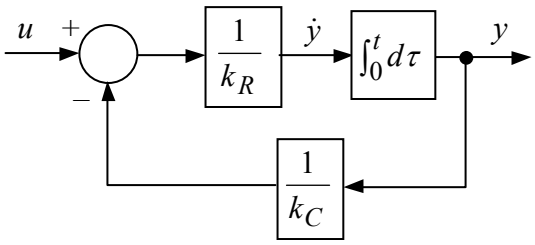


Fig. 4.5.6. Schema bloc corespunzătoare sistemelor din figurile 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4 şi 4.5.5

$$R_t \dot{Q} + \frac{1}{C_t} Q = \Delta T,$$

care are aceeaşi formă cu ecuația diferențială generică, cu precizarea că semnificația coeficienților este

$$k_R = R_t \text{ şi } k_C = C_t.$$

Pentru toate cele cinci tipuri de sisteme este valabilă aceeaşi *schemă bloc* reprezentată în fig. 4.5.6 care este obținută pe baza ecuației diferențiale generice, cu precizarea că semnificația mărimilor de intrare, de ieşire şi a

parametrilor este corespunzătoare tipului de energie procesat aşa după cum s-a arătat şi anterior.

Deoarece sistemele fizice prezentate sunt modelate cu ajutorul unei ecuații diferențiale generice având forma

$$k_R \dot{y} + \frac{1}{k_C} y = u,$$

rezultă că ele pot fi modelate printr-o *funcție de transfer generică*:

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1},$$

factorul de amplificare K fiind

$$K = k_C,$$

iar parametrul T fiind

$$T = k_R k_C.$$

Într-adevăr, aplicând transformarea Laplace ecuației diferențiale, rezultă

$$k_R s Y(s) + \frac{1}{k_C} Y(s) = U(s),$$

din care se obține funcția de transfer

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{k_R s + \frac{1}{k_C}} = \frac{k_C}{k_R k_C s + 1} = \frac{K}{Ts+1}.$$

Pentru sistemul electric rezultă

$$K = C_e[\mathrm{F}], \quad T = R_e C_e[\mathrm{s}];$$

pentru sistemul mecanic în mişcare de translație

$$K = \frac{1}{k_e}\left[\mathrm{s}^2/\mathrm{kg}\right], \quad T = \frac{\gamma}{k_e}[\mathrm{s}];$$

pentru sistemul mecanic în mişcare de rotație

$$K = \frac{1}{k_t}\left[\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{rad}/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\right], \quad T = \frac{\gamma_t}{k_t}[\mathrm{s}];$$

pentru sistemul hidraulic

$$K = C_f\left[\mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s}^2/\mathrm{kg}\right], \quad T = R_f C_f[\mathrm{s}];$$

iar pentru sistemul termic

$$K = C_t\left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{K} \cdot \mathrm{s}^2\right], \qquad T = R_t C_t[\mathrm{s}].$$

4.5.2. Sisteme conţinând elemente Se, R, I conectate prin J1

Un alt grup de sisteme fizice având comportament analog este format din sistemul electric din fig. 4.5.7, sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translaţie din fig. 4.5.8, din sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie din fig. 4.5.9 şi din sistemul hidraulic cu curgere laminară din fig. 4.5.10. Fiecare dintre ele este alcătuit dintr-un subsistem generator de putere (un element S_e de tip sursă ideală de efort) care este la fel ca la grupul anterior de sisteme din paragraful 4.5.1, dintr-un subsistem disipativ de energie (un element R de tip rezistiv) care este la fel ca la grupul anterior de sisteme din paragraful 4.5.1 şi dintr-un subsistem acumulator de energie (un element I de tip inductor) care este o bobină de inductanţă L pentru sistemul electric, o masă de mărime m pentru sistemul mecanic în mişcare de translaţie, un volant de moment de inerţie principal central J pentru sistemul în mişcare de rotaţie şi fluidul dintr-o conductă lungă cu curgere laminară de inductanţă fluidică L_f. Nu a fost considerat şi un sistem termic deoarece la astfel de sisteme nu este definit un element inerţial.

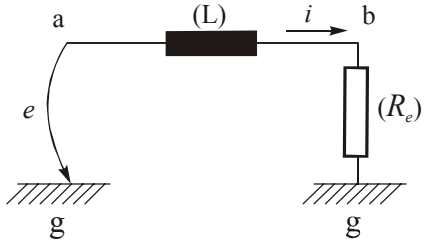


Fig. 4.5.7. Sistem electric format din elementele S_e, R, I şi J1

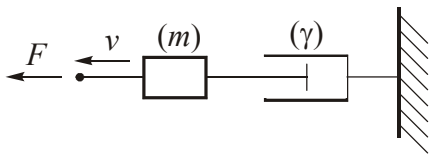


Fig. 4.5.8. Sistem mecanic în mişcare de translaţie format din elementele S_e, R, I şi J1

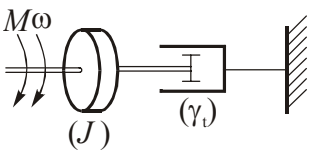


Fig. 4.5.9. Sistem mecanic în mişcare de rotaţie format din elementele S_e, R, I şi J1

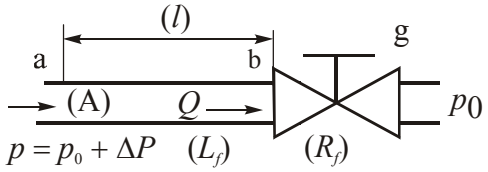


Fig. 4.5.10. Sistem hidraulic cu curgere laminară format din elementele S_e, R, I şi J1

La fel ca în cazul anterior din paragraful 4.5.1 şi la acest grup de sisteme elementele S_e, R şi I au aceeaşi variabilă de tip f (reprezentând aceleaşi mărimi fizice) ceea ce face posibilă modelarea legăturii dintre ele tot cu o joncţiune J1.

Mărimile de intrare sunt aceleaşi ca la primul grup de sisteme din paragraful 4.5.1, dar mărimile de ieşire diferă, ele fiind intensitatea i a curentului din circuit pentru sistemul electric, viteza v a masei m pentru sistemul mecanic în mişcare de translaţie, viteza unghiulară ω a volantului pentru sistemul mecanic în mişcare de rotaţie şi debitul Q al fluidului pentru sistemul hidraulic.

Aceste patru tipuri de sisteme au o structură fizică analogă şi se va arăta că pot fi modelate printr-o *ecuaţie diferenţială generică* de forma (2.3.1):

$$k_I \dot{y} + k_R y = u\,,$$

în care parametrii k_I şi k_R capătă semnificaţii corespunzătoare categoriei energetice căreia îi aparţine sistemul.

La *sistemul electric* din fig. 4.5.7 tensiunea e furnizată de sursă este egală cu suma căderilor de tensiune u_R pe rezistență şi u_L pe bobină:

$$e = u_R + u_L .$$

Cele două tensiuni se pot scrie

$$u_R = R_e i$$

şi respectiv

$$u_L = L\frac{di}{dt},$$

care, după efectuarea înlocuirilor corespunzătoare, conduc la ecuația diferențială

$$L\frac{di}{dt} + R_e i = e$$

ce are aceeaşi formă cu ecuația generică, iar semnificația coeficienților este

$$k_I = L \text{ şi } k_R = R_e .$$

Pentru *sistemul mecanic* din fig. 4.5.8 se scrie ecuația de echilibru dinamic a lui d'Alembert pentru elementul inerțial de masă m. Aceasta este

$$F - F_a - F_i = 0,$$

unde F_a este forța datorată amortizorului

$$F_a = \gamma v,$$

iar F_i este forța de inerție

$$F_i = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

După efectuarea substituirilor, ecuația de echilibru dinamic devine

$$m\frac{dv}{dt} + \gamma v = F,$$

adică având aceeaşi formă cu ecuația generică şi cu următoarele semnificații ale coeficienților

$$k_I = m \text{ şi } k_R = \gamma .$$

Tot o ecuație de echilibru dinamic a lui d'Alembert se scrie şi în cazul *sistemului mecanic* din fig. 4.5.9, dar pentru volantul având momentul de inerție mecanic J. Aceasta este

$$M - M_i - M_a = 0,$$

unde M_i este momentul forțelor de inerție

$$M_i = J\frac{d\omega}{dt},$$

iar M_a este momentul datorat amortizorului rotativ

$$M_a = \gamma_t \omega \, .$$

Efectuând substituțiile în ecuația de echilibru dinamic, se obține ecuația diferențială

$$J\frac{d\omega}{dt} + \gamma_t \omega = M \, ,$$

care are aceeaşi formă cu ecuația generică iar semnificația coeficienților este

$$k_I = J \text{ şi } k_R = \gamma_t \, .$$

În cazul *sistemului hidraulic* cu curgere laminară din fig. 4.5.10, presiunea pompei ΔP este egală cu suma dintre căderea de presiune pe robinet ΔP_r şi căderea de presiune pe conducta de lungime l şi secțiune de arie A, ΔP_c, adică

$$\Delta P = \Delta P_r + \Delta P_c \, .$$

Cele două căderi de presiune au expresiile

$$\Delta P_r = R_f Q \, ,$$

respectiv

$$\Delta P_c = L_f \frac{dQ}{dt} \, ,$$

care, înlocuite în relația anterioară, conduc la ecuația diferențială

$$L_f \frac{dQ}{dt} + R_f Q = \Delta P \, ,$$

care are aceeaşi formă cu ecuația diferențială generică cu coeficienții având semnificațiile

$$k_I = L_f \text{ şi } k_R = R_f \, .$$

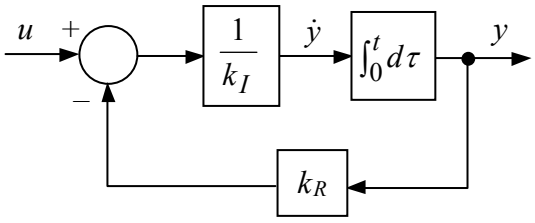


Fig. 4.5.11. Schema bloc corespunzătoare sistemelor din figurile 4.5.7, 4.5.8, 4.5.9, şi 4.5.10

Pe baza ecuației diferențiale generice, se poate desena o *schemă bloc* valabilă pentru toate cele patru tipuri de sisteme aşa cum se arată în fig. 4.5.11, cu precizarea că semnificația mărimilor de intrare, de ieşire şi a parametrilor este cea corespunzătoare tipului de energie procesat.

Tot pe baza ecuației diferențiale generice

$$k_I \dot{y} + k_R y = u$$

se poate determina *o funcție de transfer generică* prin aplicarea transformatei Laplace. Se obține

$$k_I s Y(s) + k_R Y(s) = U(s)$$

din care rezultă funcția de transfer generică

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{1}{k_R}}{\dfrac{k_I}{k_R}s+1}=\frac{K}{Ts+1}$$

în care factorul de amplificare K este

$$K=\frac{1}{k_R}$$

iar parametrul T este

$$T=\frac{k_I}{k_R}.$$

Pentru sistemul electric rezultă

$$K=\frac{1}{R_e}\left[\mathrm{A^2s^3/m^2kg}\right]=\frac{1}{R_e}[\Omega^{-1}],\quad T=\frac{L}{R_e}[\mathrm{s}];$$

pentru sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translaţie

$$K=\frac{1}{\gamma}\left[\mathrm{s/kg}\right],\quad T=\frac{m}{\gamma}[\mathrm{s}];$$

pentru sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie

$$K=\frac{1}{\gamma_t}\left[\mathrm{s\cdot rad/kg\cdot m^2}\right],\qquad T=\frac{J}{\gamma_t}[\mathrm{s}];$$

pentru sistemul hidraulic cu curgere laminară

$$K=\frac{1}{R_f}\left[\mathrm{s\cdot m^4/kg}\right],\quad T=\frac{L_f}{R_f}[\mathrm{s}].$$

4.5.3. Sisteme conţinând elemente Se, R, I, C conectate prin J1

Un ultim grup de sisteme care ilustrează analogiile dintre domeniile fizicii considerate în Capitolul 3 şi în cel curent este format din sistemul electric reprezentat în fig. 4.5.12, sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translaţie reprezentat în fig. 4.5.13, sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie reprezentat în fig. 4.5.14 şi sistemul hidraulic cu curgere laminară reprezentat în fig. 4.5.15.

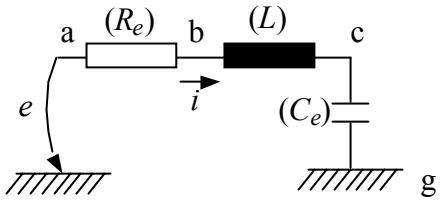


Fig. 4.5.12. Sistem electric format din

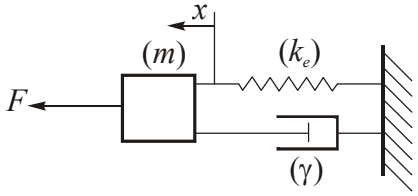


Fig. 4.5.13. Sistem mecanic în mişcare de translaţie format din elementele S_e, R, I, C şi J1

elementele S_e, R, I, C şi J1

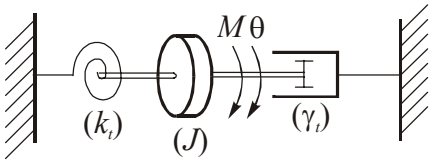


Fig. 4.5.14. Sistem mecanic în mişcare de rotaţie format din elementele S_e, R, I, C şi J1

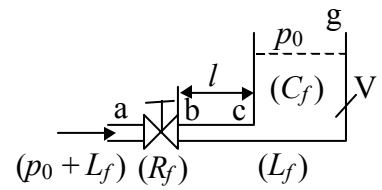


Fig. 4.5.15. Sistem hidraulic format din elementele S_e, R, I, C şi J1

Fiecare dintre ele conţine câte un subsistem generator de putere (un element S_e de tip sursă ideală de efort) care este la fel ca la grupele anterioare de sisteme din paragrafele 4.5.1, 4.5.2, câte un subsistem disipativ de energie (un element R de tip rezistiv) care este la fel ca la grupele anterioare de sisteme din paragrafele 4.5.1, 4.5.2, câte un subsistem acumulator de energie de tip capacitiv (un element C de tip condensator) care este la fel cu cel de la prima grupă de sisteme din paragraful 4.5.1 şi câte un element acumulator de energie de tip inductiv (un element I de tip inerţial) care este la fel cu cel de la a doua grupă de sisteme din paragraful 4.5.2. La fel ca în cazul din paragraful 4.5.2, nu a fost considerat şi un sistem termic deoarece, la astfel de sisteme, nu a fost definit elementul inerţial.

Elementele componente ale acestor ultime patru sisteme au aceeaşi variabilă de tip *f* (reprezentând aceleaşi mărimi fizice) ceea ce face posibilă, şi în acest caz, modelarea legăturii dintre elemente cu o joncţiune J1.

Mărimile de intrare ale fiecărui sistem din grup sunt aceleaşi ca şi în cazurile anterioare din paragrafele 4.5.1, 4.5.2. Mărimile de ieşire sunt cantitatea de electricitate *q* pentru sistemul electric, deplasarea *x* pentru sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translaţie, unghiul de rotaţie θ pentru sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie şi volumul de fluid *V* pentru sistemul hidraulic cu curgere laminară.

Cele patru tipuri de sisteme nu sunt analoge numai din punct de vedere structural ci sunt analoge şi din punct de vedere al comportamentului dinamic în sensul că ele sunt modelate de un set de ecuaţii intrare-stare-ieşire având forma generică (2.4.3), (2.4.4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k_R} \\ -\frac{1}{k_C k_I} & -\frac{k_R}{k_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{k_I} \end{bmatrix} u ,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

unde x_1 are semnificaţie de variabilă de tip deplasare generalizată (*q*) pentru domeniul energetic respectiv, iar x_2 are semnificaţia de flux (*f*) pentru acelaşi domeniu, iar parametrii k_I, k_R, k_C, capătă semnificaţii corespunzătoare.

Pentru *sistemul electric* din fig. 4.5.12, tensiunea sursei este egală cu suma dintre căderea de tensiune pe rezistenţă u_R, căderea de tensiune pe bobină u_L şi căderea de tensiune pe condensator u_C, adică are loc relaţia

$$e = u_R + u_L + u_C ,$$

unde

$$u_R = R_e \cdot i, \qquad u_L = L\frac{di}{dt} = L\dot{i} \text{ şi } u_C = \frac{1}{C_e}q\,.$$

După efectuarea substituțiilor, rezultă ecuația diferențială

$$\dot{i} = -\frac{1}{C_e L}q - \frac{R_e}{L}i + \frac{1}{L}e\,.$$

Pe de altă parte avem ecuația diferențială

$$\dot{q} = i\,.$$

Ultimele două ecuații se scriu sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{C_e L} & -\dfrac{\mathrm{Re}}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}e\,.$$

Cum variabila de ieşire este cantitatea de electricitate q, se poate scrie ecuația de ieşire

$$q = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ i\end{bmatrix},$$

obținându-se astfel setul de ecuații intrare-stare-ieşire pentru sistemul din fig. 4.5.12 sub forma generică precizată cu $x_1 = q$ şi $x_2 = i$ şi cu următoarea semnificație a coeficienților

$$k_C = C_e,\ \ k_I = L,\ \ k_R = R_e\,.$$

În cazul *sistemului mecanic* cu elemente în mişcare de translație reprezentat în fig. 4.5.13, ecuația de echilibru dinamic a lui d'Alembert pentru corpul de masă m este

$$F - F_e - F_a - F_i = 0\,,$$

în care F_e este forța elastică din arc având expresia

$$F_e = k_e x$$

pentru situația în care, în poziția inițială, arcul este netensionat, F_a este forța din amortizor care are expresia

$$F_a = \gamma v\,,$$

iar F_i este forța de inerție care are expresia

$$F_i = m\dot{v}\,.$$

După înlocuiri, ecuația de echilibru dinamic capătă forma

$$\dot{v} = -\frac{k_e}{m}x - \frac{\gamma}{m}v + \frac{1}{m}F.$$

Dacă se ține cont că

$$\dot{x} = v\,,$$

atunci ultimele două ecuații diferențiale pot fi scrise sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_e}{m} & -\dfrac{\gamma}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F\,.$$

Cum variabila de ieşire este deplasarea x a masei m, se poate scrie ecuația de ieşire

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix},$$

rezultând astfel setul de ecuații intrare-stare-ieşire pentru sistemul din fig. 4.5.13 sub forma generică precizată la început, cu următoarea semnificație a coeficienților

$$k_C = \frac{1}{k_e},\;\; k_I = m,\;\; k_R = \gamma\,.$$

Sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotație din fig. 4.5.14 se poate modela prin scrierea ecuației de echilibru dinamic a lui d'Alembert pentru volantul sistemului

$$M - M_e - M_a - M_i = 0\,,$$

în care M_e este momentul elastic de forma

$$M_e = k_t \theta\,,$$

M_a este momentul din amortizor care are forma

$$M_a = \gamma_t \omega\,,$$

iar M_i este momentul de inerție care are forma

$$M_i = J\dot{\omega}\,.$$

Efectuând substituțiile în ecuația de echilibru dinamic, se obține ecuația diferențială

$$\dot{\omega} = -\frac{k_t}{J}\theta - \frac{\gamma_t}{J}\omega + \frac{1}{J}M\,,$$

care împreuna cu ecuația diferențială

$$\dot{\theta} = \omega$$

formează sistemul de ecuații diferențiale de stare care se scrie matriceal de forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_t}{J} & -\dfrac{\gamma_t}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{bmatrix} M\,.$$

Cum variabila de ieşire este unghiul de rotație θ, se poate scrie ecuația de ieşire

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix},$$

rezultând astfel setul de ecuații intrare-stare-ieşire pentru sistemul din fig. 4.5.14 sub forma generică precizată la început, cu $x_1 = \theta$ şi $x_2 = \omega$ şi cu următoarea semnificație a coeficienților

$$k_C = \frac{1}{k_t},\ \ k_I = J,\ \ k_R = \gamma_t .$$

În cazul *sistemului hidraulic* cu curgere laminară din fig. 4.5.15 presiunea ΔP creată de pompă este egală cu suma dintre căderea de presiune pe robinet ΔP_r, căderea de presiune pe conductă ΔP_c şi presiunea de la baza rezervorului ΔP_v datorată volumului V de lichid din rezervor, adică are loc relația

$$\Delta P = \Delta P_r + \Delta P_c + \Delta P_v ,$$

unde

$$\Delta P_r = R_f Q ,$$

$$\Delta P_c = L_f \dot{Q} ,$$

$$\Delta P_v = \frac{1}{C_f} V .$$

După efectuarea substituțiilor, se obține ecuația diferențială

$$\dot{Q} = -\frac{1}{C_f L_f} V - \frac{R_f}{L_f} Q + \frac{1}{L_f} \Delta P ,$$

la care se adaugă ecuația

$$\dot{V} = Q$$

pentru a forma sistemul de ecuații diferențiale de stare care au forma matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{C_f L_f} & -\dfrac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L_f} \end{bmatrix} \Delta P .$$

Cum variabila de ieşire este volumul V din rezervor, atunci se poate scrie ecuația de ieşire

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ Q \end{bmatrix},$$

care, împreună cu sistemul diferențial anterior, formează setul de ecuații intrare-stare-ieşire pentru sistemul din fig. 4.5.15 având forma generică prezentată la început cu $x_1 = V, x_2 = Q$ şi cu următoarea semnificație a coeficienților

$$k_C = C_f ,\ \ k_I = L_f ,\ \ k_R = R_f .$$

Pe baza formei generice a sistemului de ecuații diferențiale, se poate desena o *schemă bloc* valabilă pentru toate cele patru tipuri de sisteme aşa cum se arată în fig. 4.5.16, cu

precizarea că semnificaţia mărimilor de intrare, de ieşire, de stare şi a parametrilor este corespunzătoare tipului de energie procesat.

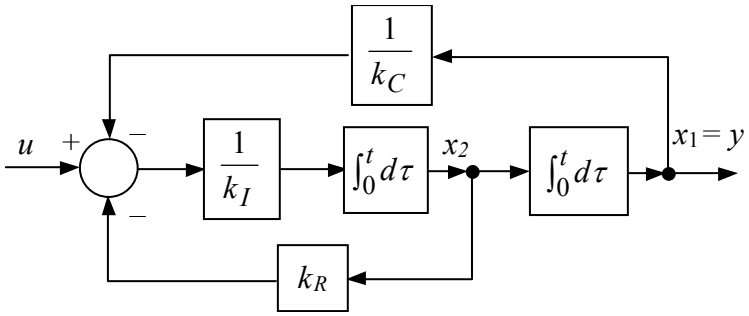


Fig. 4.5.16. Schema bloc corespunzătoare sistemelor din figurile 4.5.12, 4.5.13, 4.5.14 şi 4.5.15

Tot pe baza sistemului generic de ecuaţii intrare-stare-ieşire fiecare sistem poate fi modelat printr-o *funcţie de transfer* de ordinul doi de forma

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$$

în care K, T ,ξ se numesc factor de amplificare, constantă de timp, respectiv factor de amortizare (de exemplu (Ionescu 1985), (Voicu 1998)) şi sunt specifici fiecărui tip de sistem în parte.

Conform (2.4.31), funcţia de transfer va fi

$$G(s) = c^T \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} b = \frac{k_C}{k_C k_I s^2 + k_C k_R s + 1},$$

rezultând că factorul de amplificare este

$$K = k_C ,$$

iar parametrii T şi ξ sunt

$$T = \sqrt{k_C k_I}, \quad \xi = \frac{1}{2} k_R \sqrt{\frac{k_C}{k_I}} .$$

Factorul de amplificare şi cei doi parametri capătă semnificaţii specifice pentru fiecare tip de sistem, astfel că pentru sistemul electric rezultă

$$K = C_e\,[\mathrm{F}], \qquad T = \sqrt{C_e L}\,[\mathrm{s}], \qquad \xi = \frac{1}{2} R_e \sqrt{\frac{C_e}{L}}\ [\text{adimensional}],$$

pentru sistemul mecanic în mişcare de translaţie rezultă

$$K = \frac{1}{k_e}[\mathrm{s^2/kg}], \qquad T = \sqrt{\frac{m}{k_e}}[\mathrm{s}], \qquad \xi = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{m k_e}}\ [\text{adimensional}],$$

pentru sistemul mecanic în mişcare de translaţie rezultă

$$K = \frac{1}{k_t}[\mathrm{s^2/kg \cdot m^2}], \qquad T = \sqrt{\frac{J}{k_t}}[\mathrm{s}], \qquad \xi = \frac{1}{2}\frac{\gamma_t}{\sqrt{J k_t}}\ [\text{adimensional}],$$

iar pentru sistemul hidraulic rezultă

$$K = C_f\ [\mathrm{m^4 s^2/kg}], \quad T = \sqrt{C_f L_f}\ [\mathrm{s}], \qquad \xi = \frac{1}{2} R_f \sqrt{\frac{C_f}{L_f}}\ [\text{adimensional}].$$

Rolul celor trei paragrafe care au compus secțiunea curentă este de a evidenția faptul că, plasându-ne în domenii energetice diferite şi operând cu sisteme fizice prezentând *analogii din punct de vedere al structurii*, vom constata şi *analogii la nivel comportamental*, modelele matematice construite fiind izomorfe. Analogia la nivel de structură a constat în alegerea unor elemente din domenii fizice diferite care procesează energia într-o manieră similară, iar conectarea lor este realizată în acelaşi mod.

Exemplele considerate au fost alese cât mai simple spre a stimula rolul intuiției în înțelegerea aspectelor similare ce apar în funcționarea grupelor de sisteme din fiecare paragraf. Pe de altă parte, această simplitate a permis obținerea unor descrieri matematice pentru care comparațiile sunt uşor de realizat şi totodată eficiente în sensul urmăririi tranziției cauzale intrare-stare-ieşire (pentru modelul de stare) şi intrare-ieşire (pentru funcția de transfer şi diagrama bloc).

Este evident că, în spiritul exemplelor considerate în cele trei paragrafe, pot fi imaginate şi alte grupuri de sisteme de natură fizică diferită, prezentând analogii atât la nivelul structurii, cât şi al dinamicii. Un astfel de studiu îl propunem drept exercițiu cititorului, pentru a-şi consolida cunoştințele dobândite pe parcursul întregului capitol şi, îndeosebi, abilitatea construirii de modele în conformitate cu scenariul de analiză utilizat în această ultimă secțiune.

În final, trebuie să remarcăm că modul în care am exploatat legile fizicii pentru a pune în evidență analogiile comportamentale s-a bazat numai pe informațiile tipice unei instruiri generale în diverse domenii ale fizicii. Este totuşi de aşteptat că însăşi exploatarea legilor fizicii se poate face în baza acestor analogii, dacă vom considera transferul de energie şi conservarea acesteia drept principiu fundamental ce asigură independența interpretării fenomenologice de contextul fizic concret. Aceste considerente au deschis perspectiva formulării unei *metodologii riguroase de construcție a modelelor*, care se sprijină pe tratarea energetică şi, totodată, oferă posibilitatea utilizării modelelor de tip cauzal prezentate în Capitolul 2. Capitolele 5, 6, 7 (integral) şi 8 (parțial) vor fi dedicate studierii unei atare problematici.

5. Modelarea fizică a proceselor cu ajutorul limbajului bond-graph

Studiul comparativ efectuat în capitolul anterior între diverse domenii ale fizicii conduce la ideea elaborării unei metode unitare de abordare a modelării sistemelor, bazată pe analogiile de natură comportamentală constatate cu ocazia efectuării acestui studiu. Metoda în cauză poartă numele de metoda *bond-graph*.

Bazele metodei bond-graph au fost puse spre sfârşitul deceniului şase de către H. M. Paynter, care, prin lucrarea (Paynter, 1961), a dat numele metodei şi a introdus notaţiile de bază. În decursul timpului, dar mai ales în ultimele două decenii, s-a dezvoltat foarte mult cercetarea fundamentală în această direcţie. În prezent, există deja câteva studii monografice remarcabile pe tema respectivă [Rosenberg, Karnopp, 1983], [Karnopp, Margolis, Rosenberg, 1990], [Thoma, 1990], [Gawthrop, Smith, 1996] care pot fi consultate de cei interesaţi în cunoaşterea altor maniere de prezentare. Metoda bond-graph este intens folosită în analiza şi proiectarea sistemelor de diferite naturi (electro-magnetice, mecanice, hidraulice, termice şi combinaţii ale acestora). Totodată merită de menţionat faptul că această metodă a fost adaptată şi pentru studierea sistemelor chimice, biomedicale şi socio-economice. Adaptările respective nu vor face însă obiectul preocupărilor noastre din cadrul prezentei lucrări, deoarece obiectivul formulat se limitează la clasa sistemelor fizico-tehnice.

Metoda bond-graph propune, ca principiu fundamental pentru elaborarea modelelor, investigarea modului de procesare a energiei, ce se consideră furnizată de una sau mai multe surse şi transferată către toate componentele participante la funcţionarea unui sistem fizic real. Viziunea de factură energetică introdusă de metoda bond-graph a avut drept suport definirea unor prototipuri de comportare pentru toate elementele simple care alcătuiesc structura de ansamblu a oricărui sistem, indiferent de natura fizică concretă a acestor elemente. Astfel, activitatea de modelare cu specific tehnico-ingineresc a căpătat o orientare riguroasă, ce elimină arbitrarietatea soluţiilor ad-hoc, prin tratarea unitară a transferului de energie şi operarea, la nivel conceptual, cu *clase de obiecte izomorfe* ca manieră de descriere a dinamicii. Izomorfismul amintit a avut în vedere caracterizarea prin parametri concentraţi a diverse fenomene fizice, pornind de la analogia dintre comportarea circuitelor electrice şi a sistemelor mecanice de puncte materiale, pe care metoda bond-graph a generalizat-o spre a încorpora aproximări finit dimensionale pentru dinamica unor sisteme cu parametri distribuiţi (cum ar fi, de exemplu, dinamica rigidelor, a fluidelor, sau a proceselor termice).

Principiul fundamental al metodei exploatează faptul că universul exterior furnizează sistemului, în fiecare moment, o anumită putere (energie pe unitatea de timp), care poate fi exprimată în toate domeniile fizicii, ca produs al semnalelor pereche *e* şi *f*, ceea ce permite descrieri de tip acauzal. Totodată, prin asignarea semnificaţiilor de cauză şi efect pentru

semnalele implicate în astfel de descrieri, se pot construi modele cauzale, de factura celor prezentate în Capitolul 2, care au o largă răspândire în activitatea tehnico-inginerească.

Problematica abordată în acest capitol este structurată pe secțiuni după cum urmează:

5.1. Concepte specifice limbjului bond-graph.
5.2. Construcția bond-graph-ului.
5.3. Construcția modelelor bazată pe bond-graph-uri fără cauzalitate derivativă.
5.4. Exemple ilustrative de modelare în cazul bond-graph-ului fără cauzalitate derivativă.
5.5. Construirea modelelor bazată pe bond-graph-uri conținând cauzalitate derivativă.

5.1. Concepte specifice limbajului bond-graph

La baza metodei menționate stă observația că, între elementele componente ale unui sistem fizico-tehnic, are loc, în timpul funcționării, un *transfer de putere* de la un element la altul. Natura fizică a acestei puteri poate fi diversă şi, de fapt, marele avantaj al metodei constă tocmai în neimplicarea naturii concrete a puterii transmise în elaborarea modelului. Acest lucru a condus la considerarea unor *notații generice pentru variabilele puterii* şi anume: *e* (*efort*) şi *f* (*flux*). Astfel puterea se calculează cu relația generală P = *ef*, unde *e* şi *f* dobândesc semnificații corespunzătoare domeniului energetic concret în care se lucrează. Aceste semnificații au fost comentate în capitolele anterioare.

Un alt aspect important constă în aceea că, pentru construirea oricărui model al unui sistem fizic în care pot să apară diverse tipuri de energie, se utilizează un număr de doar nouă elemente standard generale, ce au fost introduse, pe domenii energetice, în capitolul 3 şi ulterior, au fost tratate unitar în capitolul 4.

Toate aceste constatări permit dezvoltarea unui *limbaj grafic* denumit *bond-graph* (terminologie împrumutată din literatura anglo-americană şi care s-a generalizat în toată literatura de specialitate, indiferent de limbă, în româneşte, traducându-se *mot-à-mot* prin graf de legături sau de conexiuni). El conduce la o *metodologie riguroasă* de construire a modelelor de intrare-stare-ieşire şi/sau diagramă bloc, fiecărui sistem fizic corespunzându-i un bond-graph ce trebuie privit drept un model grafic echivalent cu modelele analitice amintite mai sus. Bond-graph-urile posedă proprietatea remarcabilă de a pune în evidență, cu foarte multă uşurință, *izomorfismul comportamental* al sistemelor de natură fizică diferită.

5.1.1. Elemente standard pentru procesarea energiei utilizate în metoda bond-graph

După cum am menționat, în modelul bond-graph se utilizează un număr de nouă elemente standard cu caracter general care se regăsesc în fiecare domeniu energetic ca fiind corespondentele unui element specific domeniului, aşa după cum rezultă din capitolul anterior.

Aceste elemente sunt:

1. Elemente (I) care realizează *acumularea de tip inductiv a energiei* numite şi *elemente inductive* sau *elemente inerțiale*.
2. Elemente (C) care realizează *acumularea de tip capacitiv a energiei* numite şi *elemente capacitive*.
3. Elemente (R) care realizează *disiparea energiei* numite şi *elemente rezistive*.

4. Elemente (S_e) care sunt *furnizoare ideale de energie* cu variabila de tip *e* prestabilită, numite *surse ideale de efort*.
5. Elemente (S_f) care sunt *furnizoare ideale de energie* cu variabila de tip *f* prestabilită, numite *surse ideale de flux.*
6. Elemente (TF) care conservă energia şi realizează *transformarea parametrilor puterii* legând variabilele de tip *e* între ele şi variabilele de tip *f* între ele, produsul *ef* rămânând constant, numite *transformatoare*.
7. Elemente (GY) care conservă energia şi realizează *transformarea parametrilor puterii* legând variabilele de tip *e* cu cele de tip *f*, produsul *ef* rămânând constant, numite *giratoare*.
8. Joncţiuni zero (J0) care realizează *conectarea unor elemente* caracterizate prin aceea că posedă *aceeaşi variabilă de tip e*.
9. Joncţiuni unu (J1) care realizează *conectarea unor elemente* caracterizate prin aceea că posedă *aceeaşi variabilă de tip f*.

5.1.2. Bonduri (Legături între elementele standard)

Cele nouă elemente standard menţionate anterior sunt suficiente pentru a modela cu parametrii concentraţi orice sistem fizico-tehnic indiferent de tipurile de energie care sunt procesate de către acesta. În timpul funcţionării, puterea este transmisă de la un element la altul, modelarea căilor de transmitere a acesteia realizându-se prin aşa numitele *bonduri* (termen utilizat în literatura anglo-americană şi care s-a generalizat în toată literatura de specialitate, indiferent de limbă, în limba română corespunzându-i traducerea *mot-à-mot* legătură sau conexiune).

Bondurile se reprezintă grafic prin linii care au desenată la un capăt o *semisăgeată*. Astfel, în fig. 5.1.1(a) sunt desenate simbolic două elemente standard notate cu A şi B între care există un bond. Semisăgeata orientează bondul de la A către B, ceea ce arată că puterea este furnizată de elementul A şi este primită de elementul B. Reprezentarea grafică standard a transferului de putere între elementele A şi B este arătată în fig. 5.1.1(b). De o parte şi de alta a bondului se scriu variabilele *e* şi *f*, ele fiind plasate, conform unei convenţii generale, astfel încât variabila *e* să se găsească de aceeaşi parte cu semisăgeata.

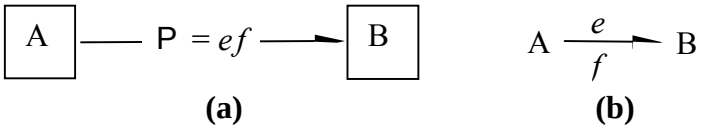
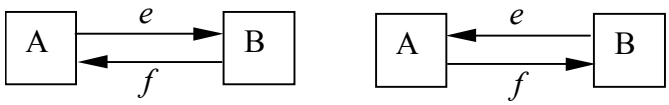


Fig. 5.1.1. Reprezentarea unui bond

Sensul transferului puterii este stabilit de către cel care realizează modelul, pe baza analizei efectuate asupra modului de desfăşurare a proceselor fizice din sistem. Din punctul de vedere al fiecărui element, puterii i se atribuie un semn stabilit convenţional astfel: puterea care părăseşte elementul are semnul –, iar puterea care este furnizată elementului are semnul +.

Pe un bond se transmite putere şi există *simultan* cele două variabile ale puterii. În aceste condiţii, fiecare bond poate fi descris prin două *semnale* şi anume, unul corespunzând variabilei *e* şi celălalt corespunzând variabilei *f* conform fig. 5.1.2(a şi b). Convenţia grafică de reprezentare a semnalelor este cu *săgeată completă*. Se observă că cele două semnale corespunzătoare unui bond au sensuri opuse. Sensul săgeţilor arată că un element generează un semnal (*e* sau *f*) pe care celalalt element îl recepţionează şi la rândul său, furnizează primului element semnalul complementar (*f* sau *e*) corespunzător celeilalte variabile a puterii, respectând

relația P = *ef*. În raport cu un element precizat apar astfel noțiunile de *cauză* şi de *efect* care se asociază celor două semnale ale puterii corespunzând celor două variabile ale acesteia. Când una din variabile este, pentru elementul precizat, semnal cauză, atunci cealaltă variabilă devine, pentru acelaşi element, semnal efect. Astfel pentru conectarea ilustrată în fig. 5.1.2.a), pentru elementul A este *cauză* semnalul *f* şi este *efect* semnalul *e*, în timp ce pentru elementul B este *cauză* semnalul *e* şi este *efect* semnalul *f*. Totodată, se constată că în fig. 5.1.2.b), rolul semnalelor cauză şi efect se schimbă pentru elementele A şi B. Problema referitoare la relațiile de tip *cauză-efect* se numeşte în general *cauzalitate*. Ea se pune pentru fiecare element în parte.



(a) **(b)**

Fig. 5.1.2. Reprezentarea semnalelor *e* şi *f* corespunzătoare unui bond

Deoarece, în modelare, *problema cauzalității* deține un rol fundamental, s-a convenit ca pe bond-ul dintre două elemente (reprezentat conform fig. 5.1.1.b)) să se marcheze şi cauzalitatea. *Convenția grafică* constă în ataşarea unei *liniuțe cauzale* (*eng*. causal stroke) perpendiculară pe linia bondului lângă elementul ce are *drept cauză* semnalul de tip *e*. Drept consecință, dacă lângă un element *nu este figurată* liniuță cauzală, atunci el are drept *cauză* un semnal de tip *f*. În baza acestei convenții, pentru cele două moduri de conectare ilustrate cu ajutorul semnalelor în fig. 5.1.2, avem reprezentarea grafică echivalentă din fig. 5.1.3, în care se utilizează bond-uri cauzale. În fig. 5.1.3.a) liniuța cauzală se plasează lângă elementul B, iar în fig. 5.1.3.b), lângă elementul A.

(a) **(b)**

Fig. 5.1.3. Reprezentarea schematizată a cauzalității pe bonduri

Spre a face distincție între fig. 5.1.1.b) şi fig. 5.1.3 (a şi b) se spune că în fig. 5.1.1.b) *bond-ul este acauzal*, în timp ce în fig 5.1.3 (a şi b) *bond-urile sunt cauzale*. Atragem explicit atenția asupra faptului că cele două simboluri grafice existente pe orice bond cauzal (semisăgeata şi liniuța cauzală) au semnificații fizice diferite şi drept consecință, *plasarea* oricăruia dintre cele două simboluri este *complet independentă* de plasarea celuilalt. Astfel, între două elemente oarecare A, B pot exista patru conexiuni cauzale conform fig. 5.1.4 (a, b, c, d).

(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Fig. 5.1.4. Situațiile posibile pentru transferul puterii şi pentru cauzalitate care pot să apară pe un bond.

În fig. 5.1.4 (a şi b) *transferul de putere* are loc de la elementul A către elementul B, semnalul de tip *e* fiind *cauză* pentru elementul A (fig. 5.1.4.a), respectiv pentru elementul B (fig. 5.1.4.b). În fig. 5.1.4 (c şi d) *transferul de putere* are loc de la elementul B către elementul A, semnalul de tip *e* fiind *cauză* pentru elementul A (fig. 5.1.4.c), respectiv pentru elementul B (fig. 5.1.4.d). Trebuie remarcat că se pot face afirmații complete şi despre rolul de cauză al semnalului de tip *f*.

5.1.3. Porturi

Un element poate să primească sau să transmită putere la unul sau la mai multe elemente. Fiecărei perechi (e, f), deci fiecărei puteri care intră într-un element sau îl părăseşte, îi corespunde un aşa numit *port*, adică un punct de intrare sau de ieşire a puterii (un punct de transmitere a puterii). Prin urmare noţiunea de *port* se asociază transferului de putere pentru *o singură* pereche de semnale (e, f), ceea ce arată că fiecărui port îi corespunde, în reprezentarea grafică, un bond (acauzal sau cauzal - deoarece transferul de putere este independent de atribuirea cauzalităţii). Modul de tratare de mai jos este în spiritul generalităţii pe care au pregătit-o Capitolele 3 şi 4.

Elementele standard de tip (I), (C), (R), (S_e) şi (S_f) procesează o singură pereche (e, f), motiv pentru care se numesc *elemente uniport*. Elementelor uniport li se asociază *un singur bond*. Elementele (uniporturile) (I), (C) şi (R) sunt denumite *pasive*, întrucât rolul lor este numai de a procesa puterea primită. O detaliere a aspectelor specifice este prezentată în tabelele 5.1.1, 5.1.2 şi respectiv 5.1.3.

Elementele (uniporturile) (S_e), (S_f) sunt denumite *active*, întrucât furnizează putere. Atragem atenţia asupra faptului că în condiţiile existenţei *mai multor surse*, una sau mai multe dintre acestea se pot afla în situaţia de a *consuma* puterea furnizată de altă (alte) sursă (surse). Aspectele specifice sunt prezentate în tabelul 5.1.4.

Elementele standard de tip (TF) şi (GY) procesează două perechi (e, f), drept pentru care sunt denumite *elemente diport*. În reprezentarea grafică, elementelor diport li se asociază *două bond-uri*. O detalierea a aspectelor specifice privind utilizarea elementelor (TF) şi (GY) în construcţia bond-graph-urilor este prezentată în tabelele 5.1.5 şi respectiv 5.1.6.

Elementele standard de tip (J0) şi (J1) procesează, în general, n perechi (e, f), drept pentru care sunt denumite *elemente n-port* sau *multiport*. În reprezentarea grafică, elementelor n-port li se asociază *n bond-uri*. O detaliere a aspectelor specifice privind utilizarea joncţiunilor 0 şi 1 în construcţia bond-graph-urilor este prezentă în tabelele 5.1.7 şi respectiv 5.1.8.

5.2. Construcţia bond-graph-ului

Bond-graph-ul asociat unui sistem fizic se construieşte în două etape, având următoarele obiective:

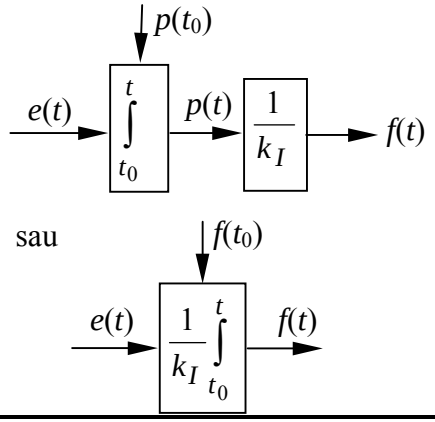
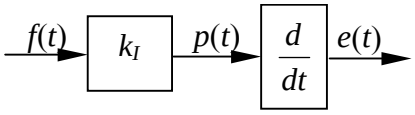
Etapa întâia - obţinerea unui bond–graph *acauzal*, care descrie numai *transferul de putere* între elementele standard (utilizând bonduri acauzale).

Etapa a doua - obţinerea unui bond–graph *cauzal*, care descrie atât *transferul de putere* cât şi *cauzalitatea* elementelor (prin transformarea bondurilor acauzale în bonduri cauzale în urma unui proces de atribuire cauzală).

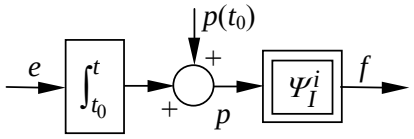
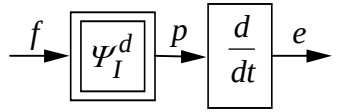
5.2.1. Construcţia bond-graph-ului acauzal

În funcţie de natura sistemului (subsistemului) fizic luat în discuţie, există o metodologie riguros organizată care permite construcţia bond–graph-ului acauzal. Din punct de vedere al teoriei grafurilor, bond–graph-ul acauzal rezultat va poseda drept *noduri* elementele standard utilizate în modelare şi *drept arce*, bond-urile cu săgeţile impuse de sensul considerat pentru transferul puterii. Precizarea valorilor parametrilor pe bond-graph se poate realiza cu ajutorul semnului diacritic ":" (două puncte), urmat de valoarea în cauză.

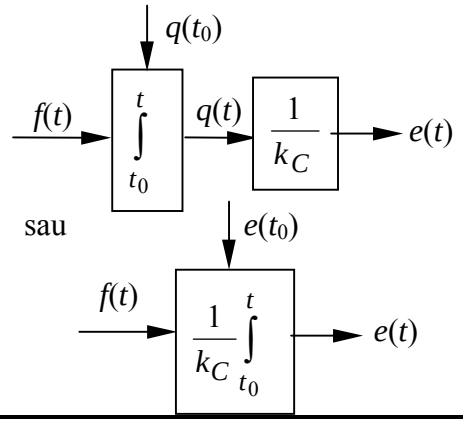
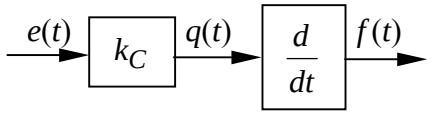
Tabelul 5.1.1.a. Prezentarea de sinteză a elementului (uniportului) pasiv I (inductiv, inerțial) utilizat în teoria bond-graph - cazul liniar.

Elementul (uniportul) I	**Cazul liniar**		
	Forma acauzală	**Forma cauzală**	
		Cauzalitatea integrală	**Cauzalitatea derivată**
Abrevierea din cap. 3 şi 4.	(I|L - F)	(I|L - F|i)	(I|L-F|d)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$p(t)-k_I f(t)=0$	$f(t)=\frac{1}{k_I}p(t)$ sau $f(t)=\frac{1}{k_I}\left[\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + p(t_0)\right]$ sau $f(t)=\frac{1}{k_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + f(t_0)$	$p(t)=k_I f(t)$ sau $e(t)=k_I \frac{d}{dt} f(t)$
Reprezentarea în limbajul bond-graph	$\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}$ I : k_I	$\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}$ I : k_I	$\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}$ I : k_I
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	———		

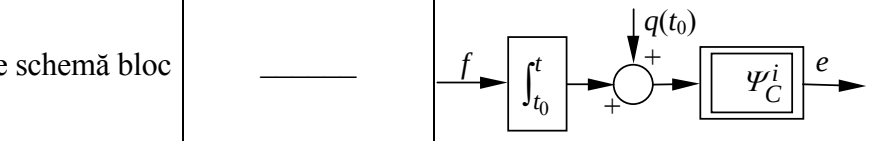
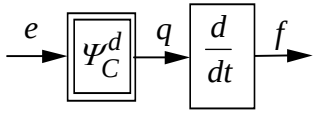
Tabelul 5.1.1.b. Prezentarea de sinteză a elementului (uniportului) pasiv I (inductiv, inerțial) utilizat în teoria bond-graph - cazul neliniar.

Elementul (uniportul) I	**Cazul general (neliniar)**		
	Forma acauzală	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate integrală	**Cauzalitate derivativă**
Abrevierea din cap. 3 și 4	(I-F)	(I-F|i)	(I-F|d)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$\Psi_I(p, f) = 0$	$f = \Psi_I^i(p)$ sau $f(t) = \Psi_I^i\left(\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + p(t_0)\right)$	$p = \Psi_I^d(f)$ sau $e(t) = \frac{d}{dt}p(t) = \frac{d}{dt}\Psi_I^d(f(t))$
Reprezentare în limbajul bond-graph	$\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}\ I:\Psi_I$	$\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}\ I:\Psi_I^i$	$\overset{e=\dot{p}}{\underset{f}{\vdash\!\!\rightarrow}}\ I:\Psi_I^d$
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	———		

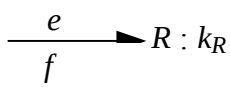
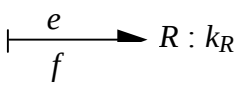
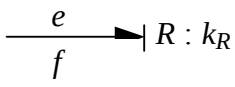
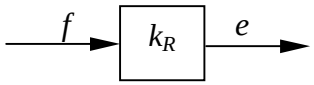
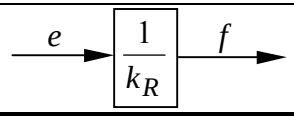
Tabelul 5.1.2.a. Prezentare de sinteză a elementului (uniportului) pasiv C (capacitiv) utilizat în teoria bond-graph - cazul liniar.

Elementul (uniportul) C	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate integrală	**Cauzalitate derivativă**
Abrevierea din cap. 3 şi 4.	(C|L - F)	(C|L - F|i)	(C|L - F|d)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$q(t)-k_C e(t)=0$	$e(t)=\frac{1}{k_C}q(t)$ sau $e(t)=\frac{1}{k_C}\left[\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau+q(t_0)\right]$ sau $e(t)=\frac{1}{k_C}\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau+e(t_0)$	$q(t)=k_C e(t)$ sau $f(t)=k_C\frac{d}{dt}e(t)$
Reprezentarea în limbajul bond-graph	$\xrightarrow[f=\dot{q}]{e} C:\ k_C$	$\overset{e}{\underset{f=\dot{q}}{\vdash\!\!\rightarrow}} C:\ k_C$	$\xrightarrow[f=\dot{q}]{e} \vdash C:\ k_C$
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	———		

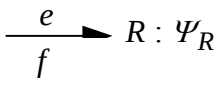
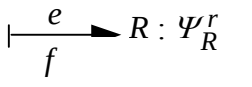
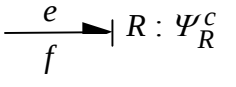
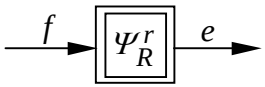
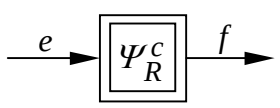
Tabelul 5.1.2.b. Prezentare de sinteză a elementului (uniportului) pasiv C (capacitiv) utilizat în teoria bond-graph - cazul neliniar.

Elementul uniportul C	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate integrală	**Cauzalitate derivativă**
Abrevierea din cap. 3 şi 4	(C-F)	(C-F|i)	(C-F|d)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$\Psi_C(q,e)=0$	$e=\Psi_C^i(q)$ sau $e(t)=\Psi_C^i\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau+q(t_0)\right)$	$q=\Psi_C^d(e)$ sau $e(t)=\frac{d}{dt}q(t)=\frac{d}{dt}\Psi_C^d\left(e(t)\right)$
Reprezentare în limbajul bond-graph	$\xrightarrow[f=\dot{q}]{e} C:\Psi_C$	$\dashv\!\xrightarrow[f=\dot{q}]{e} C:\Psi_C^i$	$\xrightarrow[f=\dot{q}]{e}\!\vdash C:\Psi_C^d$
Reprezentare sub formă de schemă bloc	———		

Tabelul 5.1.3.a. Prezentarea de sinteză a elementului (uniportului) pasiv R (rezistiv) utilizat în teoria bond-graph – cazul liniar

Elementul (uniportul) R	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate rezistivă	**Cauzalitatea conductivă**
Abrevierea din cap. 3 şi 4	(R - F)	(R – F|r)	(R-F|c)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$e(t) - k_R f(t) = 0$	$e(t) = k_R f(t)$	$f(t) = \frac{1}{k_R} e(t)$
Reprezentarea în limbajul bond-graph			
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	_____		

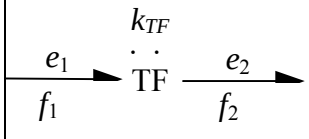
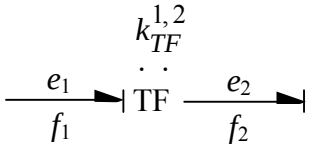
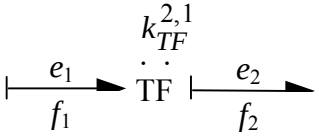
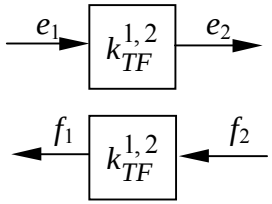
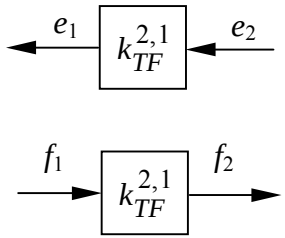
Tabelul 5.1.3.b. Prezentarea de sinteză a elementului (uniportului) pasiv (R) (rezistiv) utilizat în teoria bond-graph – cazul neliniar

Elementul (uniportul) R	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate rezistivă	**Cauzalitate conductivă**
Abrevierea din cap. 3 şi 4	(R|L-F)	(R|L-F|r)	(R|L-F|c)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$\Psi_R(e, f) = 0$	$e = \Psi_R^r(f)$	$f = \Psi_R^c(e)$
Reprezentare în limbajul bond-graph			
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	_____		

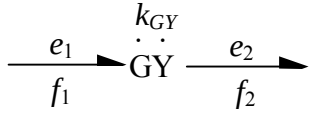
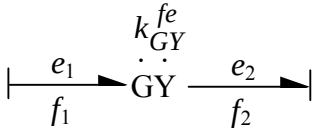
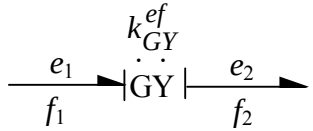
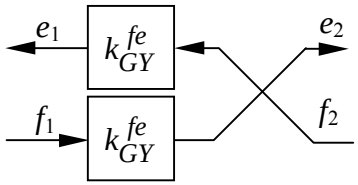
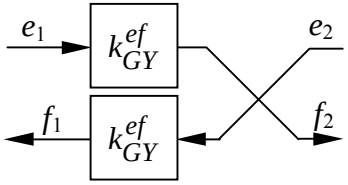
Tabelul 5.1.4. Prezentare de sinteză a elementelor (uniporturilor) active Se (sursă ideală de efort) şi Sf (sursă ideală de flux) utilizate în teoria bond-graph

Elementele (uniporturile) S_e, S_f	**Sursă de *e***				**Sursă de *f***			
	Furnizează putere		**Consumă putere**		**Furnizează putere**		**Consumă putere**	
	Forma acauzală	**Forma cauzală**	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**
Mod general de abreviere	S_e				S_f			
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$e(t)$ prestabilit $f(t)$ rezultă din funcționarea sistemului				$e(t)$ rezultă din funcționarea sistemului $f(t)$ prestabilit			
Reprezentare în limbajul bond-graph	S_e — e / f →	S_e — e / f →|	S_e ← e / f —	S_e ←| e / f —	S_f — e / f →	S_f |— e / f →	S_f ← e / f —	S_f |← e / f —
Reprezentare sub formă de schemă bloc	———	$e(t)$ prestabilit → ← $f(t)$ oarecare	———	$e(t)$ prestabilit → ← $f(t)$ oarecare	———	$e(t)$ oarecare ← → $f(t)$ prestabilit	———	$e(t)$ oarecare ← → $f(t)$ prestabilit

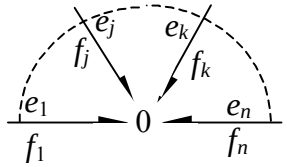
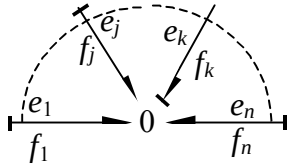
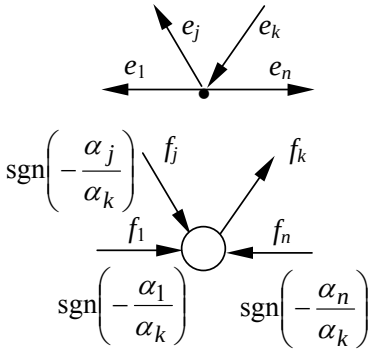
Tabelul 5.1.5. Prezentarea de sinteză a elementului (diportului) TF (transformator) utilizat în teoria bond-graph

Elementul (diportul) TF	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate 12	**Cauzalitatea 21**
Mod general de abreviere	(TF - F)	(TF – F|12)	(TF-F|21)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$e_1 f_1 = e_2 f_2$	$e_2 = k_{TF}^{1,2} e_1$ $f_1 = k_{TF}^{1,2} f_2$	$e_1 = k_{TF}^{2,1} e_2 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} e_2$ $f_2 = k_{TF}^{2,1} f_1 = \frac{1}{k_{TF}^{1,2}} f_1$
Reprezentarea în limbajul bond-graph			
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	———		

Tabelul 5.1.6. Prezentarea de sinteză a elementului (diportului) GY (girator) utilizat în teoria bond-graph.

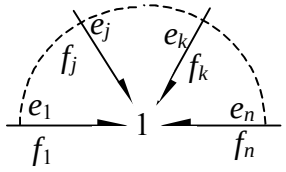
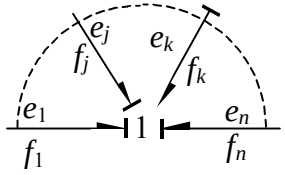
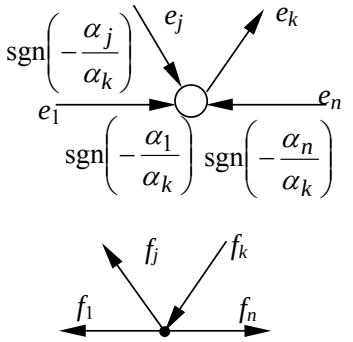
Elementul (diportul) GY	**Forma acauzală**	**Forma cauzală**	
		Cauzalitate *fe*	**Cauzalitatea *ef***
Mod general de abreviere	(GY - F)	(GY – F|fe)	(GY-F|ef)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$e_1 f_1 = e_2 f_2$	$e_2 = k_{GY}^{fe} f_1$ $e_1 = k_{GY}^{fe} f_2$	$f_2 = k_{GY}^{ef} e_1 = \frac{1}{k_{GY}^{fe}} e_1$ $f_1 = k_{GY}^{ef} e_2 = \frac{1}{k_{GY}^{fe}} e_2$
Reprezentarea în limbajul bond-graph			
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	———		

Tabelul 5.1.7. Prezentarea de sinteză a joncțiunii zero J0 utilizată în teoria bond-graph.

Joncțiunea (multiportul) J0	**Forma acauzală**	**Forma cauzală** **bondul cu indice *k* impune valoarea comună a variabilelor *e* pentru toate bondurile**
Mod general de abreviere	(J0 - F)	(J0-F|k)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$e_1 = \ldots = e_j = \ldots e_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1, +1\}$	$e_j = e_k \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k$ $f_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j f_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_k} \right) f_j ; \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1, +1\}$
Reprezentarea în limbajul bond-graph		
Reprezentarea sub formă de schemă bloc	———	

Observație: Sensul semisăgeților în bond-graph, respectiv valorile $\alpha_j \in \{+1, -1\}$ sunt stabilite în conformitate cu sensul transferului de putere între elementele conectate.

Tabelul 5.1.8. Prezentarea de sinteză a joncțiunii unu J1 utilizat în teoria bond-graph

Joncțiunea (multiportul) J1	**Forma acauzală**	**Forma cauzală** **bondul cu indice *k* impune valoarea comună a variabilelor (*f*) pentru toate bondurile**
Mod general de abreviere	(J1 - F)	(J1-F|k)
Caracteristică de funcționare (lege constitutivă)	$f_1 = \ldots = f_j = \ldots f_n$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = 0 \quad \alpha_j \in \{-1, +1\}$	$f_j = f_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \neq k$ $e_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_k} \right) e_j; \quad \alpha_j, \alpha_k \in \{-1, +1\}$
Reprezentarea în limbajul bond-graph		
Reprezentare sub formă de schemă bloc.	———	

Observație: Sensul semisăgeților din bond-graph, respectiv valorile $\alpha_j \in \{-1, +1\}$ sunt stabilite în conformitate cu sensul transferului de putere între elementele conectate.

5.2.1.1. Cazul sistemelor electrice, hidraulice şi termice

În urma analizei fenomenologice a sistemelor electrice, hidraulice şi termice, din punct de vedere fizic se poate constata existența unor analogii evidente, ceea ce a condus la posibilitatea tratării unitare a metodologiei de construcție a bond-graph-ului unui astfel de sistem. Metodologia elaborată constă în parcurgerea a şase etape care sunt următoarele:

1. Se introduce câte o joncțiune 0 pentru fiecare punct caracterizat printr-un potențial (presiune sau temperatură) bine precizat.
2. Se introduce câte o joncțiune 1 pentru fiecare element S_e sau S_f, I, C sau R şi se ataşează prin bond-uri aceste elemente. Introducerea fiecărei joncțiuni 1 se face între două joncțiuni 0, (în conformitate cu structura sistemului fizic), trasând şi bond-urile aferente între joncțiuni (fără semisăgeți).
3. Se introduc elementele TF şi/sau GY.
4. Se asignează pe bond-uri sensul semisăgeților, corespunzător transferului de putere.
5. Se identifică existența joncțiunilor 0 caracterizate printr-un potențial (presiune, sau temperatură) de referință, care poate fi considerat *nul* (de exemplu, masa unui circuit electric, presiunea atmosferică într-un sistem hidraulic etc.). O astfel de joncțiune 0 *se elimină* (ca nod din reprezentarea de tip graf), împreună cu toate arcele aferente deoarece, din punct de vedere numeric, nu are nici o contribuție la bilanțul variabilelor de tip *e* în joncțiunile 1.
6. Se efectuează simplificări în graful rezultat pe baza regulilor generale prezentate în paragraful 5.2.1.3.

Observație: Conform celor precizate în Capitolul 3 paragraful 3.4.2 produsul variabilelor flux de căldură şi temperatură considerate de tip (*f*) şi respectiv (*e*) *nu reprezintă, dimensional, o putere*. Din acest motiv, se va spune că metoda bond-graph pentru sisteme termice va conduce la un *pseudo bond-graph*.

În scopul exemplificării metodologiei de construire a bond-grafului pentru sisteme electrice, hidraulice şi termice se consideră sistemele cu comportări similare studiate în ultima secțiune a Capitolului 4 şi anume: sistemele din paragraful 4.5.1 (figurile 4.5.1, 4.5.4,.4.5.5), sistemele din paragraful 4.5.2 (figurile 4.5.7, 4.5.10) şi sistemele din paragraful 4.5.3 (figurile 4.5.12, 4.5.15).

Exemplul 5.2.1.

Pentru sistemul electric din fig. 4.5.1, conform etapei 1, se consideră câte o joncțiune 0 pentru punctele a, b şi g (masa) care corespund fiecare câte unui potențial (V_a, V_b, V_g) – a se vedea fig. 5.2.1. Sursa de tensiune devine o sursă S_e care furnizează o tensiune $u = V_a - V_g$, rezistența un element R de valoare R_e supus unei diferențe de potențial ($V_a - V_b$), iar condensatorul un element C de valoare C_e supus unei diferențe de potențial ($V_b - V_g$). Aceste trei elemente, conform etapei 2, se leagă fiecare de câte o joncțiune 1 care se plasează între joncțiunile 0 corespunzătoare potențialelor la care sunt conectate. Se trece apoi la etapa 4 (etapa 3

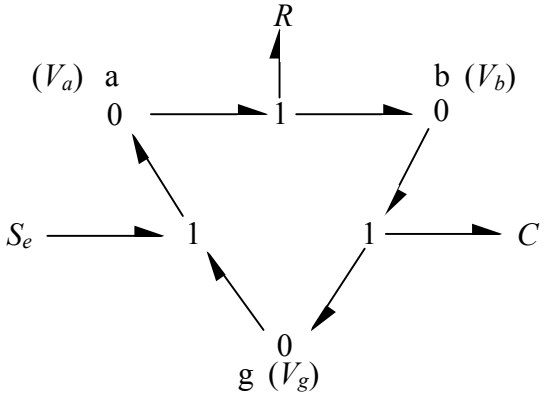


Fig. 5.2.1. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului electric din fig. 4.5.1

nu are obiect deoarece nu avem elemente TF şi GY) şi se asignează pe bond-uri semisăgeţile corespunzător transferului de putere. Astfel, pentru că sursa furnizează tensiune, semisăgeata este orientată spre joncţiunea 1, iar pentru că elementele C şi R absorb energie semisăgeţile bondurilor corespunzătoare lor sunt orientate către ele. Pentru a stabili sensul restului semisăgeţilor, se ţine cont de faptul că sunt suma potenţialelor pe joncţiunile 1 este zero, adică pentru joncţiunea 1 corespunzătoare sursei avem $u + V_g - V_a = 0$, ceea ce arată că diferenţa de potenţial pe sursă este $u = V_a - V_g$, fapt ce corespunde realităţii. Prin urmare, conform convenţiei de semne, u si V_g având semnul plus intră în joncţiunea 1 iar V_a iese din ea deoarece are semnul minus. Analog se judecă pentru joncţiunea 1 corespunzătoare elementului C. Astfel căderea de tensiune u_C pe C este $u_C = V_b - V_g$ deci avem $-u_C + V_b - V_g = 0$, deci u_C şi V_g ies din joncţiune iar V_b intră în ea (semnul minus al lui u_C din relaţia constitutivă anterioară este dat de sensul semisăgeţii bondului, sens generat de faptul că C absoarbe putere). Acum joncţiunile 0 corespunzătoare punctelor a şi b au câte unul dintre cele două bonduri ale fiecăreia dotat cu semisăgeată. Deoarece puterea care intră într-o joncţiune trebuie să şi părăsească joncţiunea, atunci rezultă automat sensul semisăgeţilor pe bondurile ce leagă aceste joncţiuni 0 de joncţiunea 1 corespunzătoare elementului R. În acest moment toate bondurile sunt orientate. Se trece acum la etapa 5 şi, considerând potenţialul din g nul, se poate renunţa la joncţiunea 0 din g şi la bondurile aferente ei, rezultând bond-graph-ul din fig. 5.2.2.

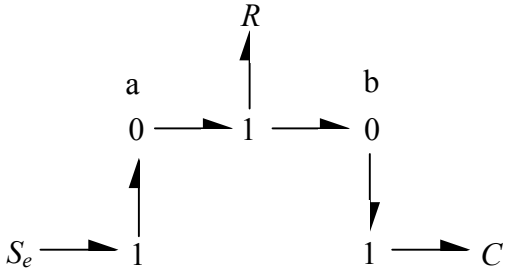


Fig. 5.2.2. Bond-graph-ul rezultat după eliminarea joncţiunii 0 de potenţial nul

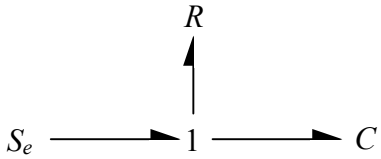


Fig. 5.2.3. Bond-graph-ul acauzal al sistemului electric din fig. 4.5.1

În ultima etapă are loc simplificarea bond-graph-ului prin eliminarea joncţiunilor 0 din a şi b conform paragrafului 5.2.1.3. În fig. 5.2.3 este reprezentat bond-graph-ul acauzal în formă finală.

Exemplul 5.2.2.

Sistemul termic din fig. 4.5.5. conţine o sursa de temperatură S_e (nefigurată) de la care trece fluxul termic printr-un perete cu rol de rezistenţă termică de valoare R_t spre o incintă au rol de capacitate termică C de valoare C_t care se încălzeşte prin acumularea unei cantităţi de căldură. Sursa, fiind considerată ideală, furnizează orice cantitate de flux termic la temperatura $T = T_a - T_g$ raportată la o temperatură de referinţă T_g considerată nulă (care poate fi 0 K) ce corespunde potenţialului g din sistemul electric anterior. Rezistenţa termică este supusă unei diferenţe de temperatură $T_a - T_b$ care există între cele două feţe ale peretelui între care trece un flux termic.

Temperatura T_a este a feţei peretelui dinspre sursă iar temperatura T_b este a feţei

peretelui dinspre incintă. În incintă există o masă *m* de substanță care se încălzeşte de la o temperatura inițială T_g la temperatura T_b a feței dinspre incintă a peretelui, adică substanței îi creşte temperatura cu diferența $T_b - T_g$. Rezultă că avem trei temperaturi care corespund punctelor a, b şi g, fiecăreia trebuind să îi corespundă în bond-graph câte o joncțiune 0 cu temperatura T_a, T_b şi respectiv T_g. Între joncțiunile 0 corespunzătoare temperaturilor T_a şi T_g se introduce o joncțiune 1 de care se leagă sursa de temperatură S_e, între joncțiunile 0 corespunzătoare temperaturilor T_b şi T_a se introduce o joncțiune 1 de care se leagă rezistența termică R iar între joncțiunile 0 corespunzătoare temperaturilor T_b şi T_g se introduce o joncțiune 1 de care se leagă capacitatea termică C. Se ajunge astfel la bond-graph-ul din fig. 5.2.4 care este identic cu cel din fig. 5.2.1, şi în care orientarea bondurilor s-a făcut pe baza unor considerații similare celor de la sistemul electric în care rolul potențialelor electrice este jucat de temperaturi.

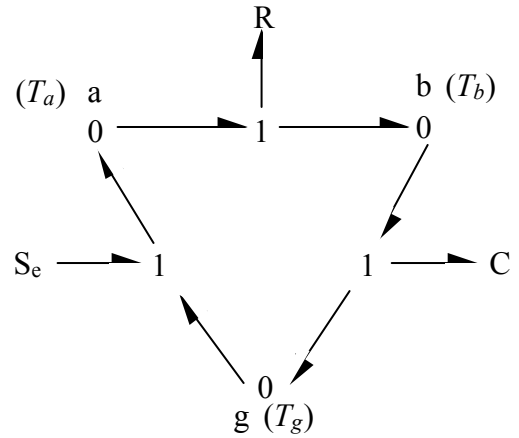


Fig. 5.2.4. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului din fig. 4.5.5

Simplificarea acestui bond-graph se face tot ca la sistemul anterior, ajungându-se în final la o formă identică cu cea din fig. 5.2.3.

Exemplul 5.2.3.

Sistemul hidraulic din fig. 4.5.4. este similar ca structură cu cele analizate până acum, în sensul că el conține o sursă de presiune S_e (o pompă) nefigurată, o rezistență hidraulică R de valoare R_f (un robinet) şi o capacitate hidraulică C de valoare C_f (un rezervor), toate înseriate. Bond-graph-ul acestui sistem (fig. 5.2.5) este identic cu al sistemelor anterioare şi se obține urmând aceeaşi succesiune a etapelor. Aici însă se consideră în locul unui potențial de referință, sau al unei temperaturi de referință, o presiune de referință p_0 corespunzătoare punctului g care poate fi considerată nulă, dar, de obicei, este considerată presiunea atmosferică. Presiunea furnizată de pompă este $p = p_a - p_0$, căderea de presiune pe robinet este $p_a - p_b$, presiunea la baza rezervorului este $p_b - p_0$. Rezultă că punctelor a, b şi g le corespund presiunile p_a, p_b şi respectiv p_g cărora li se asociază câte o joncțiune 0, bond graph-ul nesimplificat rezultând cu aceeaşi structura ca a celorlalte două sisteme anterioare.

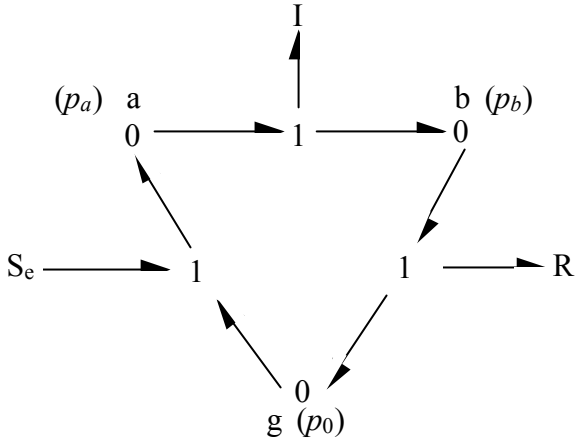


Fig. 5.2.5. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului hidraulic din fig. 4.5.4.

De remarcat că, în cazul sistemelor electrice, hidraulice şi termice, elementele constitutive funcţionează la o diferenţă de potenţial, la o diferenţă de presiune sau la o diferenţă de temperatură, toate aceste diferenţe raportându-se la un potenţial de referinţă, la o presiune de referinţă sau la o temperatură de referinţă valabile pentru întregul sistem. Această mărime de referinţă poate fi cu adevărat nulă (de exemplu potenţialul zero la masa sistemului electric) sau poate avea o valoare nenulă (presiunea atmosferică la un sistem hidraulic) dar, fiind o mărime de referinţă, valoarea ei poate fi considerată nulă (i se poate atribui valoarea zero în raport cu o scară aleasă de valori) de către modelator fără ca acest lucru să afecteze modelul bond-graph.

Exemplul 5.2.4.

Un alt exemplu de sistem hidraulic este cel din fig. 4.5.10. El se compune dintr-o sursă de presiune (o pompă) nefigurată, o conductă de lungime l care este un element hidraulic inerţial I de valoare L_f si un robinet care este o rezistenţă hidraulica R de valoare R_f. Pentru a construi bond-graph-ul, se determină mai întâi presiunile cărora li se va asocia câte o joncţiune 0. Acestea sunt presiunea de referinţă p_0 (presiunea atmosferică) din punctul g, presiunea de refulare a pompei p_a în punctul a care coincide cu presiunea de la începutul conductei şi presiunea de la celălalt capăt al conductei p_b în punctul b care coincide cu presiunea de la intrarea în robinet. După asocierea câte unei joncţiuni 0 fiecărei presiuni se înserează o joncţiune 1 de care se leagă S_e între joncţiunile zero corespunzătoare punctelor g şi a, o joncţiune 1 de care se leagă elementul hidraulic inerţial I între joncţiunile 0 corespunzătoare punctelor a şi b şi o joncţiune 1 de care se leagă elementul hidraulic disipativ R între joncţiunile 0 corespunzătoare punctelor b şi g. Se poate trece acum la asignarea pe bonduri a sensului semisăgeţilor. Deoarece suma puterilor pe joncţiunile 1 este zero iar presiunea de refulare a pompei raportată la p_0 este $p = p_a - p_0$ rezultă că avem relaţia $p - p_a + p_0 = 0$ adică p şi p_0 intră în joncţiunea 1 corespunzătoare sursei iar p_a iese din ea (semnul presiunii p trebuie să fie plus, deoarece ea intră în joncţiune fiind furnizată de sursă).

În ceea ce priveşte joncţiunea 1 corespunzătoare elementului R, deoarece căderea de presiune pe el este $p_R = p_b - p_0$ iar puterea p_R se scurge către R deci are semnul minus, rezultă relaţia $-p_R + p_b - p_0 = 0$, adică p_b intră în joncţiune iar p_0 iese din ea. Bondul elementului I are semisăgeata orientată spre element întrucât acesta absoarbe putere. Celelalte doua bonduri ale joncţiunii 1 sunt orientate pe baza faptului că, în joncţiunile 0 din a şi b puterea intră pe un bond şi iese pe celalalt. Acum bond-graph-ul se poate simplifica prin eliminarea joncţiunii 0 din g, obţinându-se bond-graph-ul din fig. 5.2.6.

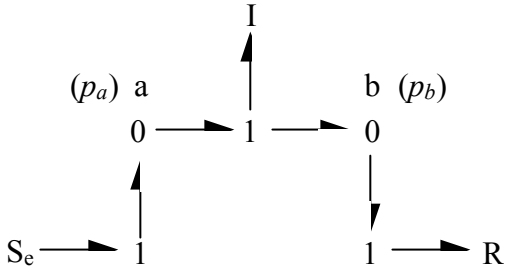


Fig. 5.2.6. Bond-graph-ul sistemului din fig. 4.5.10 după eliminarea joncţiunii 0 corespunzătoare presiunii de referinţă

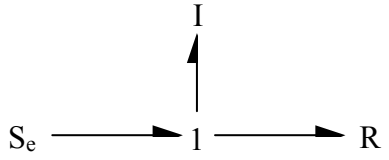


Fig. 5.2.7. Bond-graph-ul simplificat al sistemului din fig. 4.5.10

În continuare bond-graph-ul sistemului se mai poate simplifica eliminând cele două joncţiuni 0 rămase şi contopind apoi toate

joncțiunile 1 într-una singură. Se obține bond-graph-ul din fig. 5.2.7.

Exemplul 5.2.5.

Sistemul electric din fig. 4.5.7. este similar cu cel hidraulic din fig. 4.5.10 care a fost prezentat anterior. El este compus dintr-o sursă de tensiune S_e care este înseriată cu o rezistență R de valoare R_e şi cu o bobină I de inductanță L. Din punct de vedere al metodei bond-graph, cele două sisteme sunt identice şi bond-graph-ul propriu-zis al sistemului electric este acelaşi cu cel al sistemului hidraulic din Exemplul 5.2.4, cu observația că elementul inerțial este bobina, iar cel rezistiv o rezistență electrică.

Exemplul 5.2.6.

Să considerăm acum cazul sistemului electric din fig. 4.5.12. El este format dintr-o sursă de tensiune înseriată cu o rezistență electrică R de valoare R_e, cu o bobina I de valoare L şi cu un condensator C de valoare C_e. Se consideră câte o joncțiune 0 pentru punctele a, b, c şi g care corespund potențialelor V_a, V_b, V_c şi respectiv V_g. Între aceste joncțiuni 0 se introduce câte o joncțiune 1 de care se leagă elemente bond-graph S_e, R, I si C corespunzătoare sursei de tensiune, rezistenței electrice, bobinei şi respectiv condensatorului. Se obține o prima formă a bond-graph-ului care este arătată în fig. 5.2.8.

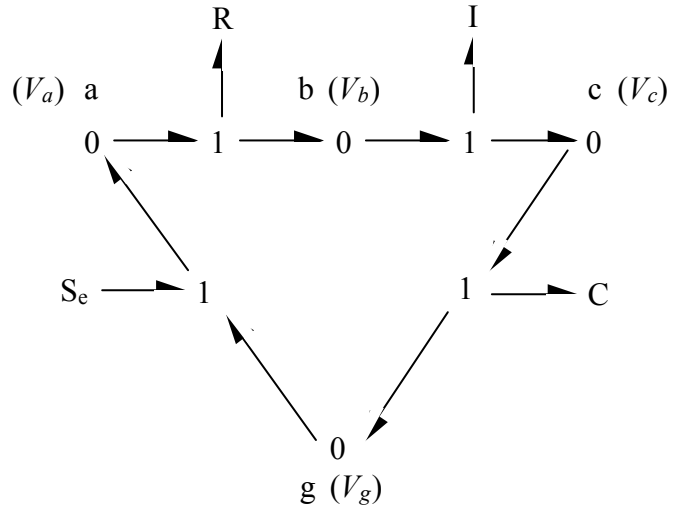


Fig. 5.2.8. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului electric din fig. 4.5.12

Neavând elemente TF şi GY se trece la etapa a patra, adică se stabilesc sensurile semisăgeților pe bonduri corespunzător sensului puterii. Sursa furnizează energie, deci semisăgeata acestui element este către joncțiunea 1, iar pentru elementele R, I şi C, deoarece disipă sau acumulează energie, semisăgeata este către element. Dacă u este tensiunea la sursă, atunci avem $u = V_a - V_g$, adică $u - V_a + V_g = 0$ (relație ce reflectă conservarea puterii), ceea ce arată că bondul corespunzător lui V_a are săgeata spre exteriorul joncțiunii 1 iar cel corespunzător lui V_g către joncțiunea 1, fapt care rezultă din convenția de semne aplicată relației de conservare a puterii. Pentru elementul C, dacă u_C este tensiunea aplicată elementului, avem $u_C = V_c - V_g$, ceea ce conduce la $u_c + V_c - V_g = 0$, deci bondul

corespunzător lui V_g este orientat spre g iar bondul corespunzător lui V_C este orientat către joncțiunea 1 corespunzătoare lui C. Acum se pot orienta şi celelalte două bonduri ale joncțiunilor 0 corespunzătoare lui V_a şi V_c. Mai rămân de orientat bondurile dintre joncțiunea 0 a lui V_b şi cele două joncțiuni 1 adiacente. Bondul dintre joncțiunea 0 a lui V_b şi joncțiunea 1 corespunzătoare elementului I este orientat către cea din urmă întrucât în ea trebuie să intre putere cel puțin printr-un port. Aceasta face ca bondul dintre joncțiunea 0 a lui V_b şi joncțiunea 1 corespunzătoare elementului R să fie orientat către prima pentru că şi pentru ea trebuie să existe un bond prin care sa intre putere. Acum toate bondurile sunt orientate.

În etapa a cincea se elimină joncțiunea 0 corespunzătoare potențialului V_g care este considerat nul. Se obține bond-graph-ul din fig. 5.2.9.

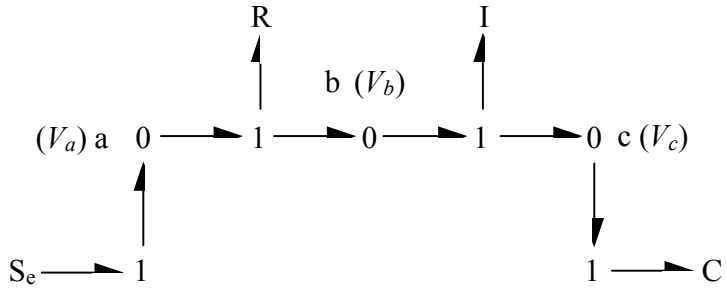


Fig. 5.2.9. Bond-graph-ul sistemului din fig. 4.5.12 rezultat după eliminarea joncțiunii 0 de potențial nul

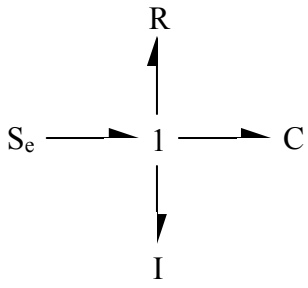


Fig. 5.2.10. Bond-graph-ul acauzal al sistemului electric din fig. 4.5.12

Se trece la etapa a şasea şi se simplifică bond-graph-ul utilizând regulile din paragraful 5.2.13, adică se elimină joncțiunile 0 corespunzătoare potențialelor V_a, V_b şi V_c şi apoi toate joncțiunile 1 se contopesc în una singură. Bond-graph-ul simplificat este prezentat în fig. 5.2.10.

Exemplul 5.2.7.

Sistemul hidraulic din fig. 4.5.15 are o structură similară cu sistemul electric anterior, adică este format dintr-o sursa de efort S_e (o pompă, nefigurată) înseriată cu un element inerțial I (o conductă lungă în care curgerea este laminară), cu un element disipativ R (un robinet) şi cu un element capacitiv C (un rezervor de fluid). Potențialelor V_a, V_b, V_c, V_g din sistemul electric le corespund presiunea p_a furnizată de pompă, presiunea p_b de la ieşirea din robinet, presiunea p_c de la intrarea în rezervor şi respectiv presiunea de referință p_g corespunzătoare presiunii atmosferice. În mod similar ca la sistemul electric, se consideră câte o joncțiune 0 pentru fiecare presiune şi între ele câte o joncțiune 1 corespunzătoare elementelor S_e, I, R şi C rezultând astfel un bond-graph nesimplificat ca cel din fig. 5.2.9. După simplificare, se obține tot bond-graph-ul din fig. 5.2.10.

5.2.1.2. Cazul sistemelor mecanice cu elemente în mişcare de translaţie sau de rotaţie

Pentru sistemele mecanice metodologia de construire a bond-graph-ului unui sistem are o altă structură decât pentru sistemele electrice, hidraulice sau termice dar cuprinde tot şase etape care sunt următoarele:

1. Se introduce câte o joncțiune 1 pentru fiecare punct caracterizat printr-o viteză bine precizată (fiecare element inerțial impune o viteză bine precizată).

2. Se introduc, în poziții adecvate, joncțiunile 0 necesare pentru a stabili expresiile tuturor vitezelor şi se trasează bond-urile aferente (fără semisăgeți).
3. În joncțiunile 1 se ataşează, prin bond-uri, elemente S_e, S_f, I, C sau R.
4. Se introduc elemente TF şi/sau GY.
5. Se asignează pe bonduri sensul semisăgeților, corespunzător transferului de putere.
6. Se efectuează simplificări în graful rezultat pe baza regulilor generale prezentate în paragraful 5.2.1.3.

Pentru a exemplifica modul de construire a bond-graph-ului pentru sistemele mecanice urmând cele şase etape enunțate, se consideră sistemele studiate în ultima secțiune a Capitolului 4 şi anume: sistemele din paragraful 4.5.1 (figurile 4.5.2, 4.5.3), din paragraful 4.5.2 (figurile 4.5.8, 4.5.9) şi din paragraful 4.5.3 (figurile 4.5.13, 4.5.14).

Exemplul 5.2.8.

Sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translație din fig. 4.5.2 este format dintr-un arc având constanta elastică k_e şi un amortizor având constanta de amortizare γ. Ele au câte o extremitate prinsă de un acelaşi perete fix iar celelalte două extremități sunt acționate simultan în punctul a de o forță F. Sistemul nu conține elemente cu masă (elemente inerțiale). Se consideră o joncțiune 1 pentru viteza v_a de deplasare a forței împreună cu extremitățile arcului şi amortizorului care constituie şi viteza de deformare a acestor din urmă elemente. Nu este nevoie de vreo joncțiune 0, deoarece nu există alte viteze în sistem care să fie în relație cu viteza v_a. Se poate trece acum la etapa a treia care constă în ataşarea, prin bonduri, de joncțiunea 1 a unui element S_e pentru forța F, a unui element R pentru arcul elastic şi a unui element C pentru amortizor. Pe aceste trei bonduri se poate deduce foarte uşor sensul semisăgeților pe baza faptului că sursa furnizează putere deci semisăgeata va fi orientată către joncțiunea 1 şi a faptului că elementele R şi C "consumă" putere (o disipă sau o stochează) şi deci semisăgețile pe bondurile corespunzătoare lor vor fi orientate dinspre joncțiunea 1 către ele. Se obține în final, bond-graph-ul acauzal reprezentat în fig. 5.2.11, identic cu cel din fig. 5.2.3.

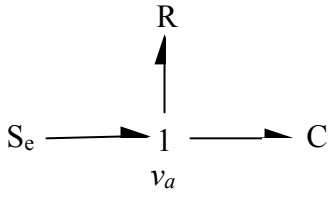


Fig. 5.2.11. Bond-graph-ul acauzal al sistemului mecanic reprezentat în fig. 4.5.2

Exemplul 5.2.9.

Se consideră acum sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotație reprezentat în fig. 4.5.3. El se compune dintr-un arc de torsiune cu constanta elastică k_t şi un amortizor pentru rotație cu constanta de amortizare γ_t. Ele au în punctul a câte o extremitate în comun în care acționează un moment M, iar celelalte două extremități sunt prinse de puncte fixe. Sistemul nu conține elemente cu masă (elemente inerțiale). Singura viteză din sistem pentru care se consideră o joncțiune 1 este viteza unghiulară ω_a din punctul a. De această joncțiune 1 se ataşează prin bonduri o sursă de efort S_e pentru momentul M, un element capacitiv C pentru arcul de torsiune şi un element R pentru amortizorul de rotație. Sensul semisăgeților pe cele trei bonduri este către joncțiunea 1 pentru elementul S_e şi dinspre joncțiunea 1 pentru

elementele R şi C datorită aceloraşi motive ca la sistemul anterior. Bond-graph-ul acestui sistem este identic cu cel din fig. 5.2.11, numai că în loc de v_a este viteza unghiulară ω_a.

Exemplul 5.2.10.

Un alt sistem mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie este cel reprezentat în fig. 4.5.9. Acesta este compus dintr-un element inerţial în rotaţie având momentul principal de inerţie în raport cu axa de rotaţie J, dintr-o sursă de efort care furnizează un moment M şi dintr-un amortizor de rotaţie cu constanta de amortizare γ_t. Vitezei de rotaţie a volantului ω care este şi viteza care acţionează asupra amortizorului, i se asociază o joncţiune 1 de care se ataşează prin bonduri o sursă S_e, un element inerţial I şi un element disipativ R care corespund respectiv momentului M, masei în rotaţie de moment principal de inerţie J şi amortizorului de rotaţie cu coeficientul de amortizare γ_t. Pe bondul sursei semisăgeata este orientată către joncţiunea 1 deoarece ea furnizează putere, iar pe bondul elementului inerţial şi al rezistorului semisăgeata este orientată spre aceste elemente deoarece ele acumulează energie. Se obţine bond-graph-ul acauzal al sistemului aşa cum este arătat în fig. 5.2.12, care este identic cu cel din fig. 5.2.7.

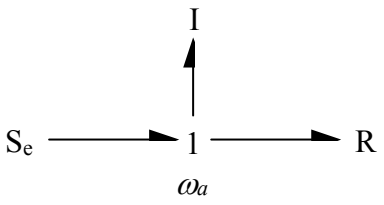


Fig. 5.2.12. Bond-graph-ul acauzal al sistemului din fig. 4.5.9.

Exemplul 5.2.11.

Se consideră un alt sistem mecanic cu elemente în mişcare de translaţie arătat în fig. 4.5.8. El prezintă o structură similară cu sistemul din fig. 4.5.9, în sensul că are o sursă de efort care furnizează o forţă F ce acţionează asupra unui element inerţial de masă m a cărui viteză v este impusă extremităţii unui amortizor de constantă de amortizare γ, adică are acelaşi tip de elemente şi la fel conectate cu diferenţa că în loc de mişcări de rotaţie sunt mişcări de translaţie. Vitezei v a masei m îi corespunde în bond-graph o joncţiune 1 de care se ataşează prin bonduri cele trei elemente S_e, I şi C pe care semisăgeţile sunt orientate la fel ca la sistemul anterior. Se obţine un bond-graph acauzal ca cel din fig. 5.2.12 cu diferenţa că viteza corespunzătoare joncţiunii 1 este v şi nu ω_a.

Exemplul 5.2.12.

Un alt sistem mecanic cu elemente în mişcare de translaţie este cel reprezentat în fig. 4.5.13. El este constituit dintr-o sursa de efort S_e care furnizează o forţă F ce acţionează asupra unui element inerţial I de masă m şi de care este prinsă extremitatea unui arc C având constanta elastică k_e şi extremitatea unui amortizor R având constanta de amortizare γ. Vitezei v a masei m, care este şi viteza de deformare a arcului C şi amortizorului, i se atribuie o joncţiune 1 de care se ataşează prin bonduri sursa S_e, elementul inerţial I, elementul condensator C şi elementul rezistor R.

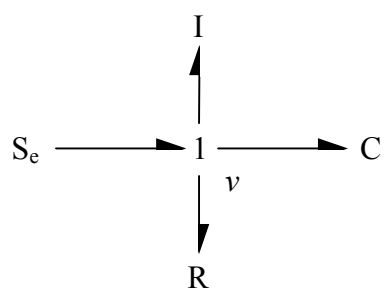


Fig. 5.2.13. Bond-graph-ul acauzal al sistemului mecanic din fig. 4.5.13.

Numai pe bondul sursei semisăgeata este orientată către joncțiunea 1 deoarece ea furnizează putere, iar pe celelalte trei bonduri semisăgeata este orientată către elementele I, C şi R, deoarece ele absorb energie pe care o stochează sau o disipă. Bond-graph-ul acauzal al sistemului este arătat în fig. 5.2.13 şi se observă că este identic cu cel din fig. 5.2.10.

Exemplul 5.2.13.

Corespunzător acestui sistem mecanic cu elemente în mişcare de translație, în fig. 4.5.14 este arătat un sistem mecanic cu elemente în mişcare de rotație având o structură similară, conținând din punct de vedere al metodei bond-graph, aceleaşi elemente şi la fel conectate. Astfel sistemul conține un element inerțial I de moment principal de inerție J rotit cu o viteză unghiulară ω de un moment furnizat de o sursă de efort S_e, viteză cu care se roteşte şi extremitatea unui element R reprezentat de un arc de torsiune având constanta elastică k_t şi extremitatea unui element C reprezentat de un amortizor având constanta de amortizare γ_t. Bond-graph-ul sistemului este identic cu cel din fig. 5.2.13 cu singura deosebire că joncțiunea 1 este asociată vitezei ω şi nu vitezei v.

Analizând toate exemplele date, se constată ca s-au obținut bond-graph-uri identice pentru sisteme care procesează tipuri diferite de energie dar a căror structură este similară din punct de vedere al tipului de elemente şi al modului de conectare al acestora.

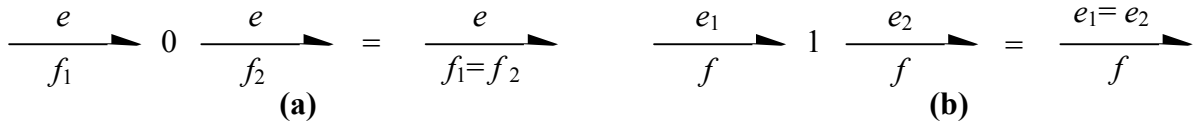
Astfel, sistemele din figurile 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4. şi 4.5.5 au un model bond-graph comun şi anume cel din fig. 5.2.3, sistemele din figurile 4.5.7, 4.5.8, 4.5.9, 4.5.10 au modelul bond-graph din fig. 5.2.7, iar sistemele din figurile 4.5.12, 4.5.13, 4.5.14, 4.5.15 au modelul bond-graph din fig. 5.2.10.

Acest fapt vine în sprijinul ideii de generalitate a metodei bond-graph, idee ce a fost deja sugerată în capitolele anterioare şi va fi întărită în continuare prin rezultatele din capitolele următoare.

5.2.1.3. Reguli de simplificare a bond-graph-urilor acauzale

După construirea bond-graph-urilor, pot să apară situații în care acestea permit efectuarea unor simplificări. Situațiile respective sunt prezentate în continuare.

1. Joncțiunile (0 sau 1), care au *numai două bond-uri* şi doar *una dintre cele două semisăgeți* intră în respectiva joncțiune, pot fi îndepărtate, conform fig. 5.2.14 a) şi b).



(a) **(b)**

Fig. 5.2.14. Cazuri de eliminare a joncțiunilor

2. Două joncțiuni de acelaşi tip (0 sau 1) pot fuziona, conform fig.5.2.15 a) şi b).

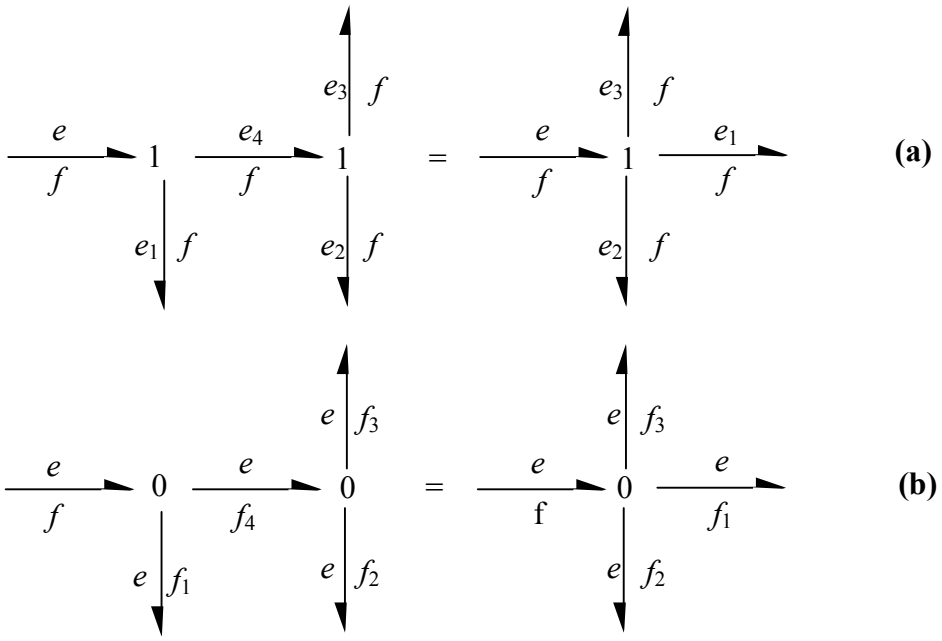


Fig. 5.2.15. Reguli de simplificare a joncțiunilor

3. Dacă *două* (generalizabil la mai multe) elemente (I_1), (I_2), având parametrii k_{I_1}, k_{I_2} sunt conectate:

- în aceeaşi joncțiune 0, atunci acestea se înlocuiesc printr-un *singur* element (I), conform fig. 5.2.16. a), având parametrul:

$$k_I = \frac{(k_{I_1} k_{I_2})}{(k_{I_1} + k_{I_2})}; \tag{5.2.1}$$

- în aceeaşi joncțiune 1, atunci acestea se înlocuiesc printr-un singur element (I), conform fig. 5.2.16 b), având parametrul:

$$k_I = k_{I_1} + k_{I_2}. \tag{5.2.2}$$

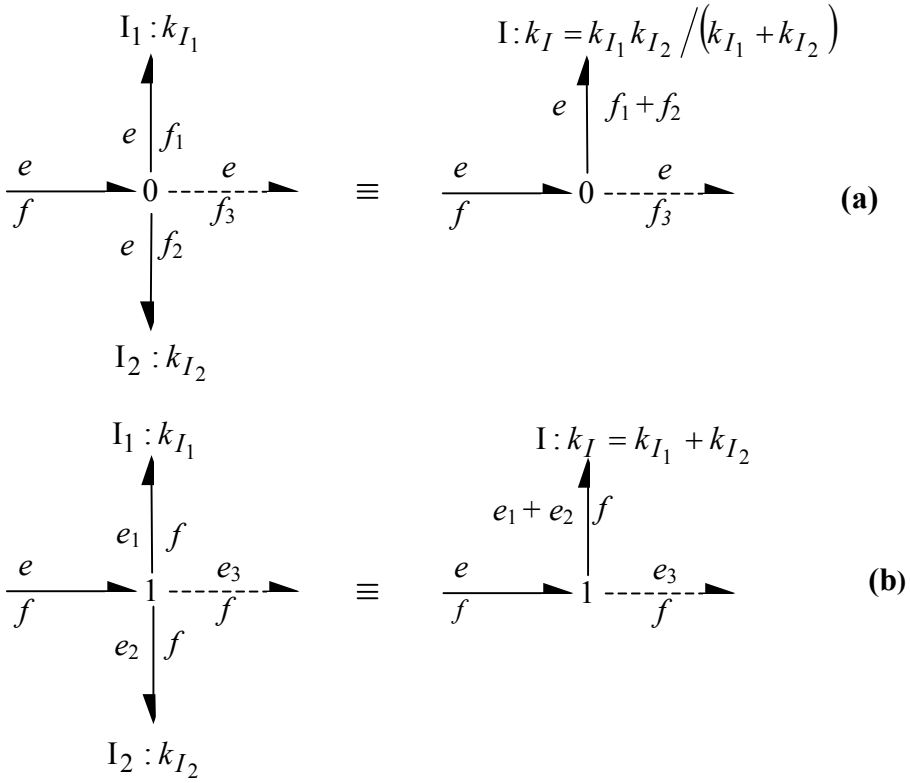


Fig. 5.2.16. Reguli de simplificare a elementelor I.

4. Dacă *două* (generalizabil la mai multe) elemente (C_1), (C_2), având parametrii k_{C_1}, k_{C_2} sunt conectate:

- în aceeaşi joncţiune 0, atunci acestea se înlocuiesc printr-un *singur* element (C), conform fig. 5.2.17 a), având parametrul:

$$k_C = k_{C_1} + k_{C_2}\,; \tag{5.2.3}$$

- în aceeaşi joncţiune 1, atunci acestea se înlocuiesc printr-un *singur* element (C), conform fig. 5.2.17 b), având parametrul:

$$k_C = \frac{(k_{C_1} k_{C_2})}{(k_{C_1} + k_{C_2})}. \tag{5.2.4}$$

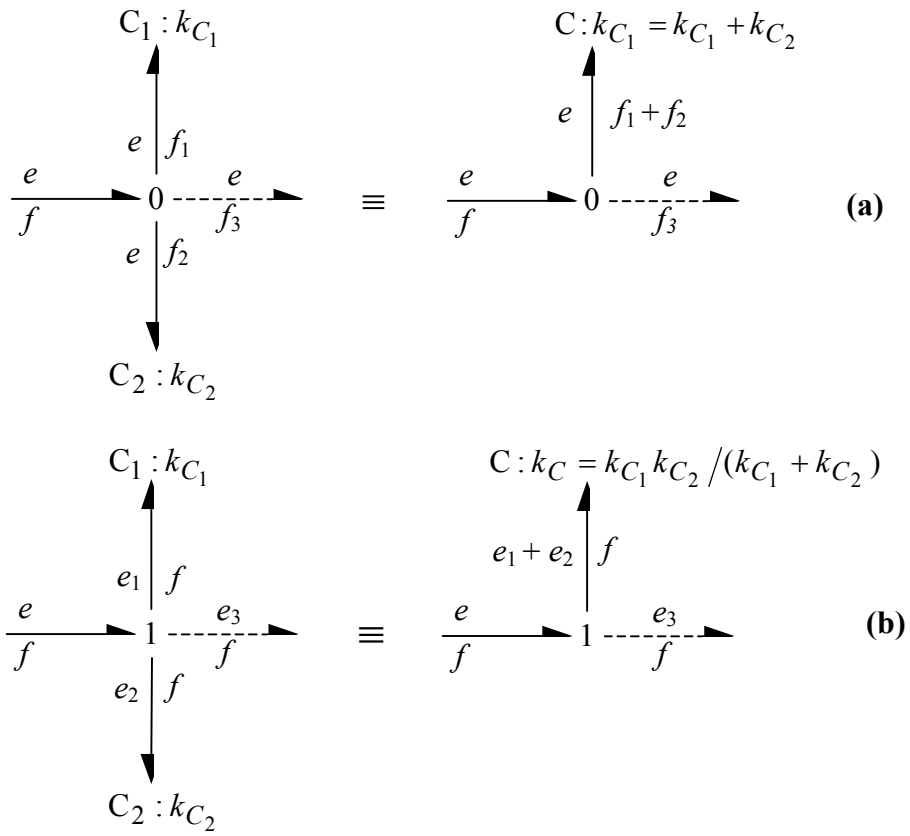


Fig. 5.2.17. Reguli de simplificare a elementelor C

5. Dacă *două* (generalizabil la mai multe) elemente (R_1), (R_2), având parametrii k_{R_1}, k_{R_2} sunt conectate:

- în aceeaşi joncţiune 0, atunci acestea se înlocuiesc printr-un *singur* element (R), conform fig. 5.2.18 a), având parametrul:

$$k_R = \frac{(k_{R_1} k_{R_2})}{(k_{R_1} + k_{R_2})};$$

- în aceeaşi joncţiune 1, atunci acestea se înlocuiesc printr-un *singur* element (R), conform fig. 5.2.18 b), având parametrul:

$$k_R = k_{R_1} + k_{R_2}.$$

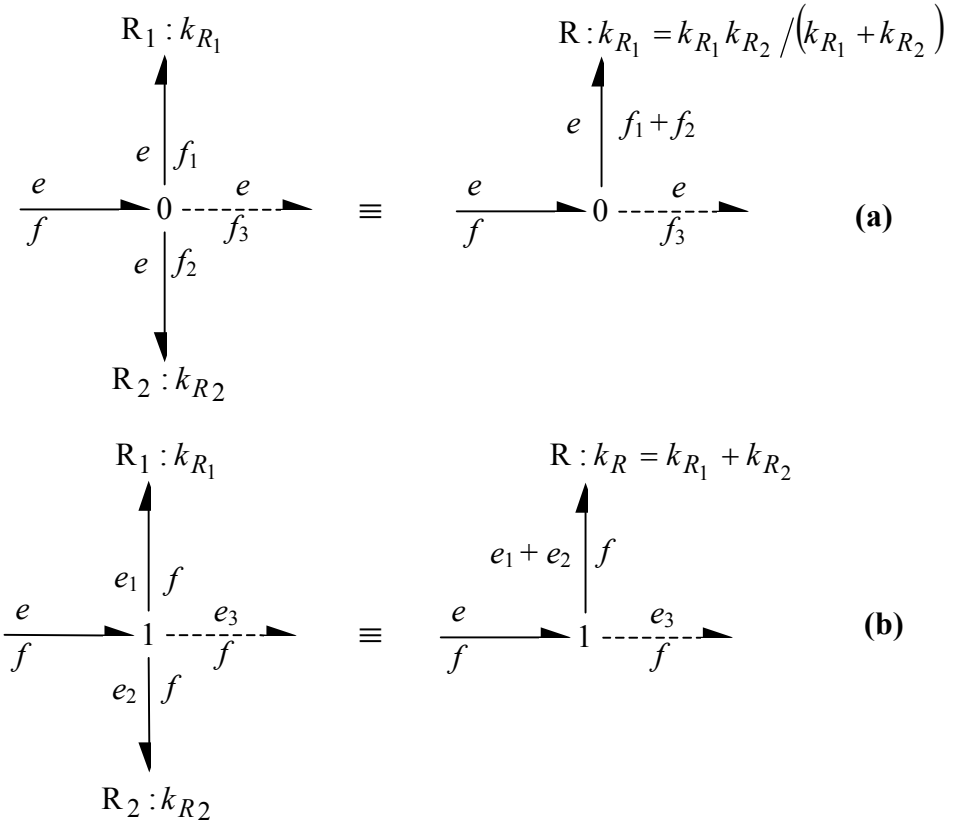


Fig. 5.2.18. Reguli de simplificare a elementelor R

5.2.2. Construcţia bond-graph-ului cauzal

Pornind de la bond – graph-ul acauzal, se vor parcurge paşii metodologiei prezentate mai jos cu scopul de a *asigna* (sau *atribui*, *aloca*) *cauzalitatea* fiecărui element (adică, în limbaj grafic, pentru a ataşa câte o *liniuță cauzală* fiecărui bond). Pentru fiecare element standard se va face apel la detalierea din paragraful 5.1.3. Metodologia respectivă exploatează un număr de principii privind *propagarea cauzalității* impuse de:

- sursele ideale S_e şi/sau S_f;
- descrierea funcționării elementelor acumulatoare de energie, I şi/sau C, prin *legi constitutive în forma integrală.*

Pasul 1

1.1. Se alege o sursă şi se marchează cauzalitatea impusă de aceasta.
1.2. Pentru unele bond-uri adiacente rezultă un *mod unic* de asignare a cauzalității, datorită regulilor specifice elementelor standard J0, J1, TF, GY.
1.3. Se repetă subpaşii 1.1 şi 1.2 pentru toate sursele.

Pasul 2

2.1. Se alege un element I sau C şi i se asignează (atribuie) *cauzalitatea integrală.*
2.2. Se aplică operații analoge subpasului 1.2, datorită faptului că subpasul 2.1 se finalizează prin ataşarea liniuței cauzale la un nou bond.
2.3. Se repetă paşii 2.1. şi 2.2. pentru toate elementele acumulatoare de energie.

Pasul 3

3.1. Se alege un element R şi i se asignează cauzalitatea (rezistivă sau conductivă) în mod convenabil.

3.2. Se aplică operaţii analoge subpasului 1.2, datorită faptului că subpasul 3.1 se finalizează prin ataşarea liniuţei cauzale la un nou bond.

3.3. Se repetă paşii 3.1. şi 3.2. pentru toate elementele disipatoare de energie.

Observaţie: Există situaţii când, în pasul 2, utilizarea cauzalităţii integrale pentru toate elementele I şi C *nu este posibilă*, fapt ce se reflectă prin violarea regulilor de asignare a cauzalităţii pentru unul sau mai multe elemente J0, J1, TF, GY. În astfel de cazuri, se va alege *cauzalitatea derivativă* pentru unul, eventual mai multe elemente acumulatoare de energie.

Toate bond-urile grafului cauzal se numerotează (uzual în ordinea naturală), dar numerotarea se poate face şi pe bond-graph-ul acauzal, fie înainte, fie după efectuarea eventualelor simplificări.

Pentru a exemplifica regulile de atribuire a cauzalităţii pe bonduri se va considera bond-graph-ul din fig. 5.2.3, care corespunde sistemelor din figurile 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5, bond-graph-ul din fig. 5.2.7, care corespunde sistemelor din figurile 4.5.6, 4.5.7, 4.5.8 , 4.5.9 şi bond-graph-ul din fig. 5.2.10 care corespunde sistemelor din figurile 4.5.10, 4.5.11, 4.5.12 şi 4.5.13.

Exemplul 5.2.14

La bond-graph-ul acauzal din fig. 5.2.3 se aplică sub-pasul 1.1 şi se asignează cauzal bondul sursei de efort, liniuţa cauzală trebuind să fie desenată la capătul dinspre joncţiunea 1 aşa cum este arătat în fig. 5.2.19.a deoarece sursa aplică un efort joncţiunii şi nu invers. Acest lucru nu induce cauzalitatea pe vreunul din celelalte două bonduri. Se poate trece acum la pasul 2 şi, conform subpasului 2.1, se alege elementul C căruia i se asignează cauzalitatea integrală, rezultând bond-graph-ul din fig. 5.2.19.b.

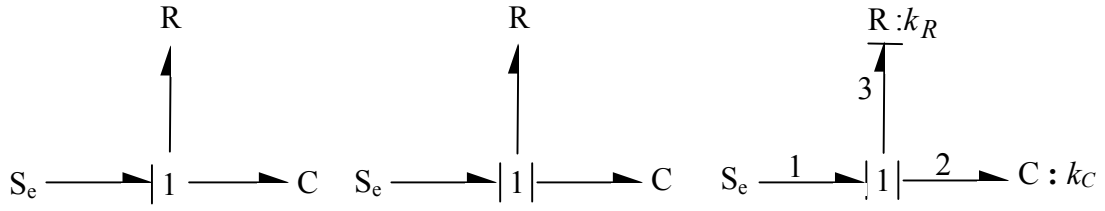


Fig. 5.2.19. Atribuirea cauzală a bond-graph-ului din fig. 5.2.3

În acest moment, deoarece dintre cele trei bonduri incidente în joncţiunea 1 două au liniuţa cauzală spre joncţiune, obligatoriu cel de al treilea bond, care corespunde elementului R, va trebui să aibă liniuţa cauzală la capătul dinspre element căci numai în felul acesta se respectă regula de atribuire cauzală pe bondurile incidente într-o joncţiune 1 (numai unul nu trebuie să aibă liniuţa cauzală spre joncţiune). Se obţine astfel bond-graph-ul cauzal arătat în fig. 5.2.19.c, nemaifiind necesară trecerea la pasul 3. În final se numerotează bondurile şi se scriu parametrii elementelor precedaţi de două puncte.

Exemplul 5.2.15

Atribuirea cauzalității pe bondurile bond-graph-ului acauzal din fig. 5.2.7 începe cu bondul sursei de efort pe care se desenează liniuța cauzală lângă joncțiunea 1 (fig. 5.2.20.a).

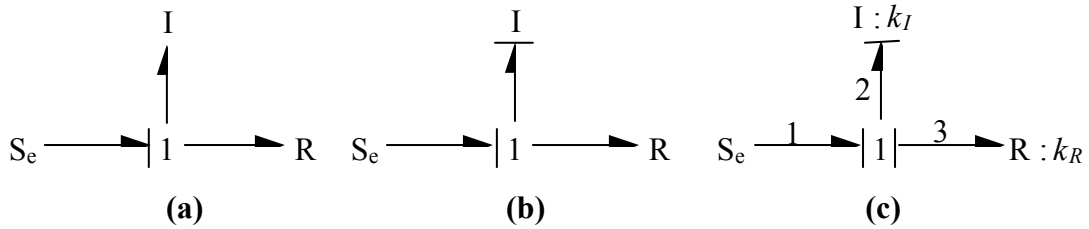


Fig. 5.2.20. Atribuirea cauzală a bond-graph-ului din fig. 5.2.7

Acest lucru nu induce cauzalitate pe bondurile adiacente. Se trece la pasul al doilea şi se atribuie elementului I cauzalitate integrală. (fig. 5.2.20.b). În aceste condiții el aplică pe joncțiunea 1 un flux, ceea ce induce cauzalitatea pe bondul elementului R, cu liniuța cauzală către joncțiune (fig. 5.2.20.c) şi atribuirea cauzalității este încheiată. Apoi se numerotează bondurile şi se scriu parametrii elementelor.

Exemplul 5.2.16

În cazul bond-graph-ului din fig. 5.2.10, după primul pas, numai bond-ul sursei de efort are atribuire cauzală (fig. 5.2.21.a). Se trece la al doilea pas şi se atribuie cauzalitate integrală elementului I (fig. 5.2.21.b). Aceasta face ca, spre joncțiunea 1, să fie transmis un flux. Din acest motiv, bondurile elementelor C şi R vor avea în mod obligatoriu liniuța cauzală către joncțiune (fig. 5.2.21.c). Acum atribuirea cauzală este finalizată şi se numerotează bondurile. Se pot scrie, de asemenea, parametrii elementelor, între element şi parametru punându-se semnul diacritic două puncte.

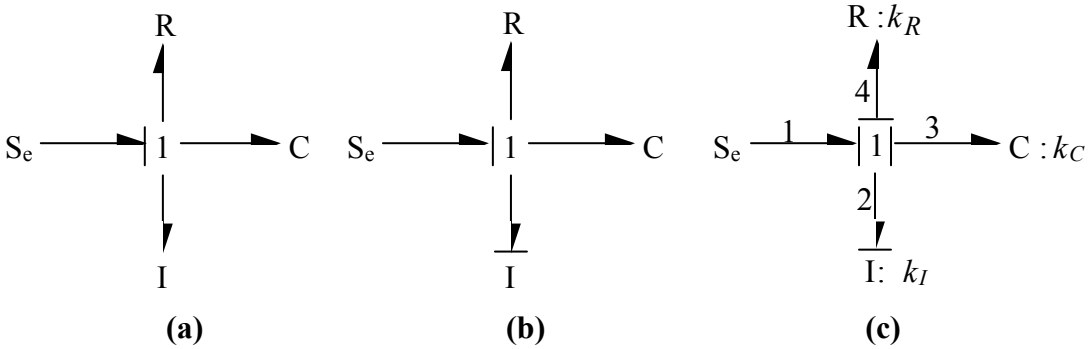


Fig. 5.2.21. Atribuirea cauzala a bond-graph-ului din fig. 5.2.10.

După atribuirea cauzală a bond-graph-ului unui sistem este posibil ca, pentru a nu încălca regulile acestei atribuiri, să fie obligatoriu a avea elemente I şi/sau C în cauzalitate derivativă. Acest fapt trebuie evitat ori de câte ori este posibil, întrucât acest gen de cauzalitate conduce la apariția unor dificultăți în rezolvarea sistemului de ecuații de stare care devine un sistem de ecuații algebrice şi diferențiale, iar, în cazul utilizării în modelarea cu diagrame bloc, conduce la apariția unor blocuri de derivare care produc adesea erori de calcul.

5.3. Construcţia modelelor bazată pe bond-graph-uri fără cauzalitate derivativă

În această secțiune ne referim numai la situația când tuturor elementelor acumulatoare de energie le este atribuită cauzalitate integrală.

Pe baza bond-graph-ului cauzal se pot construi două modele ale sistemului studiat. Un prim model este cel denumit intrare-stare-ieşire în care ecuațiile se scriu urmărind circulația puterii pe bonduri. Detalii privind structura şi unele proprietăți ale modelelor intrare-stare-ieşire sunt prezentate în Capitolul 2, secțiunile 2.4 şi 2.5 pentru cazul liniar şi secțiunea 2.6 pentru cazul neliniar. Un al doilea model este cel denumit diagramă bloc, în care fiecare element din bond-graph este înlocuit, în mod corespunzător, cu un anumit tip de bloc, iar, în final, aceste blocuri, legate între ele, formează diagrama bloc a întregului sistem. În secțiunea 2.7. din Capitolul 2 sunt furnizate informații de bază privind utilizarea şi interpretarea descrierilor de tip schemă bloc.

5.3.1. Construcţia unui model intrare-stare-ieşire

În cazul general *neliniar* formularea ecuațiilor de stare se face în variabilele energiei p şi q. În acest scop se scriu ecuațiile corespunzătoare tuturor elementelor I şi C în cauzalitate integrală

$$\dot{p}_I(t) = e_I(t)\,, \tag{5.3.1-a}$$

$$\dot{q}_C(t) = f_C(t)\,. \tag{5.3.1-b}$$

Fiecare $e_I(t)$ şi respectiv $f_C(t)$ se explicitează cu ajutorul ecuațiilor algebrice care descriu comportarea elementelor R, J0, J1, TF, GY. Ulterior, prin intermediul relațiilor constitutive de forma

$$f_I = \Psi_I^i(p_I)\,, \tag{5.3.2-a}$$

$$e_C = \Psi_C^i(q_C)\,, \tag{5.3.2-b}$$

membrii drepți ai tuturor ecuațiilor diferențiale (5.3.1) se pot exprima numai în funcție de p_I, q_C şi variabilele corespunzătoare surselor. Se obține astfel forma standard a unei ecuații vectoriale de stare în general neliniare de tipul (2.6.1), conform celor prezentate în Capitolul 2. Presupunând că sistemul conține n_I elementele de tip I şi n_C elemente de tip C, rezultă că reprezentarea de stare de forma (2.6.1) va fi formată din $n = n_I + n_C$ ecuații diferențiale având drept variabile de stare $p_I(t)$, $q_C(t)$, iar drept variabile de intrare semnalele generate de surse. Cu alte cuvinte, variabilele de stare sunt variabilele energiei desemnate astfel:

- impulsul generalizat (mărimea p) pentru elementele I
- deplasarea generalizată (mărimea q) pentru elementele C.

În funcție de obiectivul urmărit se va adăuga ecuația ieşirii (2.6.2) conform Capitolului 2.

În cazul în care pentru elementele I, C, şi R se consideră legi constitutive *de tip liniar*, reprezentarea intrare-stare-ieşire va fi de forma (2.4.3) şi (2.4.4) conform capitolului 2,

reflectând la nivelul întregului model liniaritatea dinamicii. În acest caz al dinamicii liniare, pe baza relațiilor constitutive ale elementelor I şi C variabilele de stare de tip energetic (p_I şi q_C - toate sau numai o parte din ele) pot fi transformate în variabilele puterii (f_I şi respectiv e_C).

Precizăm că în cazul *liniar* formularea ecuațiilor de stare se poate face *direct în variabilele puterii* desemnând variabilele de stare astfel:

- fluxul (mărimea f_I) pentru elementele I;
- efortul (mărimea e_C) pentru elementele C.

Astfel, fiecărui element I i se asociază o ecuație diferențială cu forma generică

$$\dot{f}_I(t) = \frac{1}{k_I} e_I(t), \tag{5.3.3-a}$$

unde $e_I(t)$ urmează a fi explicitat cu ajutorul ecuațiilor algebrice care descriu comportarea elementelor R, J0, J1, TF şi GY. În mod similar pentru fiecare element C avem, într-o scriere generică

$$\dot{e}_C(t) = \frac{1}{k_C} f_C(t), \tag{5.3.3-b}$$

unde $f_C(t)$ urmează a fi explicitat cu ajutorul ecuațiilor algebrice care descriu comportarea elementelor R, J0, J1, TF şi GY.

Revenind la cazul general neliniar, pentru scrierea ecuațiilor de stare este util ca, mai întâi, să se identifice trei mulțimi de variabile:

a) variabilele de intrare $e(t)$ şi $f(t)$ corespunzătoare surselor de efort şi flux;
b) variabilele p_I şi q_C asociate elementelor I şi respectiv C aflate în cauzalitate integrală (variabilele energiei);
c) variabilele coenergetice f_I şi e_C ale elementelor I şi respectiv C aflate în cauzalitate integrală (variabilele puterii).

Pentru a facilita scrierea ecuațiilor, este adesea util să se scrie aceste variabile lângă legăturile lor de pe bond-graph. Variabilele p_I şi q_C asociate elementelor I si respectiv C aflate în cauzalitate integrală vor apărea scrise lângă bondurile corespunzătoare sub forma derivatelor $\dot{p}_I$ şi $\dot{q}_C$, care sunt eforturi şi fluxuri. Variabilele f_I pentru I şi e_C pentru C asociate cu derivatele $\dot{p}_I$ şi $\dot{q}_C$ pot, sau nu, să fie scrise lângă bondurile corespunzătoare. Ele vor fi eliminate în ecuațiile finale.

Pentru exemplificare, va fi prezentată construirea modelului intrare-stare -ieşire pentru câteva sisteme ale căror bond-graph-uri cauzale au fost deja obținute.

Exemplul 5.3.1.

Se va considera mai întâi, bond-graph-ul din fig 5.2.19.c care corespunde sistemelor reprezentate în figurile 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4 şi 4.5.5, din capitolul precedent, paragraful 4.5.1.

Deoarece bond-graph-ul are o singură sursă, va fi o singură variabilă de intrare şi anume e_1. De asemenea, elementului C în cauzalitate integrală îi corespunde variabila de stare q_2 şi variabila coenergetică e_2, ecuația constitutivă a acestuia fiind:

$$e_2 = \frac{1}{k_C} q_2 .$$

Legile constitutive ale joncțiunii 1 sunt:

$$\dot{q}_2 = f_1 = f_3 ,$$

$$e_1 - e_3 - e_2 = 0 ,$$

din care, relația a doua se poate pune sub forma:

$$e_1 = e_2 + e_3 .$$

Elementul R, aflat în cauzalitate conductivă, are legea constitutivă

$$f_3 = \frac{1}{k_R} e_3 ,$$

din care rezultă, pe baza primei relații constitutive a joncțiunii 1,

$$e_3 = k_R f_3 = k_R \dot{q}_2 .$$

Înlocuind eforturile e_2 şi e_3 date de relațiile anterioare, în legea constitutivă a joncțiunii 1, se obține ecuația de stare în forma (2.3.1):

$$k_R \dot{q}_2 + \frac{1}{k_C} q_2 = e_1 ,$$

care, ca urmare a structurii sistemului, constituie totodată şi un model de tip intrare-ieşire.

Această ecuație de stare este valabilă pentru toate cele cinci sisteme fizice al căror comportament este modelat cu bond-graph-ul cauzal din fig. 5.2.3. Pentru fiecare sistem fizic care are acelaşi bond-graph, parametrii k_R şi k_C au denumiri specifice, iar ecuațiile se scriu în mod corespunzător. Înainte de a proceda la particularizările impuse de fiecare domeniu fizic în parte, atragem atenția asupra faptului că, deoarece ne situăm în cazul liniar, ecuația de descriere a dinamicii poate fi formulată în funcția necunoscută e_2. O astfel de exprimare se poate obține fie substituind $q_2 = k_C e_2$ în ultima relație de mai sus, conducând la:

$$k_R k_C \dot{e}_2 + e_2 = e_1 ,$$

fie pornind direct de la legea constitutivă a elementului C scrisă în variabilele puterii

$$\dot{e}_2 = \frac{1}{k_C} f_2 ,$$

în care se explicitează $f_2 = (1/k_R) e_3 = (1/k_R)(e_1 - e_2)$.

a) Pentru *sistemul electric* din fig. 4.5.1 parametrul k_R este mărimea rezistenței electrice R_e [Ω], iar parametrul $k_C = C_e$ [F] este capacitatea condensatorului. Ecuația de stare capătă forma standard:

$$R_e \dot{q}_2 + \frac{1}{C_e} q_2 = e_1 ,$$

în care q_2 (notat cu q în fig. 4.5.1) este cantitatea de electricitate acumulată de condensator iar e_1 este tensiunea la bornele sursei (notată e în fig. 4.5.1). În cazul sistemelor electrice este preferabil ca variabilele de stare să fie variabilele puterii adică tensiunea pentru elementele C şi intensitatea pentru elementele I. Ținând cont de relația constitutivă a elementului C considerat liniar

$$e_2 = \frac{1}{k_C} q_2 = \frac{1}{C_e} q_2 ,$$

care, prin derivare, conduce la

$$\dot{e}_2 = \frac{1}{k_C} \dot{q}_2 = \frac{1}{C_e} \dot{q}_2 ,$$

ecuația standard de stare se poate scrie sub forma

$$R_e C_e \dot{e}_2 + e_2 = e_1 ,$$

în care e_2 este tensiunea pe condensator. Această formă a ecuației poate fi obținută numai în cazul liniar.

b) Pentru *sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translație* din fig. 4.5.2, $k_R = \gamma [\mathrm{N \cdot s/m}]$ este constanta de amortizare vâscoasă iar $1/k_C = k_e [\mathrm{N/m}]$ este constanta elastică a arcului de compresiune. Ecuația de stare devine:

$$\gamma \dot{x} + k_e x = F ,$$

unde x_2 (notat cu x în fig. 4.5.2) este deplasarea forței F_1 (notată cu F în fig. 4.5.2).

c) Pentru *sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotație* din fig. 4.5.3, $k_R = \gamma_t [\mathrm{N \cdot s/m}]$ este constanta de amortizare vâscoasă la rotație, iar $1/k_C = k_t [\mathrm{N \cdot m/rad}]$ este constanta elastică a arcului de torsiune. Ecuația de stare are forma

$$\gamma_t \dot{\theta}_2 + k_t \theta_2 = M_1 ,$$

unde θ_2 este unghiul cu care momentul M_1 roteşte axul (notat cu M în fig. 4.5.3).

d) Pentru *sistemul hidraulic* din fig. 4.5.4, $k_R = R_f$ [kg/s · m^4] este rezistența fluidică, iar $k_C = C_f$ [m^{4}s^2/kg] este capacitatea fluidică. Ecuația de stare se scrie:

$$R_f \dot{V}_2 + \frac{1}{C_f} V_2 = \Delta P_1 ,$$

unde V este volumul de lichid din rezervor şi ΔP_1 este presiunea de intrare (notate cu V, respectiv ΔP în fig. 4.5.4).

La sistemele hidraulice este preferabil ca variabilele de stare să fie variabilele puterii adică presiunea pentru elementele C şi debitul pentru elementele I. Ecuația de stare poate fi exprimată în raport cu variabilele puterii pe baza relației constitutive a elementului C, considerat liniar,

$$e_2 = \frac{1}{k_C} q_2 = \frac{1}{C_f} q_2 ,$$

care, prin derivare, conduce la

$$\dot{e}_2 = \frac{1}{C_f}\dot{q}_2 .$$

Efectuând substituțiile în ecuația de stare standard se obține o nouă formă a acesteia

$$R_f C_f \dot{e}_2 + e_2 = e_1 ,$$

sau

$$R_f C_f \Delta\dot{P}_2 + \Delta P_2 = \Delta P_1 ,$$

în care ΔP_2 este presiunea la baza rezervorului (elementul C). Această formă a ecuației este valabilă numai pentru cazul liniar. Pentru simplificare se poate renunța la simbolul Δ care arată că este vorba de o diferență de presiune şi, subînțelegând acest lucru, se poate scrie o formă mai simplă a ecuației de stare în variabila presiune

$$R_f C_f \dot{P}_2 + P_2 = P_1 .$$

e) Pentru *sistemul termic* din fig. 4.5.5, $k_R = R_t$ [K/W] este mărimea rezistenței termice, iar $k_C = C_t$ [J/K] este capacitatea termică. Ecuația de stare capătă forma:

$$R_t \dot{Q}_2 + \frac{1}{C_t} Q_2 = \Delta T_1 ,$$

în care Q_2 este cantitatea de căldură acumulată în incintă, iar ΔT_1 este temperatura sursei (notate cu Q, respectiv ΔT în fig. 4.5.5).

La sistemele termice este preferabil, dacă este posibil, ca variabila de stare să fie temperatura. Ținând cont de relația constitutivă a elementului C considerat liniar

$$\Delta T_2 = \frac{Q_2}{C_t} ,$$

care, prin derivare, conduce la

$$\Delta\dot{T}_2 = \frac{\dot{Q}_2}{C_t}$$

şi, substituind în ecuația de stare, se obține

$$R_t C_t \Delta\dot{T}_2 + \Delta T_2 = \Delta T_1 ,$$

unde ΔT_2 este temperatura incintei încălzite. Relația are loc numai pentru cazul liniar.

Exemplul 5.3.2.

Bond-graph-ul din fig. 5.2.20.c corespunde sistemelor reprezentate în figurile 4.5.7, 4.5.8, 4.5.9 şi 4.5.10, din capitolul precedent, paragraful 4.5.2.

La fel ca în exemplul anterior, pentru că bond-graph-ul are o singură sursă, vom avea o singură variabilă de intrare e_1. Deoarece elementul I este în cauzalitate integrală, acestuia îi corespunde variabila de stare p_2 şi variabila coenergetică f_2, ecuația constitutivă fiind:

$$f_2 = \frac{1}{k_I} p_2 .$$

Pentru joncțiunea 1, relațiile constitutive sunt:

$$f_3 = f_1 = f_2 = \dot{q}_2 ,$$

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0 ,$$

din care, relația a doua se poate pune sub forma:

$$e_2 = \dot{p}_2 = e_1 - e_3 .$$

Deoarece elementul R este în cauzalitate rezistivă, are legea constitutivă

$$e_3 = k_R f_3 ,$$

din care rezultă

$$e_3 = k_R f_2 = \frac{k_R}{k_I} p_2 .$$

Ecuația de stare se scrie acum:

$$\dot{p}_2 = -\frac{k_R}{k_I} p_2 + e_1 ,$$

sau, sub forma, (2.3.1):

$$\dot{p}_2 + \frac{k_R}{k_I} p_2 = e_1 ,$$

care, ca urmare a structuri sistemului, constituie totodată şi un model de tip intrare-ieşire.

Această ecuație diferențială modelează comportamentul dinamic al sistemelor fizice din figurile 4.5.7, 4.5.8, 4.5.9 şi 4.5.10, deoarece ea a fost dedusă folosind bond-graph-ul din fig. 5.2.20c care este acelaşi pentru toate cele patru sisteme. Parametrii k_R şi k_I vor căpăta semnificații corespunzătoare tipului de sistem considerat. La fel ca şi în exemplul precedent, datorită liniarității, ecuația de descriere a dinamicii poate fi formulată în funcția necunoscută f_2:

$$k_I \dot{f}_2 + k_R f_2 = e_1 ,$$

folosind cele două procedee arătate în Exemplul 5.3.1.

a) Pentru *sistemul electric* din fig. 4.5.7 parametrul k_R este rezistența electrică R_e [Ω] iar parametrul k_I este inductanța L [H]. Ecuația de stare devine:

$$\dot{\Phi}_2 + \frac{R_e}{L} \Phi_2 = e_1 ,$$

în care Φ_2 este fluxul magnetic acumulat de bobină iar e_1 este tensiunea la bornele sursei (notată e în fig. 4.5.7). Uzual, este preferabil ca variabila de stare să fie intensitatea curentului electric i_2 (notat cu i în fig. 4.5.7). Pentru a scrie ecuația de stare în funcție de intensitate, se face apel la legea constitutivă a bobinei (elementul I) şi la derivata acesteia, care sunt (datorită ipotezei de liniaritate):

$$i_2 = \frac{\Phi_2}{L} = \frac{p_2}{L} ,$$

respectiv,

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\dot{\Phi}_2}{L} = \frac{\dot{p}_2}{L}.$$

Substituind în ecuația de stare, rezultă următoarea ecuație având ca necunoscută intensitatea curentului electric

$$L\frac{di_2}{dt} + R_e i_2 = e_1.$$

b) Pentru *sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translație* din fig. 4.5.8, k_R este constanta de amortizare γ [N·s/m], iar k_I este masa m [kg]. Ecuația de stare se scrie

$$\dot{p}_2 + \frac{\gamma}{m} p_2 = F_1,$$

unde p_2 este impulsul masei m iar F_1 este forța aplicată acesteia de către sursă (notată F în fig. 4.5.8). De obicei, în mecanică, interesează legea de mişcare, adică deplasarea x_2 a masei ca funcție de timp, şi pentru a o determina, se utilizează legea constitutivă a elementului I

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} p_2$$

care, împreună cu ecuația anterioară, formează un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Deoarece ne situăm în cazul liniar, se poate obține o ecuație în variabila viteză v_2 (notată v în fig. 4.5.8), ținând cont că

$$\frac{p_2}{m} = f_2 = v_2,$$

din care rezultă

$$\frac{\dot{p}_2}{m} = \dot{f}_2 = \dot{v}_2.$$

Substituind în ecuația de stare, se obține:

$$m\dot{v}_2 + \gamma v_2 = F_1.$$

c) Pentru *sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotație* din fig. 4.5.9 , k_R este constanta de amortizare γ_t [N·m·s/rad], iar k_I este momentul de inerție principal J [kg·m^2] în raport cu axa de rotație. Ecuația de stare se scrie

$$\dot{L}_2 + \frac{\gamma_t}{J} L_2 = M_1,$$

unde L_2 este momentul cinetic, iar M_1 este momentul aplicat de sursă (notat M în fig. 4.5.9). La fel ca în situația anterioară, pentru a obține legea de mişcare adică rotația θ_2 a masei ca funcție de timp, este necesară utilizarea legii constitutive a elementului I

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{J}\theta_2,$$

care, împreună cu ecuația anterioară, formează un sistem de două ecuații diferențiale.

Pe baza relației constitutive a elementului I şi a derivatei acesteia, se poate obține o ecuație de stare în variabila viteză unghiulară ω_2 (notată ω în fig. 4.5.9). Avem astfel:

$$\frac{L_2}{J} = f_2 = \omega_2$$

şi

$$\frac{L_2}{J} = \dot{f}_2 = \dot{\omega}_2 .$$

Substituind în ecuația de stare, rezultă

$$J\dot{\omega}_2 + \gamma_t \omega_2 = M_1 .$$

d) Pentru *sistemul hidraulic* din fig. 4.5.9, k_R este rezistența fluidică R_f[kg/s·m^4], iar k_I este inductanța fluidică L_f [kg/m^4]. Ecuația de stare se scrie

$$\dot{p}_{P_2} + \frac{R_f}{L_f} p_{P_2} = \Delta P_1 ,$$

unde p_{P_2} este impulsul presiunii pentru fluidul din conductă iar ΔP_1 este presiunea furnizată de sursă (pompă) (notată ΔP în fig. 4.5.10). Deoarece impulsul presiunii nu este o variabilă utilizată curent, se poate trece la variabila debit volumetric Q_2 (notat Q în fig. 4.5.10) folosind legea constitutivă a elementului I

$$Q_2 = \frac{1}{L_f} p_{P_2}$$

şi derivata acesteia, care, având în vedere liniaritatea elementului, este

$$\dot{Q}_2 = \frac{1}{L_f} \dot{p}_{P_2} ,$$

pe care le substituim în ecuația de stare. Rezultă următoarea ecuație în variabila debit volumetric

$$L_f \dot{Q}_2 + R_f Q_2 = \Delta P_1 .$$

Această formă se poate obține numai în cazul liniar.

Exemplul 5.3.3.

Vom considera acum bond-graph-ul din fig. 5.2.21c care corespunde sistemelor din figurile 4.5.12, 4.5.13, 4.5.14 şi 4.5.15, din capitolul precedent, paragraful 4.5.3. Acest bond-graph conține un element I şi un element C în cauzalitate integrală, fapt care arată că, pe baza lui, se vor obține două ecuații de stare care modelează dinamica sistemului. Sistemul are o singură variabilă de intrare şi anume efortul sursei (e_1), două variabile de stare p_2 şi q_3 şi două variabile coenergetice f_2 şi e_3. Legile constitutive ale elementelor I şi C sunt

$$f_2 = \frac{1}{k_I} p_2 ,$$

respectiv

$$e_3 = \frac{1}{k_C} q_3 .$$

Pentru scrierea celor două ecuații de stare, se pleacă de la $\dot{p}_2$ şi $\dot{q}_3$ şi se scriu legile constitutive ale joncțiunii 1:

$$-\dot{p}_2 + e_1 - e_4 - e_3 = 0 ,$$

$$f_4 = f_3 = f_2 .$$

Elementul R este în cauzalitate rezistivă, prin urmare legea constitutivă este:

$$e_4 = k_R f_4 .$$

Relația constitutivă a elementului I se poate scrie în funcție de variabila de stare q_3

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{k_I} p_2 ,$$

ținând cont că $f_2 = f_3 = \dot{q}_3$, obținându-se astfel o primă ecuație de stare.

Cea de a doua ecuație de stare se obține din relația care arată că suma eforturilor pe joncțiunea 1 este nulă, relație în care exprimăm eforturile e_3 şi e_4 în funcție de variabilele de stare p_2 şi q_3, obținând

$$\dot{p}_2 = -\frac{q_3}{k_C} - k_R \frac{p_2}{k_I} + e_1 ,$$

unde s-a ținut cont de faptul că $f_4 = f_2 = (1/k_I) p_2$.

Sistemul de ecuații de stare este

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{k_I} p_2 ,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{q_3}{k_C} - k_R \frac{p_2}{k_I} + e_1 .$$

El poate fi pus sub formă vectorial-matriceală (2.4.3) sau (2.5.2):

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k_I} \\ -\frac{1}{k_C} & -\frac{k_R}{k_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_1 .$$

Acest sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi modelează comportamentul dinamic al sistemelor fizice din figurile 4.5.12, 4.5.13, 4.5.14 şi 4.5.15, el fiind obținut din bond-graph-ul din fig. 5.2.21c care este acelaşi pentru toate cele patru sisteme. Parametrii elementelor capătă semnificații corespunzătoare fiecărui tip de sistem. Liniaritatea dinamicii permite formularea ecuațiilor de stare în funcțiile necunoscute ce reprezintă variabile ale puterii e_3 şi f_2 de forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_3 \\ \dot{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k_C} \\ -\frac{1}{k_I} & -\frac{k_R}{k_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{k_I} \end{bmatrix} e_1 .$$

O astfel de exprimare se poate obține plecând de la descrierea de stare anterioară în funcțiile necunoscute q_3 şi p_2 (reprezentând variabile ale energiei) pe baza relațiilor $q_3 = k_C e_3$ şi $p_2 = k_I f_2$, fie pornind direct de la legile constitutive ale elementelor C si I scrise în variabilele puterii

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{k_C} f_3 ,$$

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{k_I} e_2 ,$$

în care membrii drepți se explicitează adecvat.

a) Pentru *sistemul electric* din fig. 4.5.12, parametrul k_R este rezistența electrică R_e [Ω], parametrul k_I este inductanța bobinei L [H] iar parametrul k_C este capacitatea condensatorului C_e [F]. Sistemul de ecuații de stare capătă forma:

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{L} \Phi_2 ,$$

$$\dot{\Phi}_2 = -\frac{1}{C_e} q_3 - \frac{R_e}{L} \Phi_2 + u_1 ,$$

în care u_1 (notată *e* în fig. 4.5.12) este tensiunea la bornele sursei, iar q_3 şi Φ_2 sunt cantitatea de electricitate acumulată de condensator şi respectiv fluxul magnetic acumulat de bobină.

În baza liniarității se poate trece de la variabila flux magnetic la variabila intensitate a curentului electric i_3 (notată *i* în fig. 4.5.12) pe baza relației constitutive a elementului I şi a derivatei acesteia, care sunt

$$\dot{q}_3 = i_3 = i_2 = \frac{\Phi_2}{L} = \frac{p_2}{L} ,$$

respectiv

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\dot{\Phi}_2}{L} = \frac{\dot{p}_2}{L} .$$

Pentru că variabila q_3 (cantitatea de electricitate acumulată de condensator) nu este o variabilă cu utilizare în aplicații, se poate trece la variabila e_3 (tensiunea la bornele condensatorului) folosind relația constitutivă specifică cazului liniar:

$$e_3 = u_3 = \frac{1}{C_e} q_3 .$$

Prin derivare, se obține:

$$\dot{e}_3 = \dot{u}_3 = \frac{1}{C_e}\dot{q}_3 .$$

Substituind în ecuațiile de stare cele două relații anterioare, se obține sistemul

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{1}{C_e} i_2 ,$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{u_3}{L} - \frac{R_e}{L} i_2 + \frac{u_1}{L} ,$$

care poate fi pusă sub forma matriceală (2.4.3) sau (2.5.2):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_3}{dt} \\ \dfrac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_e} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_e}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_1 .$$

În cazul în care este necesar să se cunoască şi alte variabile decât cele de stare, atunci se pot scrie pentru ele ecuații de ieşire, variabilele necunoscute numindu-se variabile de ieşire. De exemplu, dacă prezintă interes calcularea tensiunii $e_2 = u_2$ aplicată bobinei şi a tensiunii $e_4 = u_4$ aplicată rezistenței, atunci din legea constitutivă a joncțiunii 1 rezultă

$$e_2 = e_1 - e_4 - e_3$$

iar din legea constitutivă a elementului R

$$e_4 = R_e f_4 = R_e \dot{q}_3 = R_e i_2 .$$

Ecuațiile ieşirii se pot scrie acum

$$e_2 = e_1 - R_e i_2 - e_3$$

$$e_4 = R_e i_2$$

sau, sub forma vectorial-matriceală multi-ieşire (2.5.3):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -R_e \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 .$$

b) Pentru *sistemul mecanic cu elemente în mişcare de translație* din fig. 4.5.13, parametrul k_R este constanta de amortizare γ [N·s/m], parametrul $k_C = 1/k_e$ unde k_e [N/m] este constanta elastică a arcului iar parametrul k_I este masa m [kg]. Sistemul de ecuații de stare se scrie

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m} p_2 ,$$

$$\dot{p}_2 = -k_e x_3 - \frac{\gamma}{m} p_2 + F_1 ,$$

unde x_3 (notat x în fig. 4.5.13) este deplasarea forței F_1 (deci şi a masei împreună cu extremitatea arcului şi a amortizorului, notată F în fig. 4.5.13), iar p_2 este impulsul masei.

Dacă se doreşte ca, în locul impulsului, să se determine viteza, atunci, pe baza legii constitutive a elementului I, considerat liniar, se scrie

$$f_2 = \frac{p_2}{k_I} = \frac{p_2}{m},$$

de unde, prin derivare, rezultă

$$\dot{f}_2 = \frac{\dot{p}_2}{m}.$$

Înlocuind în ecuațiile de stare ultimele două relații, rezultă sistemul

$$\dot{x}_3 = v_2,$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{k_e}{m}x_3 - \frac{\gamma}{m}v_2 + \frac{F_1}{m},$$

care se scrie matriceal sub forma (2.4.3) sau (2.5.2):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_3\\ \dot{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k_e}{m} & -\frac{\gamma}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ v_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}F_1.$$

Se mai observă că viteza poate fi obținută şi ca variabilă de ieşire, atunci când se foloseşte prima variantă a sistemului de ecuații de stare, ecuația de ieşire fiind chiar legea constitutivă a elementului I.

Ca variabile de ieşire mai pot fi alese, de exemplu, $e_3 = F_3$ (forța de arc) şi $e_4 = F_4$ (forța din amortizor). Pentru a le determina, se scriu ecuațiile constitutive ale elementelor C şi R:

$$e_3 = k_e q_3$$

$$e_4 = \gamma f_4 = \gamma \dot{q}_3 = \gamma \frac{p_2}{m} = \gamma f_2.$$

c) Pentru *sistemul mecanic cu elemente în mişcare de rotație* din fig. 4.5.14, parametrul k_R este constanta de amortizare γ_t [N·m·s/rad], parametrul $k_C = 1/k_t$ unde k_t [N·m/rad] este constanta elastică a arcului de torsiune, iar parametrul k_I este momentul principal de inerție J [kg·m^2] în raport cu axa de rotație. Sistemul de ecuații de stare se scrie

$$\dot{\theta}_3 = \frac{1}{J}L_2,$$

$$\dot{L}_2 = -k_t\theta_3 + \frac{\gamma_t}{J}L_2 + M_1,$$

unde θ_3 (notat cu θ în fig. 4.5.14) este unghiul de rotație, q_2 este momentul cinetic al masei, iar M_1 (notat M în fig. 4.5.14) este momentul aplicat de sursă.

Dacă se consideră mai util să se determine variabila viteză unghiulară $\omega_2 = \dot{\theta}_3$ în locul momentului cinetic, atunci, dacă elementul I este liniar, se substituie, pe baza legii constitutive a elementului I şi a derivatei acesteia

$$f_2 = \frac{p_2}{J},$$

respectiv

$$\dot{f}_2 = \frac{\dot{p}_2}{J},$$

p_2 ca funcție de f_2, rezultând sistemul

$$\dot{\theta}_3 = \omega_2,$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{k_t}{J}\theta_3 - \frac{\gamma_t}{J}\omega_2 + \frac{M_1}{J},$$

care se scrie matriceal sub forma (2.4.3) sau (2.5.2):

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_t}{J} & -\frac{\gamma_t}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} M_1.$$

Dacă este necesar, pot fi scrise ecuații de ieşire pentru variabile care nu apar în sistemul de ecuații de stare, de exemplu momentul $e_3 = M_3$ care acționează asupra arcului şi momentul $e_4 = M_4$ care acționează asupra amortizorului. Scriind ecuațiile constitutive ale elementelor C şi R se obține sistemul de ecuații de ieşire

$$e_3 = k_t q_3,$$

$$e_4 = \gamma_t f_4 = \gamma_t \dot{q}_3 = \gamma_t \frac{p_2}{J} = \gamma_t f_2,$$

cu forma vectorial-matriceală (2.5.3)

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & \gamma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

d) Pentru *sistemul hidraulic* din fig. 4.5.15, parametrul k_C este capacitatea fluidică C_f [m^4s^2/kg], parametrul k_R este rezistența fluidică R_f [kg/s m^4], iar parametrul k_I este inductanța fluidică L_f [kg/m^4]. Sistemul de ecuații de stare capătă forma

$$\dot{V}_3 = \frac{1}{L_f} p_{P_2},$$

$$\dot{p}_{P_2} = -\frac{1}{C_f} V_3 - \frac{R_f}{L_f} p_{P_2} + \Delta P_1,$$

unde V_3 (notat V în fig. 4.5.15) este volumul de fluid din vas, p_{P_2} este impulsul presiunii fluidului din conductă iar ΔP_1 (notată ΔP în fig. 4.5.15) este presiunea sursei adică a pompei.

Grație liniarității, pe baza legii constitutive a elementului I

$$\dot{V}_3 = Q_3 = Q_2 = \frac{p_{P_2}}{L_f} = \frac{p_2}{L_f}$$

şi a derivatei acesteia

$$\dot{Q}_2 = \frac{\dot{p}_{P_2}}{L_f} = \frac{\dot{p}_2}{L_f},$$

se poate trece de la variabila impulsul presiunii la variabila debit volumic.

Dacă se intenționează exprimarea ecuațiilor de stare în funcție de variabila presiune în locul variabilei volum, atunci se utilizează legea constitutiva a elementului C

$$e_3 = \Delta P_3 = \frac{1}{C_f} V_3,$$

şi derivata sa

$$\Delta\dot{P}_3 = \frac{1}{C_f} \dot{V}_3,$$

care, substituite în ecuațiile de stare, conduc la

$$\Delta\dot{P}_3 = \frac{1}{C_f} Q_2,$$

$$\dot{Q}_2 = -\frac{1}{L_f} \Delta P_3 - \frac{R_f}{L_f} Q_2 + \frac{\Delta P_1}{L_f},$$

care se pot pune sub forma vectorial- matriceală

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{P}_3 \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_f} \\ -\frac{1}{L_f} & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_3 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} \Delta P_1,$$

adică sunt de tipul (2.4.3) sau (2.5.2).

Şi în acest caz se pot scrie ecuații de ieşire dacă, de exemplu, se doreşte determinarea căderii de presiune pe conductă ΔP_2 şi a căderii de presiune pe robinet ΔP_4. Pentru a deduce cele două ecuații de ieşire, se utilizează legea constitutivă a joncțiunii 1 din care rezultă

$$\Delta P_2 = \Delta P_1 - \Delta P_4 - \Delta P_3,$$

şi legea constitutivă a elementului R

$$\Delta P_4 = R_f f_4 = R_f Q_2,$$

putându-se scrie în final relațiile:

$$\Delta P_2 = \Delta P_1 - R_f Q_2 - \Delta P_3,$$

$$\Delta P_4 = R_f Q_2 .$$

Sub formă vectorial-matriceală, acestea se scriu

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -R_f \\ 0 & R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_3 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta P_1 ,$$

adică sunt de tipul (2.5.3). ⊣

5.3.2. Construcţia unui model tip diagramă bloc

Diagrama bloc se obţine din bond-graph-ul sistemului după cum se arată în continuare, ilustrarea aplicării concrete bazându-se pe situaţiile discutate în Exemplul 5.3.4. Se desenează mai întâi un *graf de procesare (preluare) a semnalelor* asociat bond-graph-ului cauzal, în care fiecare bond se separă în două semnale, unul pentru efort şi celalalt pentru flux, iar blocurile de procesare a semnalelor au semnificaţia din limbajul bond-graph. Semnalul efort este înzestrat cu o săgeată situată la capătul dinspre liniuţa cauzală a bondului, iar semnalul flux este înzestrat cu o săgeată situată la capătul opus liniuţei cauzale a bondului. Lângă linia semnalului efort se scrie litera *e* având ca indice numărul bondului, iar lângă linia semnalului flux se scrie litera *f* având ca indice numărul bondului.

Joncţiunile 0 şi 1 se reprezintă prin poligoane prin laturile cărora se conectează semnalele câte unui bond.

Elementele I, C şi R sunt reprezentate prin dreptunghiuri în care se scrie una din literele I, C, respectiv R, având ca indice numărul bondului.

Elementele TF şi GY se reprezintă prin dreptunghiuri în care se scriu literele TF respectiv GY având drept indice cifrele care numerotează cele două bonduri aferente.

Sursele de efort şi sursele de flux se reprezintă prin dreptunghiuri. În interiorul dreptunghiului se scrie simbolul S_e sau S_f sau chiar simbolul efortului sau fluxului cum ar fi *M* pentru un cuplu, *mg* pentru o greutate sau *v* pentru o viteză.

⊢ **Exemplul 5.3.4.**

Pentru exemplificare, se consideră bond-graph-urile din figurile 5.2.19c, 5.2.20c şi 5.2.21c ale căror grafuri de procesare a semnalelor asociate bond-graph-urilor sunt prezentate în figurile 5.3.1, 5.3.2 şi respectiv 5.3.3.

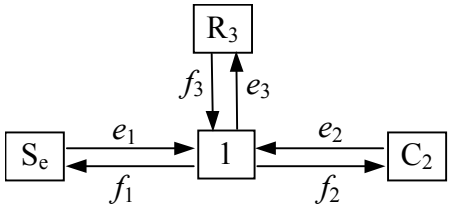


Fig. 5.3.1. Graful de procesare a semnalelor asociat bond-graph-ului din fig. 5.2.19c

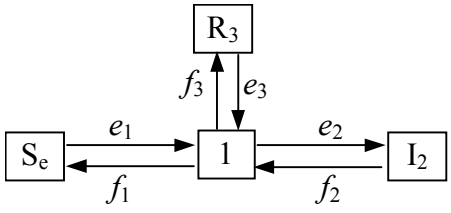


Fig. 5.3.2. Graful de procesare a semnalelor asociat bond-graph-ului din fig. 5.2.20c

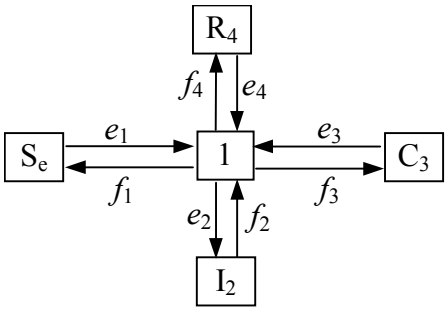


Fig. 5.3.3. Graful de procesare a semnalelor asociat bond-graph-ului din fig. 5.2.21c

Pasul următor constă în construirea unei scheme bloc bazată pe graful de procesare a semnalelor asociat bond-graph-ului. Aceasta are drept principală caracteristică faptul că este constituită numai din *semnale* (eforturi sau fluxuri) care leagă elementele bond-graph şi nu din bonduri ale puterii. În cadrul ei, joncţiunilor 0 şi 1 le corespunde câte o pereche derivaţie-sumator, conform tabelelor 5.1.7 şi 5.1.8. Într-un sumator asociat unei joncţiuni 0 se conectează trei sau mai multe semnale flux dintre care, întotdeauna, numai unul singur "iese" (semnal de ieşire) iar celelalte "intră" (sensul săgeţilor semnalelor flux este preluat din graful asociat). Toate fluxurile care intră într-un sumator capătă, în dreptul lor, câte un semn algebric (plus sau minus) care este semnul din legea constitutivă a joncţiunii (relaţia care exprimă echilibrul de fluxuri în joncţiune) în care s-a izolat într-un membru semnalul flux de ieşire. Fiecărui sumator al unei joncţiuni 0 îi corespunde câte o derivaţie în care "intră" efortul comun al joncţiunii (efortul cauză) şi "ies" toate celelalte eforturi egale cu efortul cauză.

În mod asemănător, fiecărei joncţiuni 1 îi corespunde un sumator în care se conectează, de această dată, trei sau mai multe eforturi dintre care, întotdeauna, unul singur "iese" (semnalul de ieşire) iar celelalte "intră". Sensul săgeţilor semnalelor efort este, de asemenea, preluat din graful de procesare a semnalelor asociat bond-graph-ului. Toate eforturile care "intră" într-un sumator capătă în dreptul lor câte un semn algebric (plus sau minus), semn preluat din legea constitutivă a joncţiunii (relaţie care exprimă echilibrul de eforturi în joncţiune) în care s-a izolat într-un membru semnalul efort de ieşire. Fiecărui sumator al unei joncţiuni 1 îi corespunde o derivaţie în care "intră" fluxul comun al joncţiunii şi "ies" toate celelalte fluxuri egale cu fluxul cauză.

De exemplu, *o formă preliminară a schemei bloc* a grafului de procesare a semnalelor asociat bond-graph-ului din fig. 5.3.1, în realizarea căreia au fost aplicate cele de mai sus, este prezentată în fig. 5.3.4. Semnele algebrice scrise pe semnalele efort care "intră" în sumator rezultă din legea constitutivă a joncţiunii 1

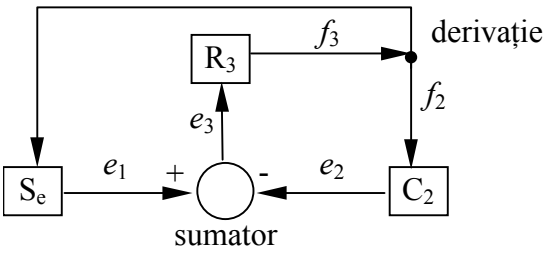


Fig. 5.3.4. Schema bloc preliminară dedusă din graful din fig. 5.3.1.

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0\,,$$

din care, izolând în membrul drept semnalul de ieşire e_3, se obţine

$$e_3 = e_1 - e_2\,,$$

ceea ce arată că semnalul e_1 intră în sumator cu semnul plus iar semnalul e_2 cu semnul minus.

Dacă elementele I şi C au ca semnal de intrare un efort, atunci semnalul de ieşire va fi un flux şi invers. În funcţie de tipul elementului şi de cauzalitatea sa, trecerea de la un tip de semnal la altul se face printr-o integrare (în situaţia cauzalităţii integrale) sau printr-o derivare, (în situaţia cauzalităţii derivative), ambele tipuri de operaţii fiind semnalate grafic în schema bloc propriu-zisă aşa cum se arată în tabelele 5.1.1.a) b) şi 5.1.2.a) b) Aceste operaţii de derivare şi integrare sunt însoţite, în cazul liniar, şi de o înmulţire cu un parametru (k_I, k_C sau inversele lor), operaţie de asemenea semnalată în reprezentarea simbolică din cadrul schemei bloc aşa cum se arată în tabelele 5.1.1.a) şi 5.1.2.a). Se observă că, pentru simplificare, se poate utiliza

reprezentarea integrării (ori derivării) şi a înmulţirii cu un parametru în acelaşi dreptunghi. Dacă este vorba de operaţia de integrare, atunci este necesar să se indice printr-un semnal suplimentar condiţia iniţială. În cazul elementelor liniare de tip R aflate în cauzalitate rezistivă, ele au ca semnal de intrare un flux care, înmulţit cu parametrul elementului, conduce la un semnal de ieşire de tip efort. Dacă elementul liniar R este în cauzalitate conductivă, atunci semnalul de intrare efort este împărţit la parametrul elementului şi conduce la un semnal de ieşire de tip flux. În tabelele 5.1.1.a) b), 5.1.2a) b), şi 5.1.3 a) b), se arată modul de reprezentare grafică în cadrul schemei bloc a acestor trei elemente în toate situaţiile posibile. În tabelul 5.1.4 se arată modul de reprezentare schematizată a surselor în diagramele bloc. În tabelele 5.1.5 şi 5.1.6 se arată modul de reprezentare în diagramele bloc a transformatoarelor şi giratoarelor, iar în tabelele 5.1.7 şi 5.1.8 modul de reprezentare a joncţiunilor.

În scopul realizării unei diagrame bloc conforme cu descrierea generală prezentată în secţiunea 2.7 a Capitolului 2, în locul simbolurilor elementelor (I, C, R, TF, GY etc), se scriu parametrii acestora (k_I, k_C, k_R, k_{TF}, k_{GY}, etc).

De pildă, folosind elementele menţionate până acum, schema bloc preliminară din fig. 5.3.4 (prezentată numai pentru a facilita înţelegerea modului de construire a schemei bloc propriu-zise), capătă aspectul arătat în fig. 5.3.5, care este chiar *schema bloc* a sistemelor ce au bond-graph-ul arătat în fig. 5.2.19.c.

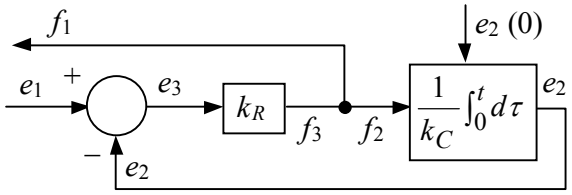


Fig. 5.3.5. Schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.2.19.c

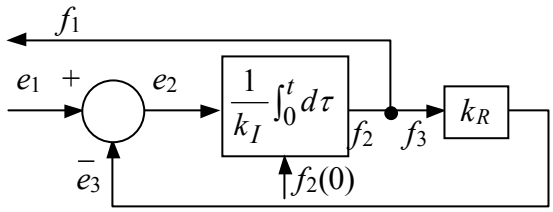


Fig. 5.3.6. Schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.2.20.c

În mod similar, schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.2.20.c este reprezentată în fig. 5.3.6. Semnele algebrice ale eforturilor care "intră" în sumator sunt deduse din legea constitutivă a joncţiunii 1

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0\,,$$

care se scrie

$$e_2 = e_1 - e_3\,,$$

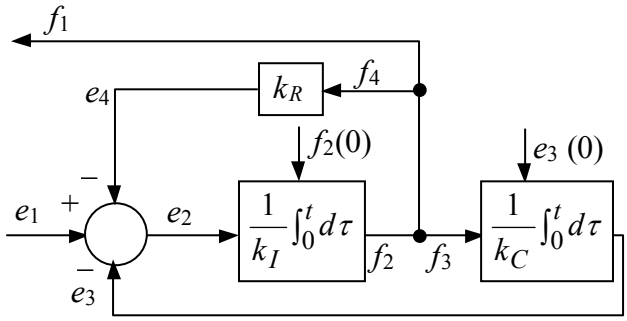


Fig. 5.3.7. Schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.2.21.c

aratând că e_1 capătă semnul plus iar e_3 semnul minus.

Schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.3.3 este arătată în fig. 5.3.7. Semnele algebrice ale eforturilor care "intră" în sumator sunt deduse din legea constitutivă a joncţiunii 1

$$-e_2 + e_1 - e_4 - e_3 = 0\,,$$

care se scrie

$$e_2 = e_1 - e_4 - e_3\,.$$

5.4. Exemple ilustrative de modelare în cazul bond-graph-urilor fără cauzalitate derivativă

Pentru o mai bună înțelegere a modului de construire a bond-graph-ului unui sistem, a modului de scriere a ecuațiilor intrare-stare-ieşire şi a modului de obținere a schemei bloc, cea mai eficientă metodă este considerarea unor noi exemple care să aibă un grad de complexitate mai ridicat. În acest scop, va fi discutată în continuare modelarea câtorva sisteme liniare. Pentru fiecare sistem se va construi bond-graph-ul, se vor scrie ecuațiile de stare, va fi desenată schema bloc, şi va fi studiată comportarea în cazul aplicării unui semnal de tip treaptă. În unele cazuri, pornind de la bond-graph-ul cauzal al sistemului studiat, vor fi prezentate sisteme din alte domenii energetice care au acelaşi bond-graph şi, în consecință, o dinamică echivaletă.

Exemplul 5.4.1.

Se consideră sistemul mecanic din fig.5.4.1. alcătuit dintr-o masă de mărime m care este acționată de o forță $F = F(t)$ şi este prinsă de un amortizor având constanta de amortizare γ , legat la rândul său de un perete fix prin intermediul unui arc de compresiune având constanta elastică k_e.

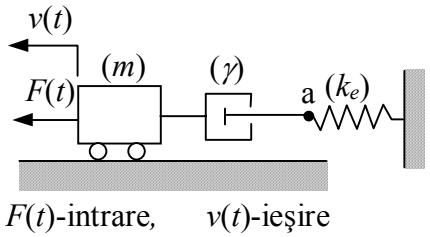


Fig. 5.4.1. Sistem mecanic format din trei elemente legate în serie

Primul pas în construirea bond-graph-ului sistemului constă în determinarea vitezelor importante din sistem cărora le va corespunde câte o joncțiune 1. Se constată că aceste viteze sunt în număr de trei şi anume: viteza masei notată v_m, masă modelată printr-un element inerțial I având parametrul $k_I = m$, această viteză coincizând cu viteza unei extremități a amortizorului modelat printr-un element disipativ R având parametrul $k_R = \gamma$; viteza celeilalte extremități a amortizorului, notată cu v_a, care este şi viteza unui capăt al arcului, arc modelat printr-un element capacitiv C având parametrul $k_C = 1/k_e$; viteza punctului fix de care este prins celălalt capăt al arcului care, evident, are valoarea zero. Forța care acționează asupra masei este modelată printr-o sursă de efort S_e care va avea aceeaşi viteză cu elementul I, iar elementele S_e şi I vor fi conectate la prima joncțiune 1 adică cea corespunzătoare vitezei v_m a masei. Între această joncțiune 1 şi cea de a doua corespunzătoare vitezei v_a a extremității mobile a arcului se introduce o joncțiune 0 care are rolul de a face scăderea între cele două viteze. De această joncțiune 0 se conectează elementul R în a cărui lege constitutivă intervine diferența vitezelor extremităților amortizorului pe care îl modelează. Apoi se introduce o joncțiune 0 între ultimele două joncțiuni 1 de care se conectează elementul C în a cărui lege constitutivă intervine diferența deplasărilor extremităților arcului pe care îl modelează. Se obține bond-graph-ului nesimplificat din fig.5.4.2, în care orientarea bondurilor s-a făcut pe baza faptului că sursa furnizează o putere ce este distribuită către toate celelalte elemente ale sistemului într-un singur sens. Bond-graph-ul se poate simplifica prin îndepărtarea bondului care leagă joncțiunea 1 de viteză nulă de joncțiunea 0 corespunzătoare elementului C (pe ea nu se transmite putere)

şi renunţarea la joncţiunea 1 corespunzătoare vitezei v_a. În acest mod, cele două joncţiuni 0 se contopesc într-una singură, rezultând bond-graph-ul acauzal simplificat din fig. 5.4.3.

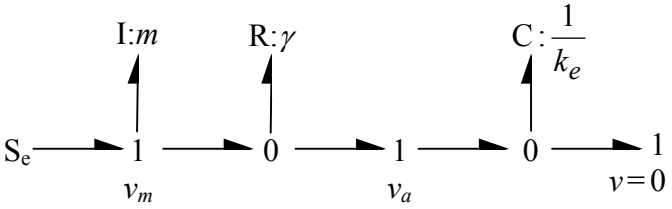


Fig. 5.4.2. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului mecanic din fig. 5.4.1

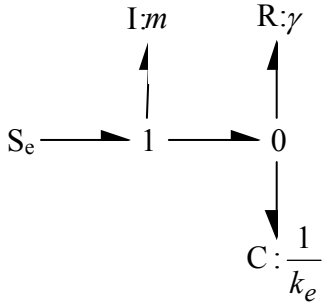


Fig.5.4.3. Bond-graph-ul acauzal simplificat al sistemului mecanic din fig.5.4.1.

Acest bond-graph se poate obţine direct dacă se observă că este necesară numai o singură joncţiune 0 destinată elementului R deoarece ambele extremităţi ale amortizorului se deplasează şi este nevoie de diferenţa vitezelor lor pentru scrierea legii constitutive a elementului; în ceea ce priveşte elementul C, acesta are o extremitate fixă, deci deplasarea celeilalte extremităţi este suficientă pentru a scrie legea constitutivă a acestui element şi, prin urmare, nu este nevoie de încă o joncţiune 0 pentru el. Mai mult, capătul mobil al arcului este legat de o extremitate a amortizorului, deci viteza acestui capăt este tocmai una din vitezele necesare pentru scrierea legii constitutive a elementului R, ceea ce arată că acest element trebuie legat de joncţiunea 0. Judecând astfel, se poate desena direct bond-graph-ul din fig. 5.4.3, simplificarea grafică fiind înlocuită de aprecierea unor aspecte fizice asupra modului în care este construit şi în care funcţionează sistemul. Pentru atribuirea cauzală, se pleacă de la sursa de efort desenând liniuţa cauzală la capătul bondului dinspre joncţiunea 1. Se atribuie apoi cauzalitate integrală elementului I, ceea ce determină aplicarea liniuţei cauzale pe bondul dintre cele două joncţiuni la capătul dinspre joncţiunea 1. Mai departe cauzalitatea nu se propagă şi de aceea, se atribuie elementului C cauzalitate integrală. În aceste condiţii, elementul R capătă cauzalitate rezistivă şi atribuirea cauzală este încheiată. Urmează numerotarea bondurilor şi scrierea parametrilor elementelor în dreptul acestora, între element şi parametru figurându-se semnul două puncte (dacă acest lucru nu s-a făcut deja). În fig.5.4.4. este arătată forma finală a bond-graph-ului cauzal .

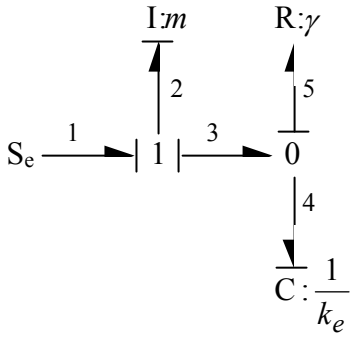


Fig.5.4.4. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig.5.4.1.

Pentru scrierea ecuaţiilor de stare, se stabilesc mai întâi variabilele de intrare şi de stare. Există o variabilă de intrare şi anume efortul furnizat de sursă $e_1 = F(t)$ şi două variabile de stare care sunt p_2 al elementului I şi deplasarea q_4 a elementului C.

Variabila $v(t) = v_1(t) = v_2(t)$ va fi considerată ca variabilă de ieşire.

Elementul I şi elementul C fiind în cauzalitate integrală, rezultă că sistemul de ecuaţii de stare va fi format din două ecuaţii. Variabilele corespunzătoare ale puterii sunt f_2 şi respectiv e_4. Se scriu mai întâi ecuaţiile constitutive ale elementelor I şi C care sunt:

$$f_2 = \frac{p_2}{m},$$

respectiv

$$e_4 = k_e q_4.$$

Relațiile constitutive ale joncțiunii 1 sunt:

$$F(t) - \dot{p}_2 - e_3 = 0,$$

$$f_3 = f_1 = f_2,$$

iar ale joncțiunii 0 sunt:

$$e_3 = e_5 = e_4,$$

$$f_3 - \dot{q}_4 - f_5 = 0.$$

Din relațiile constitutive ale joncțiunilor rezultă o primă formă a ecuațiilor de stare:

$$\dot{p}_2 = F(t) - e_3,$$

$$\dot{q}_4 = f_3 - f_5,$$

de unde

$$\dot{p}_2 = F(t) - k_e q_4,$$

$$\dot{q}_4 = \frac{p_2}{m} - f_5,$$

în care toate variabilele trebuie exprimate în funcție de variabilele de stare.

Pentru a exprima variabila f_5 în funcție de variabilele de stare, folosim legea constitutivă a elementului R

$$e_5 = \gamma f_5,$$

scrisă în forma

$$f_5 = \frac{e_5}{\gamma},$$

din care, ținând cont că $e_5 = e_4$, se obține:

$$f_5 = \frac{k_e}{\gamma} q_4.$$

După efectuarea substituțiilor, ecuațiile de stare capătă forma finală:

$$\dot{p}_2 = F(t) - k_e q_4,$$

$$\dot{q}_4 = \frac{p_2}{m} - \frac{k_e}{\gamma} q_4.$$

Forma matriceală de tipul (2.4.3) a acestei descrieri este:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_e \\ \frac{1}{m} & -\frac{k_e}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

Sistemul fiind considerat liniar se poate trece cu uşurinţă de la variabilele energiei la variabilele puterii, adică la $f_2 = v_2$ şi $e_4 = F_4$ folosind derivatele relaţiilor constitutive ale elementelor I şi C

$$\dot{f}_2 = \frac{\dot{p}_2}{m},$$

respectiv

$$\dot{e}_4 = k_e \dot{q}_4.$$

Ecuaţiile de stare capătă forma:

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{m} F(t) - \frac{1}{m} F_4,$$

$$\dot{F}_4 = v_2 k_e - \frac{k_e}{\gamma} F_4,$$

iar în scriere matriceală de forma (2.4.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} \\ k_t & -\frac{k_e}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

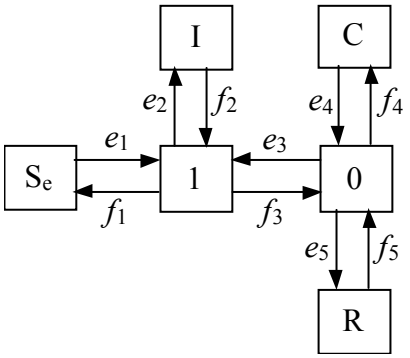


Fig.5.4.5. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.4.

Ecuaţia ieşirii este de forma (2.4.4):

$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_4 \end{bmatrix}.$$

Pentru a obţine schema bloc a sistemului, se va desena mai întâi graful prelucrării de semnal (fig. 5.4.5) asociat bond-graph-ului reprezentat în fig. 5.4.4. Pe baza lui, plecând de la sursă şi considerând câte un sumator şi o derivaţie pentru joncţiunile 1 şi 0, se obţine schema bloc din fig. 5.4.6. Semnele semnalelor incidente în sumatoare rezultă din relaţiile constitutive ale joncţiunilor după izolarea într-un singur membru a semnalului de ieşire din sumator care este e_2 pentru sumatorul joncţiunii 1 şi f_4 pentru sumatorul joncţiunii zero, ceea ce conduce la relaţiile:

$$e_2 = F(t) - e_3$$

şi

$$f_4 = f_3 - f_5.$$

Pe baza analogiilor din Capitolul 4, se constată că acelaşi bond-graph (până la semnificaţia concretă a parametrilor), poate fi asociat unor sisteme fizice de natură energetică diferită dar care au o comportare echivalentă. Astfel, bond-graph-ul din fig.5.4.4. corespunde sistemului mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie din fig.5.4.7., sistemului electric din fig.5.4.8. şi sistemului hidraulic din fig.5.4.9. Evident ecuaţiile de stare deduse anterior sunt

valabile şi pentru aceste sisteme parametrii elementelor fiind înlocuiți corespunzător, la fel ca şi mărimile fizice.

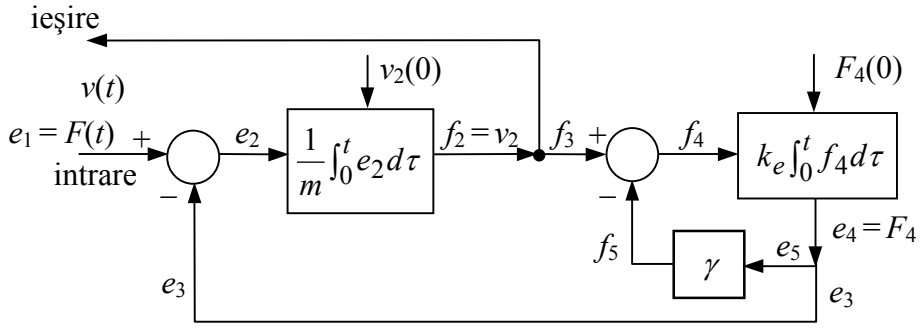


Fig.5.4.6. Schema bloc a sistemului din fig.5.4.1.

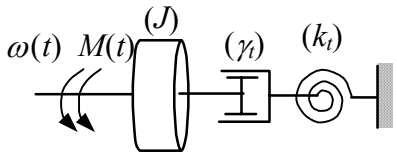


Fig.5.4.7. Sistem mecanic cu elemente în mişcare de rotație al cărui bond-graph este reprezentat în fig. 5.4.4.

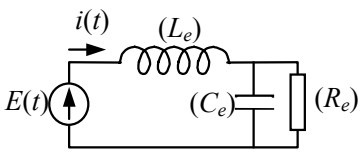


Fig.5.4.8. Sistem electric al cărui bond-graph este reprezentat în fig. 5.4.4.

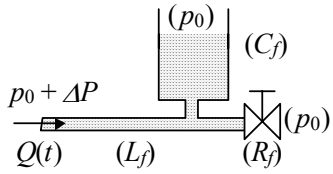


Fig.5.4.9. Sistem hidraulic al cărui bond-graph este reprezentat în fig. 5.4.4.

Se consideră că sistemului mecanic din fig.5.4.1. i se aplică un semnal de intrare de tip treaptă pentru care forța $F(t) = F_s$ este constantă. Pentru a vedea dacă există un regim staționar, se consideră matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{m} \\ k_e & -\dfrac{k_e}{\gamma} \end{bmatrix}$$

din descrierea de stare în variabilele v_2 şi F_4, ale cărei valori proprii sunt date de polinomul caracteristic:

$$s^2 + \frac{k_e}{\gamma} s + \frac{k_e}{m} = 0.$$

Deoarece ambele autovalori au partea reală negativă, se constată că există un regim staționar pentru care variabilele de stare au valorile constante v_{2s} şi F_{4s} şi deci derivatele nule în raport cu timpul. În aceste condiții, descrierea de stare conduce la sistemul algebric:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{m} \\ k_e & -\dfrac{k_e}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2s} \\ F_{4s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F_s .$$

Matricea **A** fiind nesingulară ($\det \mathbf{A} = \frac{k_e}{m} \neq 0$), se pot determina valorile necunoscutelor v_{2s} şi F_{4s} în regim staţionar, rezultând:

$$\begin{bmatrix} v_{2s} \\ F_{4s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} \\ k_e & -\frac{k_e}{\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F_s = -\frac{m}{k_e} \begin{bmatrix} -\frac{k_e}{\gamma} & \frac{1}{m} \\ -k_e & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F_s = \begin{bmatrix} \frac{F_s}{\gamma} \\ F_s \end{bmatrix}.$$

Semnificaţia regimului staţionar constă în deplasare cu viteză constantă de valoare F_s / γ (atât cât permite amortizorul) şi în faptul că forţa elastică din resort şi forţa de frecare din amortizor se menţin constante la valoarea F_s. Recomandăm studierea comportării de regim tranzitoriu în funcţie de valorile coeficienţilor k_e, γ şi m.

Exemplul 5.4.2.

Se consideră sistemul mecanic din fig.5.4.10 compus dintr-o masă de mărime m legată de un punct fix prin intermediul unui amortizor având constanta de amortizare γ_1. Cele două elemente înseriate sunt legate în paralel cu alte două elemente înseriate şi anume un al doilea amortizor având constanta de amortizare γ_2 şi un arc de compresiune având constanta elastică k_e. Masa şi o extremitate a celui de al doilea amortizor sunt acţionate simultan de o forţă $F = F(t)$.

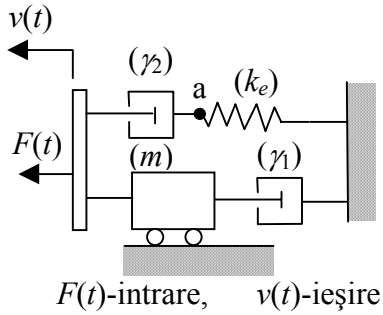


Fig.5.4.10. Sistem mecanic format cu elemente legate în paralel

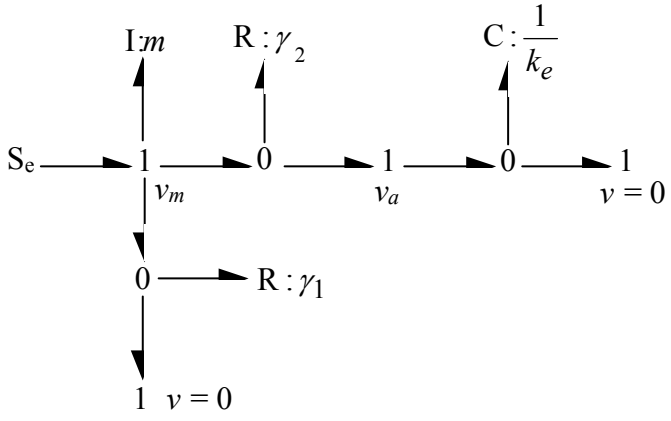


Fig.5.4.11. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului din fig. 5.4.10

Pentru a construi bond-graph-ul sistemului, vom stabili mai întâi vitezele importante din sistem. O primă viteză pentru care considerăm o joncţiune 1 este viteza masei, notată v_m, care este şi viteza câte unei extremităţi a celor două amortizoare. O a doua viteză, notată v_a, pentru care se consideră o joncţiune 1, este viteza extremităţii mobile a arcului de compresiune care este şi viteza unei extremităţi a celui de al doilea amortizor. De asemenea considerăm câte o joncţiune 1 pentru vitezele nule ale punctelor fixe de prindere a arcului de compresiune şi a extremităţii primului amortizor.

Modelând forţa $F = F(t)$ cu o sursă de efort, cele două amortizoare cu câte un element R şi arcul cu un element C şi luând în considerare că puterea furnizată de sursă este distribuită

către toate aceste elemente, se ajunge la bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.11, în care sunt scrişi şi parametrii elementelor.

Bond-graph-ul se poate simplifica foarte mult îndepărtând mai întâi cele două bonduri care conduc la joncţiuni 1 de viteză nulă deoarece prin ele nu se transmite putere iar apoi se renunţă la joncţiunea 0 a elementului R de parametru γ_1 şi la joncţiunea 1 corespunzătoare vitezei v_a. În acest mod, joncţiunile 0 ale elementului R de parametru γ_2 şi a elementului C se contopesc în câte una singură, rezultând, în final, bond-graph-ul acauzal simplificat din fig. 5.4.12.

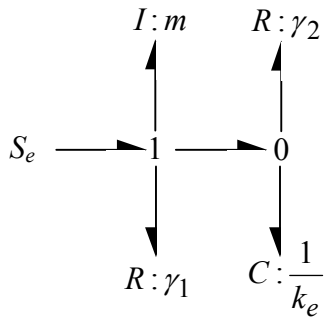


Fig. 5.4.12. Bond-graph-ul acauzal simplificat al sistemului din fig.5.4.10.

Acest bond-graph se poate obţine direct dacă se fac câteva observaţii de ordin funcţional asupra sistemului. Astfel, se constată că este necesară o joncţiune 1 pentru viteza masei şi o joncţiune 0 pentru amortizorul de parametru γ_2 care să modeleze diferenţa dintre vitezele extremităţilor acestuia. Pentru amortizorul de parametru $k_R = \gamma_1$ şi pentru arcul de parametru $k_C = 1/k_e$ nu este necesară o joncţiune 0 pentru că ele au câte o extremitate fixată şi deci, în legile lor constitutive, nu intervin diferenţe între vitezele (respectiv deplasările) extremităţilor. Ele se pot lega direct de joncţiunea 1 şi, corespunzător, de joncţiunea 0.

În continuare trebuie făcută atribuirea cauzală a bondurilor din bond-graph-ul acauzal reprezentat în fig. 5.4.12. Se pleacă de la bondul sursei de efort care aplică un efort joncţiunii 1. Apoi se atribuie cauzalitate integrală elementului I, fapt care conduce la aplicarea liniuţei cauzale în capătul dinspre joncţiunea 1 bondurilor corespunzătoare joncţiunii 0 şi elementului R de parametru γ_1 (fig.5.4.13). Cauzalitatea nu se propagă pe celelalte două bonduri ale joncţiunii 0 şi trebuie impusă cauzalitate integrală elementului C. Acest fapt induce cauzalitate conductivă elementului R şi, cu aceasta, atribuirea cauzală este încheiată, rezultând bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.13 în care s-au numerotat bondurile.

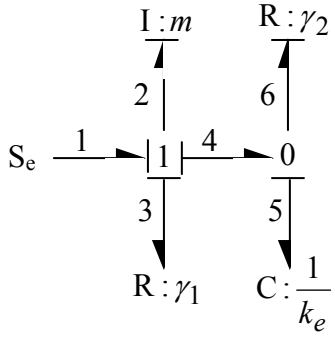


Fig.5.4.13. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig.5.4.10.

Pentru a scrie ecuaţiile de stare, se stabilesc mai întâi variabilele de intrare şi de stare care sunt efortul furnizat de sursă $e_1 = F(t)$, respectiv impulsul p_2 al elementului I şi deplasarea q_5 a elementului C. Se consideră ca variabilă de ieşire viteza $v(t) = v_1(t) = v_2(t)$. Deoarece ambele elemente I şi C din sistem sunt în cauzalitate integrală, vom avea două ecuaţii de stare. Variabilele puterii corespunzătoare acestor elemente sunt fluxul f_2 şi respectiv efortul e_5. Ecuaţiile constitutive ale elementelor I şi C sunt:

$$f_2 = \frac{p_2}{m}$$

şi

$$e_5 = k_e q_5 .$$

În continuare se scriu relațiile constitutive ale joncțiunilor. Pentru joncțiunea 1 acestea sunt:

$$e_1 - \dot{p}_2 - e_3 - e_4 = 0\,,$$

$$f_3 = f_4 = f_1 = f_2\,,$$

iar pentru joncțiunea 0 sunt

$$e_4 = e_6 = e_5\,,$$

$$f_4 - \dot{q}_5 - f_6 = 0.$$

O primă formă a ecuațiilor de stare este:

$$\dot{p}_2 = F(t) - k_e q_5 - e_3\,,$$

$$\dot{q}_5 = \frac{p_2}{m} - f_6.$$

Variabilele e_3 şi f_6 trebuie exprimate în funcție de variabilele de stare pe baza legilor constitutive ale elementelor R, obținându-se:

$$e_3 = \gamma_1 f_2 = \gamma_1 \frac{p_2}{m},$$

şi

$$f_6 = \frac{e_6}{\gamma_2} = \frac{e_5}{\gamma_2} = \frac{k_e}{\gamma_2} q_5.$$

Ecuațiile de stare, capătă, după efectuarea substituțiilor, forma finală:

$$\dot{p}_2 = -\frac{\gamma_1}{m} p_2 - k_e q_5 + F(t)\,,$$

$$\dot{q}_5 = \frac{1}{m} p_2 - \frac{k_e}{\gamma_2} q_5\,,$$

care, matriceal, se scrie sub forma (2.4.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_1}{m} & -k_e \\ \frac{1}{m} & -\frac{k_e}{\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

Cum sistemul este considerat liniar, se poate trece de la variabilele energiei la variabilele puterii, adică la variabilele $f_2 = v_2$ şi $e_5 = F_5$, pe baza derivării relațiilor constitutive ale elementelor I şi C, adică a relațiilor:

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{m} \dot{p}_2\,,$$

respectiv

$$\dot{e}_5 = k_e \dot{q}_5.$$

Efectuând substituțiile corespunzătoare în sistemul de ecuații de stare, se obține sistemul:

$$\dot{v}_2 = -\frac{\gamma_1}{m} v_2 - \frac{1}{m} F_5 + \frac{1}{m} F(t),$$

$$\dot{F}_5 = k_e v_2 - \frac{k_e}{\gamma_2} F_5,$$

care poate fi, la rândul său, pus cu uşurință sub forma matriceală (2.4.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{F}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_1}{m} & \frac{1}{m} \\ -k_e & -\frac{k_e}{\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

Ecuația de ieşire este:

$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_5 \end{bmatrix},$$

adică de forma (2.4.4).

Schema bloc a sistemului se obține începând cu graful prelucrării de semnal reprezentat în fig. 5.4.14 asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.13. În fig. 5.4.15. este reprezentată schema bloc obținută pe baza grafului prelucrării de semnal asociat. Se observă existența câte unei perechi derivație-sumator pentru fiecare joncțiune. Semnele semnalelor incidente în sumatoare rezultă din relațiile constitutive ale joncțiunilor în care se izolează într-un membru semnalul de ieşire care este e_2 pentru joncțiunea 1 şi f_5 pentru joncțiunea 0. Se obțin relațiile:

$$e_2 = e_1 - e_3 - e_4,$$

$$f_5 = f_4 - f_6.$$

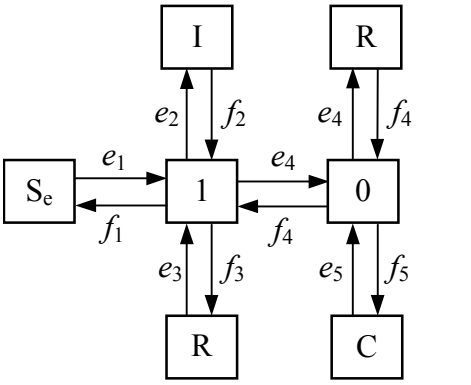


Fig. 5.4.14. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.13

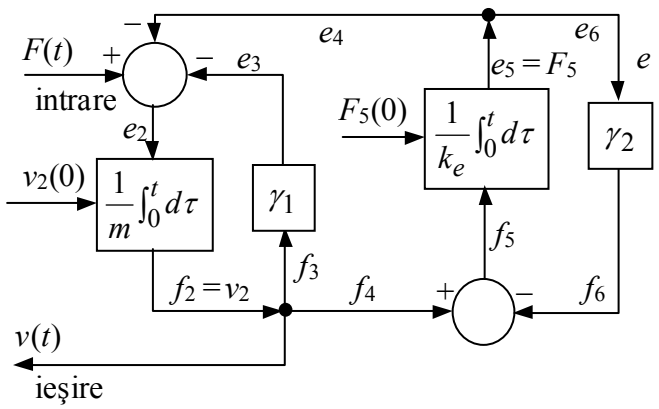


Fig. 5.4.15. Schema bloc a sistemului din fig. 5.4.10

Pentru a evidenția analogiile dintre sistemele fizice evidențiate de metoda bond-graph, se prezintă un sistem mecanic cu elemente în mişcare de rotație (fig. 5.4.16), un sistem

electric (fig.5.4.17) şi un sistem hidraulic (fig. 5.4.18), toate având bond-graph-ul din fig. 5.4.12, diferind numai semnificaţia concretă a parametrilor.

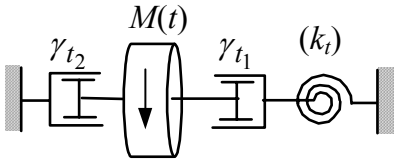


Fig. 5.4.16. Sistem mecanic cu elemente în mişcare de rotaţie care are bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.12

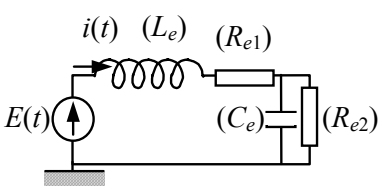


Fig. 5.4.17. Sistem electric având bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.12

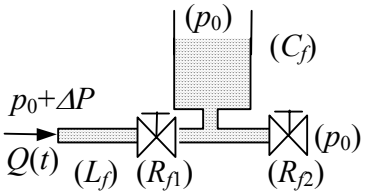


Fig. 5.4.18. Sistem hidraulic având bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.12

Se consideră că sistemul din fig. 5.4.10 este supus acţiunii unui semnal de intrare de tip treaptă, adică forţa $e_1 = F_s$ este constantă. Valorile proprii ale matricei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\gamma_1}{m} & -\dfrac{1}{m} \\ k_e & -\dfrac{k_t}{\gamma_2} \end{bmatrix}$$

din descrierea de stare în variabilele v_2 şi F_5 sunt rădăcinile polinomului caracteristic:

$$s^2 + \left(\frac{\gamma_1}{m} + \frac{k_e}{\gamma_2}\right)s + \frac{\gamma_1 k_e}{m\gamma_2} + \frac{k_e}{m} = 0.$$

Acestea au partea reală negativă ceea ce arată că există un regim staţionar în care variabilele de stare au valorile constante v_{2s} şi F_{5s} şi derivatele în raport cu timpul, nule. Astfel se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\gamma_1}{m} & -\dfrac{1}{m} \\ k_t & -\dfrac{k_e}{\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2s} \\ F_{5s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F_s .$$

Cum matricea **A** este nesingulară $\left(\det \mathbf{A} = \dfrac{\gamma_1}{m\gamma_2} k_e + \dfrac{k_e}{m} \neq 0\right)$, rezultă că valorile necunoscutelor v_{2s} şi F_{5s} în regim staţionar sunt date de:

$$\begin{bmatrix} v_{2s} \\ F_{5s} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\dfrac{\gamma_1}{m} & -\dfrac{1}{m} \\ k_e & -\dfrac{k_e}{\gamma_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F_s = -\frac{m\gamma_2}{k_e(\gamma_1+\gamma_2)} \begin{bmatrix} -\dfrac{k_e}{\gamma_2} & \dfrac{1}{m} \\ -k_e & -\dfrac{\gamma_1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F_s ,$$

adică

$$\begin{bmatrix} v_{2s} \\ F_{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma_1+\gamma_2} F_s \\ \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} F_s \end{bmatrix}.$$

Comentarii similare cu cele de la exemplul 5.4.1 pot fi făcute cu privire la semnificația regimului staționar. Şi în acest caz, recomandăm studierea regimului tranzitoriu.

Exemplul 5.4.3.

Se consideră sistemul mecanic din fig. 5.4.19 format din elemente în mişcare de translație şi anume două mase de mărimi m_1 şi respectiv m_2 legate între ele printr-un amortizor având constanta de amortizare γ, înseriat cu un arc de compresiune având constanta elastică k_{e_2}. Masa m_1 este legată de un punct fix printr-un alt arc de compresiune având constanta elastică k_{e_1}. Masa m_2 este acționată de o forță $F(t)$.

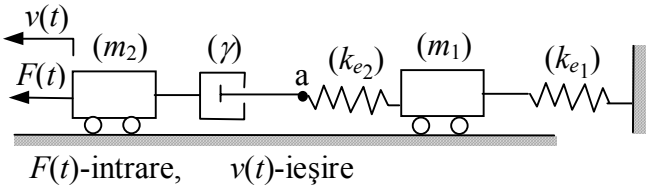


Fig.5.4.19. Sistem mecanic cu elemente în mişcare de translație

Pentru construirea bond-graph-ului sistemului, cele două mase sunt modelate prin elemente I având parametrii $k_I = m_1$ şi respectiv $k_I = m_2$, amortizorul este modelat printr-un element R, având parametrul $k_R = \gamma$ iar cele două arcuri sunt modelate prin elemente C având parametrii $k_C = 1/k_{e_1}$, respectiv $k_C = 1/k_{e_2}$. Pentru viteza notată cu v_1 şi respectiv v_2 a fiecărei mase, în bond-graph se va considera câte o joncțiune 1. Se mai consideră încă o joncțiune 1 pentru viteza notată v_a a punctului de conexiune dintre amortizor şi arcul de constantă elastică k_{e_2}. Nu este necesară o joncțiune 1 pentru punctul fix de viteză nulă întrucât pe bondul corespunzător nu se transmite putere şi joncțiunea 1 respectivă poate fi îndepărtată. Între joncțiunile 1 se inserează câte o joncțiune 0 de care se ataşează elementul R şi respectiv elementul C de parametru $k_C = 1/k_{e_2}$. Bond-graph-ul nesimplificat este arătat în fig. 5.4.20. Sensul semisăgeților se stabileşte foarte uşor, întrucât puterea sursei se distribuie elementelor sistemului într-un singur sens.

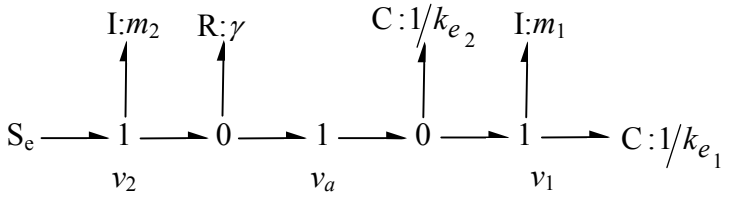


Fig. 5.4.20. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului din fig. 5.4.19

Se observă că, în conformitate cu regulile de simplificare, se poate renunța la joncțiunea 1 corespunzătoare vitezei v_a, ceea ce conduce la unirea celor două joncțiuni 0 în una singură. Se obține astfel bond-graph-ul simplificat din fig. 5.4.21.

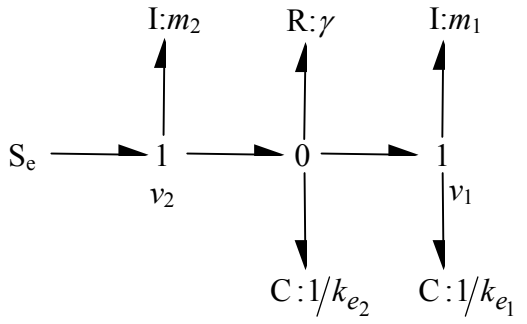


Fig. 5.4.21. Bond-graph-ul acauzal simplificat al sistemului din fig. 5.4.19

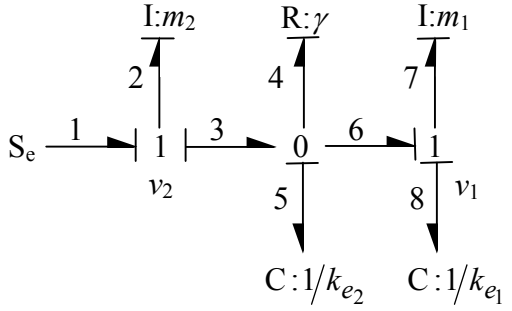


Fig. 5.4.22. Bond-graph-ul cauzal al sistemului mecanic din fig. 5.4.19.

Acum se poate trece la atribuirea cauzalității. Se începe cu sursa de efort care aplică un efort joncțiunii 1, apoi se va atribui cauzalitate integrală elementului I cu parametrul m_2 (fig. 5.4.22). Se introduce astfel cauzalitatea pe bondul dintre joncțiunea 1 corespunzătoare vitezei v_2 şi joncțiunea 0. Se atribuie apoi cauzalitate integrală elementului C cu parametrul $k_C = 1/k_{e_2}$. Acest fapt induce cauzalitate conductivă elementului R şi conduce la atribuirea cauzală a bondului dintre joncțiunea 0 şi joncțiunea 1 corespunzătoare vitezei v_1 (fig. 5.4.22). Cauzalitatea nepropagându-se pe cele două bonduri rămase, se atribuie cauzalitate integrală elementului I cu parametrul m_1 ceea ce induce cauzalitate integrală elementului C cu parametrul $k_C = 1/k_{e_1}$. Atribuirea cauzalității este astfel încheiată urmând numerotarea bondurilor. Se obține bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.22.

Deducerea ecuațiilor de stare se începe prin stabilirea variabilelor de intrare şi a celor de stare. Sistemul are o singură variabilă de intrare şi anume efortul $e_1 = F(t)$. Se consideră ca variabilă de ieşire viteza $v(t) = v_2(t)$. Variabilele de stare sunt variabilele energiei corespunzătoare elementelor I şi C în cauzalitate integrală, adică p_2, q_5, p_7 şi q_8. Vor fi deci patru ecuații de stare. Variabilele puterii corespunzătoare celor patru elemente sunt f_2, e_5, f_7 şi e_8. Ecuațiile constitutive ale elementelor I şi C sunt:

$$f_2 = \frac{p_2}{m_2},$$

$$e_5 = k_{e_2} q_5,$$

$$f_7 = \frac{p_7}{m_1},$$

$$e_8 = k_{e_1} q_8.$$

Relațiile constitutive ale joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei v_2 sunt:

$$e_1 - \dot{p}_2 - e_3 = 0,$$

$$f_3 = f_1 = f_2.$$

Relațiile constitutive ale joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei v_1 sunt

$$e_6 - \dot{p}_7 - e_8 = 0,$$

$$f_6 = \dot{q}_8 = f_7.$$

Relațiile constitutive ale joncțiunii 0 sunt

$$e_3 = e_4 = e_6 = e_5,$$

$$f_3 - f_4 - \dot{q}_5 - f_6 = 0.$$

O primă formă a ecuațiilor de stare este:

$$\dot{p}_2 = F(t) - k_{e_2} q_5,$$

$$\dot{q}_5 = \frac{p_2}{m_2} - f_4 - \frac{p_7}{m_1},$$

$$\dot{p}_7 = k_{e_2} \cdot q_5 - k_{e_1} q_8,$$

$$\dot{q}_8 = \frac{p_7}{m_1}$$

şi se obține pe baza ecuațiilor constitutive ale elementelor I şi C precum şi ale joncțiunilor. Variabila f_4 se poate exprima în funcție de variabilele energiei scriind, mai întâi, ecuația constitutivă a elementului R

$$f_4 = \frac{e_4}{\gamma},$$

după care, ținând cont că

$$e_4 = e_5 = k_{e_2} q_5,$$

se obține

$$f_4 = \frac{k_{e_2}}{\gamma} q_5.$$

Sistemul de ecuații de stare capătă forma finală

$$\dot{p}_2 = -k_{e_2} q_5 + F(t),$$

$$\dot{q}_5 = \frac{1}{m_2} p_2 - \frac{k_{e2}}{\gamma} q_5 - \frac{1}{m_1} p_7,$$

$$\dot{p}_7 = k_{e_2} q_5 - k_{e_1} q_8,$$

$$\dot{q}_8 = \frac{p_7}{m_1},$$

care, matriceal se scrie:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{p}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{e_2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_2} & -\dfrac{k_{e_2}}{\gamma} & -\dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & k_{e_2} & 0 & -k_{e_1} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \\ p_7 \\ q_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

Deoarece sistemului este considerat liniar, se poate trece de la variabilele energiei la cele ale puterii, adică la variabilele $f_2 = v_2$, $e_5 = F_5$, $f_7 = v_7$ şi $e_8 = F_8$, pe baza derivării în raport cu timpul a relațiilor constitutive ale elementelor I şi C, adică a relațiilor

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{m_2}\dot{p}_2,$$

$$\dot{e}_5 = k_{e_2}\dot{q}_5,$$

$$\dot{f}_7 = \frac{1}{m_1}\dot{p}_7,$$

$$\dot{e}_8 = k_{e_1}\dot{q}_8.$$

Efectuând substituțiile corespunzătoare în ecuațiile de stare se obține sistemul

$$\dot{v}_2 = -\frac{1}{m_2}F_5 + \frac{1}{m_2}F(t),$$

$$\dot{F}_5 = k_{e_2}\cdot v_2 - \frac{k_{e_2}}{\gamma}F_5 - k_{e_2}v_7,$$

$$\dot{v}_7 = \frac{1}{m_1}F_5 - \frac{1}{m_1}F_8,$$

$$\dot{F}_8 = k_{e_1}v_7,$$

care are forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{F}_5 \\ \dot{v}_7 \\ \dot{F}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ k_{e_2} & -\dfrac{k_{e_2}}{\gamma} & -k_{e_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_1} & 0 & -\dfrac{1}{m_1} \\ 0 & 0 & k_{e_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_5 \\ v_7 \\ F_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{m_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

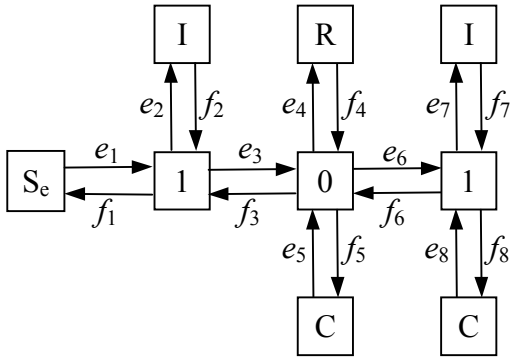


Fig. 5.4.23. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.22.

Ecuația de ieşire este

$$v(t) = v_2(t) = v_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ F_5 \\ v_7 \\ F_8 \end{bmatrix}.$$

Pentru a realiza cu uşurință schema bloc a sistemului, se desenează mai întâi graful prelucrării de semnal (fig. 5.4.23) asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.22.

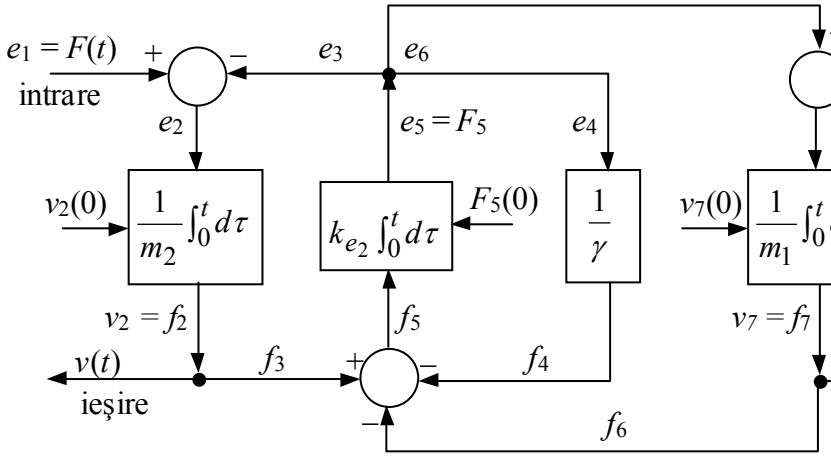


Fig. 5.4.24. Schema bloc a sistemului din fig. 5.4.19.

Plecând de la sursă şi folosind graful asociat se poate desena schema bloc din fig. 5.4.24.

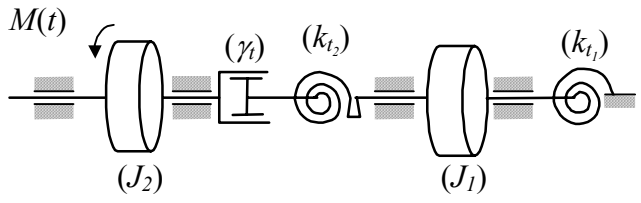


Fig. 5.4.25 Sistem mecanic cu elemente în mişcare de rotație având bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.22.

Semnele din sumatoare rezultă din relațiile constitutive ale joncțiunilor scrise sub forma:

$$e_2 = e_1 - e_3,$$

$$e_7 = e_6 - e_8,$$

$$f_5 = f_3 - f_4 - f_6.$$

Sunt prezentate în continuare trei sisteme fizice şi anume unul mecanic cu elemente în mişcare de rotație (fig. 5.4.25), unul electric (fig. 5.4.26) şi unul hidraulic (fig. 5.4.27) care au acelaşi bond-graph cu sistemul inițial, deosebirile constând numai în semnificația fizică a parametrilor elementelor.

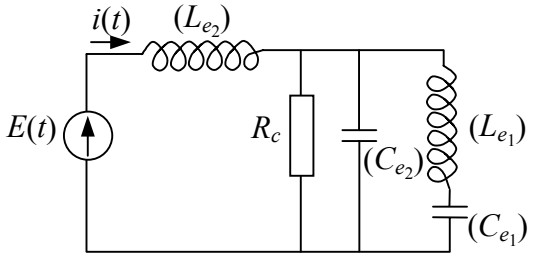


Fig. 5.4.26. Sistem electric care are bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.22.

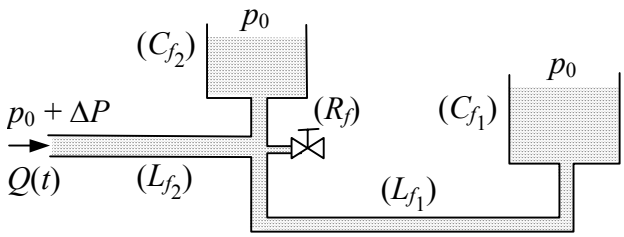


Fig. 5.4.27. Sistem hidraulic care are bond-graph-ul reprezentat in fig. 5.4.22.

Se consideră că se aplică sistemului un semnal treaptă $F(t) = F_s$ constant. Valorile proprii ale matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ k_{e_2} & -\dfrac{k_{e_2}}{\gamma} & -k_{e_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_1} & 0 & -\dfrac{1}{m_1} \\ 0 & 0 & k_{e_1} & 0 \end{bmatrix}$$

sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$s^4 + s^3 \frac{k_{e_2}}{\gamma} + s^2 \left(\frac{k_{e_1}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_1} + \frac{k_{e_2}}{m_2} \right) + s \frac{k_{e_1} k_{e_2}}{m\gamma} + \frac{k_{e_1} k_{e_2}}{m_1 m_2} = 0 .$$

Soluțiile acestei ecuații au partea reală negativă (sunt situate în $\mathbf{C}^-$), după cum s-a arătat în Exemplul 2.9.14 din Capitolul 2, prin aplicarea criteriului Hurwitz. În baza modului de amplasare a valorilor proprii putem afirma că există un regim staționar corespunzător intrării constante F_s, pentru variabilele de stare rezultând următoarele valori constante:

$$v_{2s} = \frac{1}{\gamma_t} F_s ,$$

$$F_{5s} = F_s ,$$

$$v_{7s} = 0 ,$$

$$F_{8s} = F_s .$$

Comentarii similare cu cele de la exemplul 5.4.1 pot fi făcute cu privire la semnificația regimului staționar.

Exemplul 5.4.4.

Se consideră sistemul mecanic din fig. 5.4.28. format dintr-un reductor cu o treaptă care este acționat de un cuplu motor $M_m = M(t)$ şi pune în mişcare de rotație un cilindru având momentul

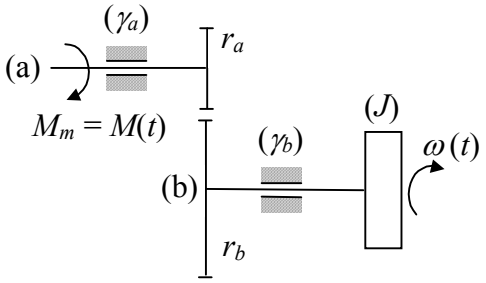


Fig. 5.4.28. Sistem mecanic care conține un element transformator

de inerție J în raport cu axa principală de inerție care coincide cu axa de rotație. S-a considerat că, în lagăre, apar disipări proporționale cu viteza de rotație, coeficientul de proporționalitate fiind γ_a şi respectiv γ_b. Razele celor două roți ale reductorului sunt r_a şi respectiv r_b.

Pentru construirea bond-graph-ului sunt necesare două joncțiuni 1, una pentru viteza de rotație a axului rotit de cuplul $M(t)$ şi cealaltă pentru viteza de rotație a cilindrului, acesta din urmă fiind modelat ca un element inerțial având parametrul $k_I = J$. Angrenajul reductorului este modelat cu un element de tip transformator (TF), el realizând modificarea celor două variabile ale puterii astfel încât puterea transmisă să fie aceeaşi. Dacă se notează cu ω_a viteza unghiulară a primului ax şi cu ω_b a celui de-al doilea, atunci are loc relația cunoscută

$$\omega_a = -\frac{r_b}{r_a}\omega_b ,$$

în care raportul de transmitere este parametrul transformatorului

$$k_{TF} = -\frac{r_b}{r_a} ,$$

iar semnul minus are rolul de a semnala că cele două viteze unghiulare au sensuri opuse. Ținând cont de faptul că puterea transmisă se conservă, fapt care conduce la egalitatea

$$M_a\omega_a = M_b\omega_b ,$$

rezultă

$$k_{TF} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{M_b}{M_a} = -\frac{r_b}{r_a} .$$

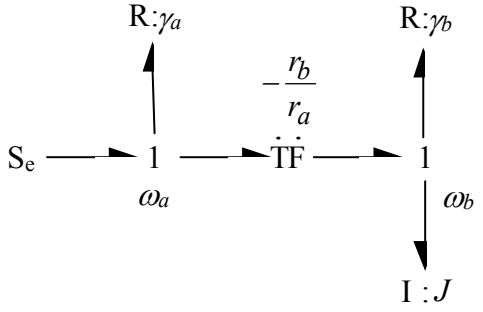


Fig. 5.4.29. Bond-graph-ul acauzal al sistemului mecanic din fig. 5.4.28

Disipările din lagăre se modelează cu două elemente rezistive R având parametrii $k_R = \gamma_a$ şi $k_R = \gamma_b$. Bond-graph-ul acauzal al sistemului este arătat în fig. 5.4.29. Sensurile semisăgeților se stabilesc foarte simplu, deoarece puterea circulă în sensul de la cuplul motor către elementul condus, care este elementul inerțial.

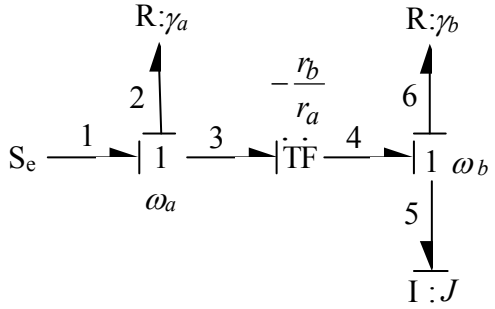


Fig. 5.4.30. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.4.28

Pentru atribuirea cauzală se pleacă de la sursa de moment care aplică un efort către joncțiunea 1. Cauzalitatea nu se propagă mai departe şi, de aceea, se atribuie cauzalitate integrală elementului I (fig. 5.4.30). Acest fapt conduce la propagarea cauzalității pe toate celelalte bonduri, rezultând bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.30 la care s-au numerotat bondurile.

Pentru scrierea ecuației de stare, se observă că există o singură variabilă de intrare $e_1 = M(t)$ şi o singură variabilă de stare p_5.

Ecuația constitutivă a elementului I este

$$f_5 = \frac{p_5}{J} .$$

Ecuațiile constitutive ale joncțiunilor 1 sunt

$$e_4 - e_6 - \dot{p}_5 = 0,$$

$$f_4 = f_6 = f_5,$$

respectiv

$$M(t) - e_2 - e_3 = 0,$$

$$f_2 = f_1 = f_3.$$

Ecuațiile constitutive ale transformatorului sunt

$$f_3 = -\frac{r_b}{r_a} f_4,$$

$$e_4 = -\frac{r_b}{r_a} e_3.$$

O primă formă a ecuației de stare este

$$\dot{p}_5 = e_4 - e_6.$$

Ținând cont de relațiile constitutive ale elementelor R, care sunt

$$e_2 = \gamma_a f_2,$$

respectiv

$$e_6 = \gamma_b f_6,$$

precum şi de celelalte relații constitutive scrise anterior, ecuația de stare se scrie succesiv

$$\dot{p}_5 = -\frac{r_b}{r_a} e_3 - \gamma_b f_6 = -\frac{r_b}{r_a}\left[M(t) - e_2\right] - \gamma_b f_5 = -\frac{r_b}{r_a}\left[M(t) - \gamma_a f_2\right] - \gamma_b \frac{p_5}{J} =$$

$$= -\frac{r_b}{r_a}\left[M(t) - \gamma_a\left(-\frac{r_b}{r_a} f_4\right)\right] - \gamma_b \frac{p_5}{J} = -\frac{r_b}{r_a}\left[M(t) + \gamma_a \frac{r_b}{r_a}\frac{p_5}{J}\right] - \gamma_b \frac{p_5}{J} =$$

$$= -\left[\left(\frac{r_b}{r_a}\right)^2 \gamma_a + \gamma_b\right]\frac{p_5}{J} - \frac{r_b}{r_a} M(t)$$

şi capătă forma finală

$$\dot{p}_5 = -\frac{1}{J}\left[\left(\frac{r_b}{r_a}\right)^2 \gamma_a + \gamma_b\right] p_5 - \frac{r_b}{r_a} M(t).$$

Ecuația poate fi scrisă şi în variabila puterii $f_5 = \omega_5$, folosind derivata în raport cu timpul a relației constitutive a elementului I

$$\dot{f}_5 = \frac{\dot{p}_5}{J},$$

situație în care se obține

$$\dot{\omega}_5 = -\frac{1}{J}\left[\left(\frac{r_b}{r_a}\right)^2 \gamma_a + \gamma_b\right]\omega_5 - \frac{1}{J}\frac{r_b}{r_a}M(t).$$

În vederea desenării schemei bloc, se realizează mai întâi graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului care este arătat în fig. 5.4.31.

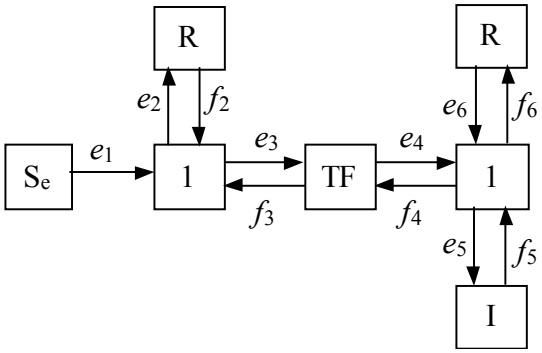


Fig. 5.4.31. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.30.

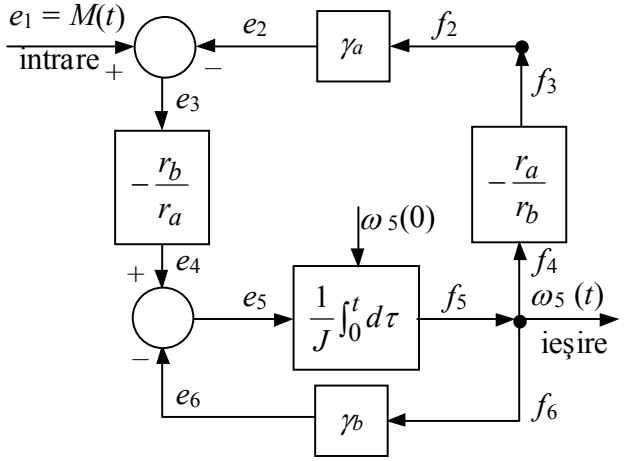


Fig. 5.4.32. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 5.4.28

Schema bloc este reprezentată în fig. 5.4.32, considerând $\omega_5(t)$ drept variabilă de ieşire. Semnele semnalelor incidente în sumatoare rezultă din relațiile constitutive ale joncțiunilor scrise sub forma

$$e_3 = M(t) - e_2,$$

$$e_5 = e_4 - e_6.$$

În cazul în care sistemul mecanic este acționat cu un cuplu constant $e_1 = M_s$, atunci apare un regim staționar de funcționare cu viteza unghiulară constantă $\omega_5 = \omega_s$ de valoare

$$\omega_s = -\frac{r_b/r_a}{(r_b/r_a)^2\gamma_a + \gamma_b}M_s = -\frac{1}{\gamma_a r_b/r_a + \gamma_b r_a/r_b}M_s$$

.

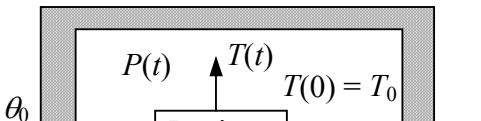


Fig. 5.4.33. Incintă încălzită cu o sursa interioară

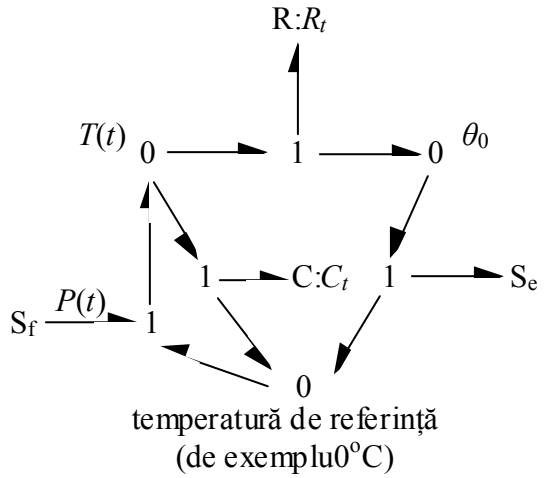


Fig. 5.4.34. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului din fig. 5.4.33.

Exemplul 5.4.5.

Se consideră o incintă încălzită cu un flux termic $P(t)$[W] aşa cum se arată în fig. 5.4.33. Temperatura inițială a incintei este T_0. Incinta se

află într-un mediu ambiant a cărui temperatură θ_0 nu este influențată de încălzirea internă a incintei. O parte din fluxul termic $P(t)$ se acumulează în incintă care are capacitatea termică C_t, iar o altă parte se pierde prin pereții acesteia care au rezistența termică R_t. Acest proces face ca, în incintă, să se realizeze o creştere a temperaturii la valoarea $T(t)$ care este considerată variabilă de ieşire.

Pentru construirea bond-graph-ului, se consideră câte o joncțiune 0 pentru temperaturile $T(t)$ a incintei, θ_0 a mediului în care se află incinta şi 0^oC de referință. Între ele sunt inserate joncțiuni 1 astfel: între joncțiunile 0 corespunzătoare temperaturilor 0^oC şi $T(t)$ sunt două joncțiuni 1, una de care se leagă o sursă de flux S_f care furnizează fluxul termic $P(t)$ şi alta de care se leagă un element capacitiv C având parametrul $k_C = C_t$ corespunzător capacității termice a sursei; între joncțiunile 0 corespunzătoare temperaturilor $T(t)$ şi θ_0 se inserează o joncțiune 1 de care este legat un element rezistiv R având parametrul $k_R = R_t$ corespunzător rezistenței termice a pereților incintei; între joncțiunile 0 corespunzătoare temperaturilor θ_0 şi 0^oC se inserează o joncțiune 1 de care se leagă o sursă de efort S_e care modelează faptul ca mediul absoarbe orice cantitate de flux termic fără a-şi modifica temperatura, ceea ce arată că, de fapt, această sursă face parte din categoria celor care absorb putere şi, prin urmare, săgeata de pe bondul de legătură corespunzător ei va fi orientată către sursă şi nu către joncțiune. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului termic este arătat în fig. 5.4.34.

Pentru a se stabili sensul semisăgeților, se ține cont de faptul că sursa S_f furnizează putere iar sursa S_e, elementul C şi elementul R absorb putere, fapt care determină sensul semisăgeților de pe bondurile corespunzătoare acestor elemente. Ținând cont că fiecare element lucrează la o diferență de temperatură dictată de fenomenul fizic, se pot deduce sensurile semisăgeților pe restul bondurilor. Astfel, notând cu θ_f temperatura pe bondul sursei de flux, cu θ_c temperatura pe bondul elementului C, cu θ_e temperatura pe bondul sursei de efort şi cu θ_R temperatura pe bondul elementului R au loc relațiile:

$$\theta_f = T(t) - 0^\circ,$$

$$\theta_c = T(t) - 0^\circ,$$

$$\theta_e = \theta_0 - 0^\circ,$$

$$\theta_R = T(t) - \theta_0.$$

Scriind acum relațiile constitutive ale joncțiunilor, în care ținem cont că semnul temperaturilor θ_f, θ_c, θ_e şi θ_R este cunoscut din sensul semisăgeților de pe bondurile corespunzătoare acestor temperaturi, se obțin următoarele relații

$$\theta_f - T(t) + 0^\circ = 0,$$

$$-\theta_c + T(t) - 0^\circ = 0,$$

$$-\theta_e + T(t) - 0^\circ = 0,$$

$$-\theta_R + T(t) - 0^\circ = 0,$$

în care semnul "+" se asociază semisăgeților care "intră" în joncțiune iar semnul "–" celor care "ies" din joncțiune. Bond-graph-ul orientat din fig. 5.4.34 poate fi simplificat mai întâi prin îndepărtarea joncțiunii 0 corespunzătoare temperaturii de referință 0^oC şi apoi prin aplicarea regulilor de simplificare cunoscute, în final obținându-se bond-graph-ul simplificat din fig. 5.4.35.

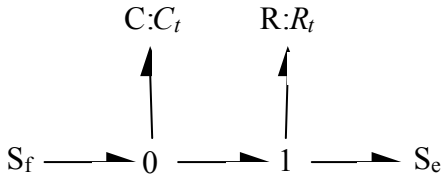


Fig. 5.4.35. Bond-graph-ul acauzal simplificat al sistemului termic din fig. 5.4.33.

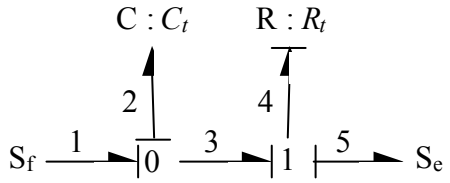


Fig. 5.4.36. Bond-graph-ul cauzal al sistemului termic din fig. 5.4.33.

Pentru atribuirea cauzală, se consideră mai întâi cauzalitatea surselor şi apoi se atribuie cauzalitate integrală elementului C. Cauzalitatea se propagă pe bondul dintre cele două joncțiuni şi, în final, pe bondul elementului R pe baza faptului că între bondurile incidente într-o joncțiune 0 numai unul singur are liniuța cauzală lângă joncțiune iar între bondurile incidente într-o joncțiune 1 numai unul singur nu trebuie să aibă liniuța cauzală lângă joncțiune. În final se numerotează bondurile, rezultând bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.36.

Pentru scrierea ecuației diferențiale ce modelează dinamica sistemului, se stabileşte mai întâi variabila de stare care este temperatura T_2 şi variabila de intrare care este $P(t)$. Ecuațiile constitutive ale elementului C şi ale celor două joncțiuni sunt:

$$\dot{T}_2 = \frac{1}{C_t} P_2 ,$$

$$P(t) - P_2 - P_3 = 0 ,$$

$$T_1 = T_3 = T_2 ,$$

$$P_3 = P_5 = P_4 ,$$

$$T_3 - T_4 - T_5 = 0 ,$$

în care cu P s-a notat fluxul de căldură.

Ținând cont că relația constitutivă a elementului R este

$$P_4 = \frac{1}{R_t} T_4 ,$$

ecuația de stare se scrie succesiv:

$$\dot{T}_2 = \frac{1}{C_t}\left(P(t) - P_3\right) = \frac{1}{C_t}\left(P(t) - \frac{1}{R_t} T_4\right) = \frac{1}{C_t}\left[P(t) - \frac{1}{R_t}\left((T_3 - T_5\right)\right].$$

Cunoscând că $T_3 = T_2 = T_1 = T(t)$ şi că $T_5 = \theta_0$, ecuația de stare capătă forma finală:

$$C_t R_t \dot{T}(t) + T(t) = R_t P(t) + \theta_0 .$$

Pentru a construi schema bloc, se desenează mai întâi graful prelucrării de semnal

asociat bond-graph-ului care este arătat în fig. 5.4.37. Schema bloc a sistemului este desenată în fig. 5.4.38, desemnând ca variabilă de ieşire temperatura $T(t)$.

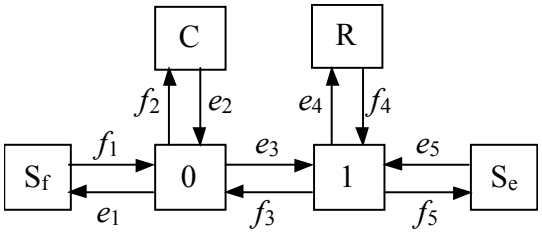


Fig. 5.4.37. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.36

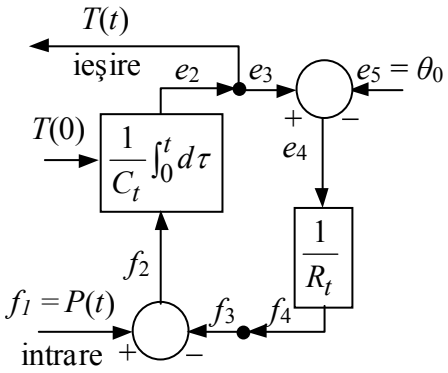


Fig. 5.4.38. Schema bloc a sistemului termic din fig. 5.4.33.

Semnele pe sumatoare se obţin din relaţiile constitutive ale joncţiunilor scrise astfel:

$$P_2 = P(t) - P_3\,,$$

$$T_4 = T_3 - T_5\,,$$

semnele semnalelor fiind preluate de la termenii din dreapta semnului egal.

Se pot imagina circuitul electric reprezentat în fig. 5.4.39 şi sistemul mecanic reprezentat în fig. 5.4.40 care au acelaşi bond-graph ca al sistemului termic. În cazul sistemului mecanic forţa F_0 reprezintă o forţă de frecare de alunecare constantă şi cunoscută care, în timpul mişcării, disipă putere.

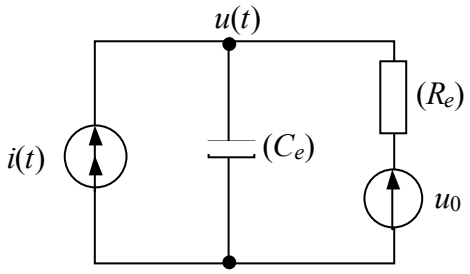


Fig. 5.4.39. Sistemul electric al cărui bond-graph este reprezentat în fig. 5.4.36.

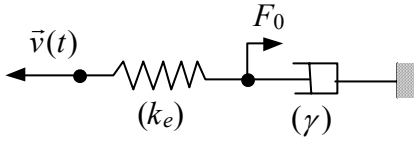


Fig. 5.4.40. Sistemul mecanic al cărui bond-graph este reprezentat în fig. 5.4.36.

Ecuaţia diferenţială dedusă pentru sistemul electric este

$$R_e C_e \dot{u}(t) + u(t) = R_e i(t) + u_0\,,$$

unde $u(t)$ este tensiunea pe condensator, iar pentru sistemul mecanic

$$\dot{F}(t)\gamma / k_e + F(t) = \gamma v(t) + F_0\,,$$

unde $F(t)$ este forţa din arc.

Dacă sistemelor cu comportare echivalentă, de natură termică (fig. 5.4.33), electrică (fig. 5.4.39) sau mecanică (fig. 5.4.40) li se aplică un semnal de tip treaptă adică un semnal constant $P(t) = P_s$, $i(t) = i_s$, sau $v(t) = v_s$, atunci apare un regim staţionar caracterizat de valorile

$$T_s = R_t P_s + \theta_0 ,$$

respectiv

$$u_s = R_e i_s + u_0 ,$$

sau

$$F_s = \gamma v_s + F_0 .$$

Exemplul 5.4.6.

În fig. 5.4.41 sunt reprezentate două sisteme mecanice care conţin pârghii având mase neglijabile şi considerate numai în situaţia în care braţele se rotesc cu unghiuri mici. Conform acestei figuri, vom aborda două variante: **A** – sistemul mecanic nu conţine resort, **B** – sistemul mecanic conţine resort.

(a) **(b)**

Fig. 5.4.41. Sisteme mecanice cu pârghii

Varianta A. Sistemul mecanic din fig. 5.4.41.a este format dintr-o pârghie de gradul unu având lungimile braţelor *a* şi *b*. La un capăt este prinsă o masă *m* iar la celălalt acţionează o forţă *F*(*t*). Studiul dinamicii acestui sistem poate fi făcut în două situaţii şi anume: (i) când forţa de greutate corespunzătoare masei *m* acţionează în plan perpendicular pe planul pârghiei, deci nu se opune acţiunii forţei *F*(*t*) (fig. 5.4.41.a); (ii) când forţa de greutate corespunzătoare masei *m* acţionează în planul vertical al pârghiei şi se opune şi ea acţiunii forţei *F*(*t*) (fig. 5.4.42).

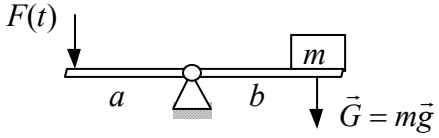


Fig. 5.4.42. Pârghia din fig. 5.4.41 a situată într-un plan vertical.

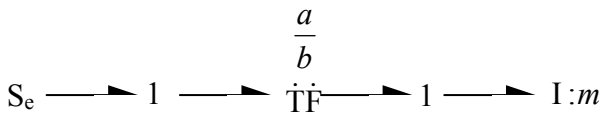


Fig. 5.4.43. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului din fig. 5.4.41a.

Pentru desenarea bond-graph-ului sistemului în cele două situaţii (i) şi (ii), se precizează, mai întâi, că pârghiile se modelează cu elemente de tip transformator (TF), parametrul acestuia fiind raportul braţelor adică

$$k_{TF} = \frac{a}{b} .$$

Se consideră apoi câte o joncţiune 1 pentru viteza fiecărei extremităţi a pârghiei. Forţa *F*(*t*) se modelează cu o sursă de efort S_e, iar masa *m* cu un element inerţial I având parametrul $k_I = m$. Pentru prima situaţie, adică (i) bond-graph-ul nesimplificat al sistemului este reprezentat în fig. 5.4.43. Semnul semisăgeţilor se deduce foarte uşor întrucât puterea furnizată de sursă are un unic sens şi anume către elementul inerţial. Bond-graph-ul se poate simplifica prin

îndepărtarea joncțiunilor 1, rezultând bond-graph-ul din fig. 5.4.44. Atribuirea cauzală conduce la bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.45.

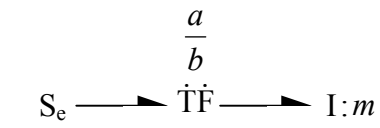


Fig. 5.4.44. Bond-graph-ul acauzal simplificat al sistemului din fig. 5.4.41.a.

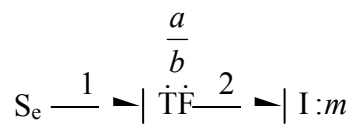


Fig. 5.4.45. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.4.41.a.

Pe baza lui se poate obține ecuația de stare. Variabila de stare este p_2 iar cea de intrare este $F(t)$. Relațiile constitutive ale elementului I şi ale transformatorului sunt:

$$f_2 = \frac{p_2}{m},$$

respectiv

$$\dot{p}_2 = \frac{a}{b} F(t),$$

$$f_1 = \frac{a}{b} f_2.$$

Ecuația de stare este

$$\dot{p}_2 = \frac{a}{b} F(t),$$

care, în cazul liniar, se poate scrie direct în funcție de variabila $v(t) = f_2$ sub forma

$$\dot{v}(t) = \frac{a}{b} \frac{F(t)}{m},$$

obținută pe baza derivatei în raport cu timpul a relației constitutive a elementului I.

În cea de a doua situație (ii), diferența față de prima situație constă în faptul că apare forța de greutate care consumă din puterea sursei pentru a fi deplasată. Această forță se modelează, în acest caz, ca sursă de efort care absoarbe putere, fapt care se observă în bond-graph-ul nesimplificat al acestei situații reprezentat în fig. 5.4.46. După simplificare şi atribuire cauzală, se obține bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.47. Se observă că mai apare o variabilă de intrare şi anume greutatea *mg*.

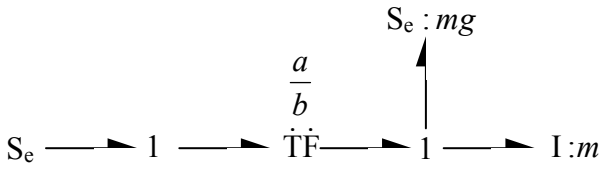


Fig. 5.4.46. Bond-graph-ul nesimplificat al sistemului din fig. 5.4.42.

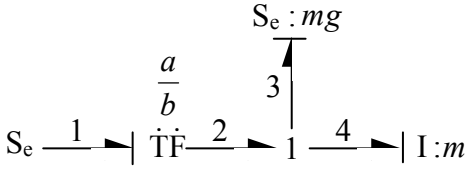


Fig. 5.4.47. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.4.42

Relațiile constitutive ale elementului I şi ale elementului TF sunt

$$f_4 = \frac{1}{m} p_4,$$

respectiv

$$e_2 = \frac{a}{b} F(t),$$

$$f_1 = \frac{a}{b} f_2 .$$

Relațiile constitutive ale joncțiunii 1 sunt:

$$e_2 - e_3 - \dot{p}_4 = 0,$$

$$f_3 = f_2 = f_4,$$

în care p_4 este variabila de stare.

O primă formă a ecuației de stare este

$$\dot{p}_4 = e_2 - e_3,$$

care, după efectuarea substituțiilor corespunzătoare, capătă forma

$$\dot{p}_4 = \frac{a}{b} F(t) - mg .$$

Ea poate fi scrisă şi în funcție de variabila $v_4 = f_4$ pe baza derivatei în raport cu timpul a relației constitutive a elementului I, rezultând

$$\dot{v}_4 = \frac{1}{m} \frac{a}{b} F(t) - g .$$

Modelul astfel obținut este de tip integrator de forma (2.2.1) în care constanta g definește o parte a mărimii de intrare care acționează indiferent de prezența şi expresia forței exterioare $F(t)$.

Un bond-graph la fel cu cel din fig. 5.4.47 îl are şi sistemul mecanic cu scripete din fig. 5.4.48.

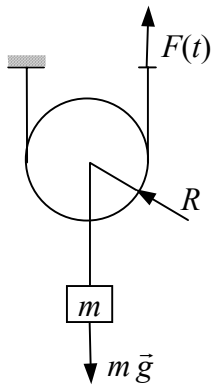


Fig. 5.4.48. Sistemul mecanic având bond-graph-ul din fig. 5.4.47.

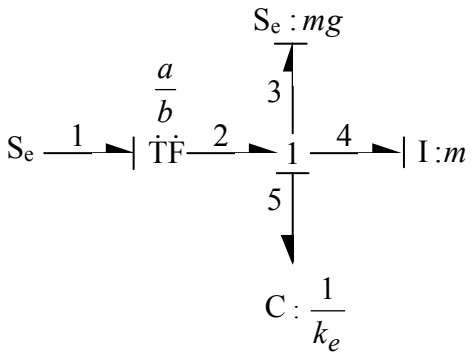


Fig. 5.4.49. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.4.41.b.

De această dată transformatorul modelează scripetele, diferența constând în faptul că parametrul acestuia este

$$k_{TF} = 2,$$

lucru uşor de dedus şi pe baza analogiei dintre lungimile braţelor pârghiei şi distanţele din sistemul cu scripete, adică $a = 2R$ şi $b = R$, unde R este raza scripetelui.

Varianta B. Sistemul mecanic din fig. 5.4.41.b se consideră că se găseşte într-un plan vertical deci acţionează şi forţa de greutate. În capătul pârghiei prevăzut cu masa m se găseşte un arc de compresiune având constanta elastică k_e care va fi modelat cu un element C având parametrul $k_C = 1/k_e$. Bond-graph-ul sistemului se obţine din bond-graph-ul din fig. 5.4.46 la care se conectează de joncţiunea 1 un element C în cauzalitate integrală. Se obţine bond-graph-ul cauzal din fig. 5.4.49. Deoarece un element I şi un element C sunt în cauzalitate integrală, rezultă că sistemul de ecuaţii de stare va conţine două ecuaţii. Variabilele de stare sunt p_4 şi q_5 iar variabila de intrare este $e_1 = F(t)$. Relaţiile constitutive ale elementelor I şi C sunt

$$e_5 = k_e q_5,$$

$$f_4 = \frac{1}{m} p_4.$$

Relaţiile constitutive ale transformatorului sunt

$$e_2 = \frac{a}{b} F(t),$$

$$f_1 = \frac{a}{b} f_2,$$

iar ale joncţiunii 1 sunt:

$$e_2 - mg - \dot{p}_4 - e_5 = 0,$$

$$f_2 = f_3 = \dot{q}_5 = f_4.$$

O primă formă a ecuaţiilor de stare este

$$\dot{p}_4 = e_2 - mg - e_5,$$

$$\dot{q}_5 = f_4.$$

După efectuarea substituţiilor, rezultă forma finală a ecuaţiilor de stare

$$\dot{p}_4 = -k_e q_5 + \frac{a}{b} F(t) - mg,$$

$$\dot{q}_5 = \frac{1}{m} p_4,$$

care, scrisă matriceal, este de forma (2.4.3), cu mărimea de intrare conţinând componenta constantă mg prezentă indiferent de expresia forţei exterioare $F(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_e \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{a}{b} F(t) - mg \right).$$

Ele pot fi exprimate şi în funcţie de variabilele puterii

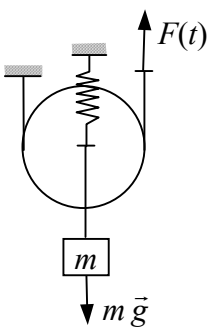


Fig. 5.4.50. Sistem mecanic având bond-graph-ul reprezentat în fig. 5.4.49

$f_4 = v_4$ şi $e_5 = F_5$ folosind derivatele în raport cu timpul ale relațiilor constitutive ale elementelor I şi C. Se obține sistemul

$$\dot{v}_4 = -\frac{1}{m}F_5 + \frac{1}{m}\frac{a}{b}F(t) - g\,,$$

$$\dot{F}_5 = k_e v_4\,,$$

sau, sub formă matriceală,

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_4\\ \dot{F}_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{m}\\ k_e & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_4\\ F_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\left(\frac{1}{m}\frac{a}{b}F(t) - g\right).$$

Un sistem mecanic cu scripeți care are un bond-graph ca cel din fig. 5.4.49 este reprezentat în fig. 5.4.50. Parametrul transformatorului nu mai este aici a/b ci 2, la fel ca în cazul scripetelui prezentat anterior.

Invităm cititorul să studieze comportarea sistemelor discutate în acest exemplu pentru situația când forța exterioară care se aplică are o valoare constantă F_s.

Exemplul 5.4.7.

Acest exemplu este alcătuit din patru cazuri, notate **A**, **B**, **C**, **D**, ce ilustrează principiul de modelare cu ajutorul elementului girator.

Cazul A. Se consideră un sistem fizic format dintr-un conductor sub formă de bară rectilinie având lungimea l, masa m şi rezistența electrică R_e (fig. 5.4.51). Conductorul se poate deplasa prin alunecare cu extremitățile pe două şine metalice orizontale şi paralele în condițiile neglijării frecărilor. Şinele au rezistența electrică neglijabilă. Deplasarea are loc într-un câmp magnetic uniform de inducție B constantă şi orientat perpendicular pe planul în care se găsesc conductorul şi şinele. Şinele se conectează la o sursă ideală de tensiune de mărime $e(t)$ considerată drept mărime de intrare, ceea ce conduce la mişcarea conductorului.

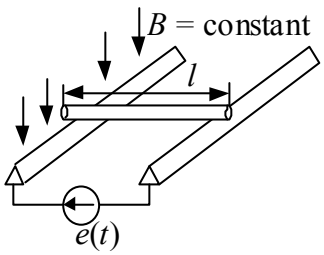


Fig. 5.4.51. Sistem electro-mecanic conținând un girator.

Pentru construirea bond-graph-ului, se observă mai întâi că sistemul are o parte electrică formată din sursa de tensiune şi conductorul de lungime l care formează împreună un circuit al cărui bond-graph nesimplificat are reprezentarea din fig. 5.4.52 şi o parte mecanică a cărei bond-graph nesimplificat este reprezentat în fig. 5.4.53.

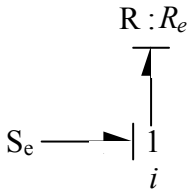


Fig. 5.4.52. Bond-graph-ul circuitului electric din sistemul reprezentat în fig. 5.4.50.

Între cele două subsisteme are loc un transfer de putere în sensul că prin bară apare un curent de intensitate $i(t)$ care determină producerea unei forțe electrodinamice

$$F(t) = Bli(t)\,.$$

ce acționează asupra barei. Acest fapt conduce la deplasarea conductorului cu o viteză $v(t)$ în câmpul magnetic, ceea ce

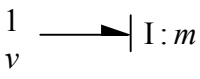


Fig. 5.4.53. Bond-graph-ul părții mecanice din sistemul reprezentat în fig. 5.4.50

determină apariția unei diferențe de potențial între extremitățile barei

$$u(t) = Blv(t)\,.$$

Dacă înmulțim corespunzător cele două relații, atunci rezultă egalitatea între puterea electrică şi cea mecanică de forma

$$F(t)v(t) = u(t)i(t)\,.$$

Aceste observații conduc la ideea cuplării celor două bond-graph-uri ale subsistemelor în unul singur printr-un element girator GY introdus între joncțiunile 1 ale lor, al cărui parametru k_{GY} este

$$k_{GY} = Bl\,.$$

Se obține astfel bond-graph-ul sistemului aşa cum este arătat în fig. 5.4.54. Acest bond-graph poate fi simplificat ca în fig. 5.4.55. Variabila de stare este p_4 iar variabila de intrare este $e_1 = e(t)$.

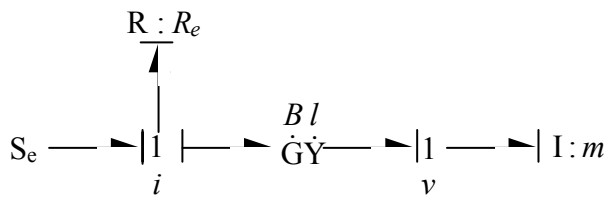


Fig. 5.4.54. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.4.51

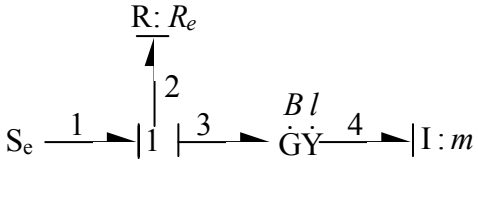


Fig. 5.4.55. Bond-graph-ul cauzal simplificat al sistemului din fig. 5.4.51

Relațiile constitutive ale elementului I şi ale joncțiunii 1 sunt

$$f_4 = \frac{1}{m}p_4\,,$$

respectiv

$$f_3 = f_2\,,$$

$$e(t) - e_2 - e_3 = 0\,.$$

Relațiile constitutive ale elementului GY sunt

$$\dot{p}_4 = Blf_3 = k_{GY}f_3\,,$$

$$e_3 = Blf_4 = k_{GY}f_4\,.$$

Ținând cont şi de relația constitutivă a elementului R

$$f_2 = \frac{1}{R_e}e_2\,,$$

prin substituiri succesive se obține:

$$\dot{p}_4 = k_{GY}f_2 = \frac{k_{GY}}{R_e}e_2 = \frac{k_{GY}}{R_e}\left(e(t) - e_3\right) = \frac{k_{GY}}{R_e}\left(e(t) - k_{GY}f_4\right).$$

Ecuația de stare capătă forma finală

$$\dot{p}_4 = -\frac{(k_{GY})^2}{mR_e} p_4 + \frac{k_{GY}}{R_e} e(t).$$

Se poate trece de la variabila p_4 la variabila $v_4 = f_4$ (care este viteza de deplasare a conductorului) utilizând derivata în raport cu timpul a relației constitutive a elementului I. Se obține:

$$\dot{v}_4 = -\frac{(k_{GY})^2}{mR_e} v_4 + \frac{k_{GY}}{mR_e} e(t).$$

Ambele modele obținute mai sus se pot scrie în maniera (2.3.1), permițând efectuarea unei analize a dinamicii în spiritul celor prezentate în secțiunea 2.3 din Capitolul 2.

În scopul desenării schemei bloc, se construiește mai întâi graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului care este reprezentat în fig. 5.4.56.

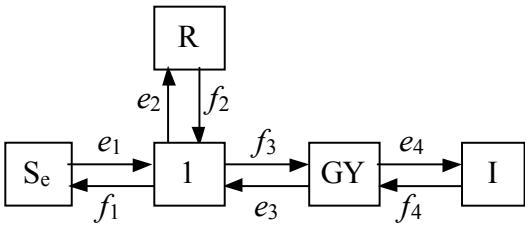


Fig. 5.4.56. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.55

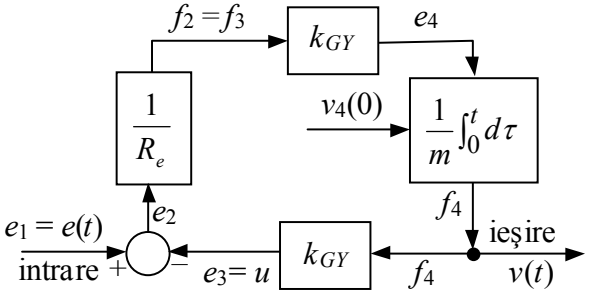


Fig. 5.4.57. Schema bloc a sistemului din fig. 5.4.51.

În fig. 5.4.57 este prezentată diagrama bloc a sistemului. Semnele pe sumator rezultă din relația constitutivă a joncțiunii 1 scrisă sub forma $e_2 = e(t) - e_3$.

Dacă se aplică sistemului un semnal de intrare de tip treaptă adică o tensiune $e(t) = e_s$ constantă, atunci apare un regim staționar caracterizat de o deplasare a conductorului cu viteza constantă $v_4 = v_s$ având mărimea

$$v_s = \frac{e_s}{k_{GY}}.$$

În această situație, tensiunea indusă u are valoarea constantă e_s, ceea ce coduce la dispariția curentului prin bară (adică $e_2 = 0$ şi $f_2 = f_3 = 0$). Astfel, la intrarea în blocul integrator, semnalul este nul ($e_4 = 0$), păstrând ieşirea blocului la valoare constantă.

Cazul B. Se consideră acum acelaşi sistem dar, de această dată bara este acționată de o forță $F(t)$ paralelă cu şinele, iar capetele acestora sunt conectate printr-un fir de rezistență neglijabilă care înlocuieşte sursa de tensiune, aşa cum se arată în fig. 5.4.58. Mărimea de intrare este forța $F(t)$.

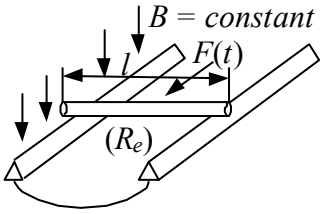


Fig. 5.4.58. Sistemul din fig. 5.4.51 cu mărimea de intrare modificată

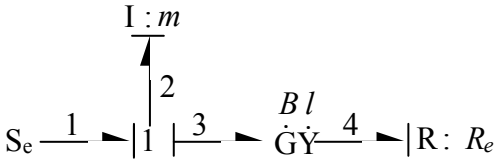


Fig. 5.4.59. Bond-graph-ul cauzal simplificat al sistemului din fig. 5.4.58

Bond-graph-ul acestui sistem este prezentat în fig. 5.4.59.

Variabila de stare este p_2 iar variabila de intrare este $e_1 = F(t)$. Relațiile constitutive ale elementului I, ale joncțiunii 1, ale elementului GY şi ale elementului R sunt

$$f_2 = \frac{1}{m} p_2 ,$$

$$f_3 = f_2 ,$$

$$F(t) - \dot{p}_2 - e_3 = 0 ,$$

$$e_4 = B l f_3 = k_{GY} f_3 ,$$

$$e_3 = B l f_4 = k_{GY} f_4 ,$$

$$f_4 = \frac{1}{R_e} e_4 .$$

Ecuația de stare are o prima formă

$$\dot{p}_2 = F(t) - e_3 ,$$

care, în urma unor substituții succesive, capătă forma finală

$$\dot{p}_2 = -\frac{(k_{GY})^2}{m R_e} \cdot p_2 + F(t) .$$

Ecuația poate fi scrisă în variabila $v_2 = f_2$ rezultând

$$\dot{v}_2 = -\frac{(k_{GY})^2}{m R_e} v_2 + \frac{1}{m} F(t) ,$$

unde v_2 este viteza conductorului care alunecă pe şine.

Drept variabilă de interes putem considera şi diferența de potențial $u = e_4$ care apare între cele două extremități ale barei, ceea ce ne va permite studierea reversibilității fenomenului. În acest caz, modelul este dat de ecuația

$$\dot{u} = -\frac{(k_{GY})^2}{m R_e} u + \frac{k_{GY}}{m} F(t) .$$

Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului este cel din fig. 5.4.60. Schema bloc a sistemului este reprezentat în fig. 5.4.61 desemnând ca mărime de ieşire $e_4 = u$. Semnele de pe sumator rezultă din relația constitutivă a joncțiuni 1 scrisă sub forma

$$e_2 = F(t) - e_3 .$$

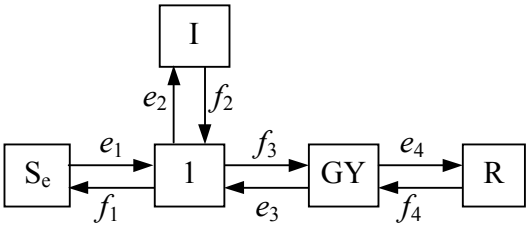


Fig. 5.4.60. Graful prelucrării de semnal asociat bond-graph-ului din fig. 5.4.59

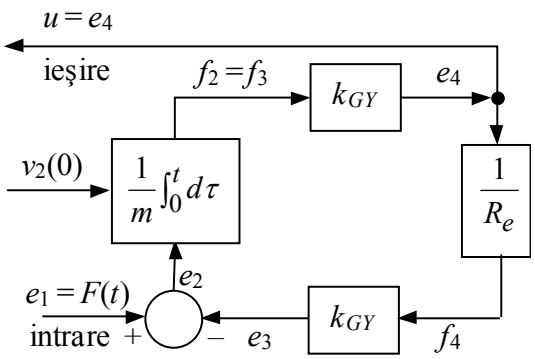


Fig. 5.4.61. Diagrama bloc a sistemului din fig. 5.4.58.

În cazul aplicării unui semnal treaptă adică a aplicării unei forțe $F(t) = F_s$ constante, se instalează un regim staționar când între extremitățile barei apare diferența de potențial constantă

$$u_s = \frac{R_e}{k_{GY}} F_s ,$$

iar bara se deplasează cu viteza constantă

$$v_s = \frac{R_e}{(k_{GY})^2} F_s .$$

Merită de remarcat faptul că utilizarea limbajului bond-graph permite punerea în evidență a reversibilității funcționării prin însăşi prezența elementului diport girator.

Cazul C. Dacă se ia în considerare forța de frecare, notată F_f, dintre conductor şi şine, atunci ea se consideră cunoscută şi este

$$F_f = \mu mg ,$$

unde μ este coeficientul de frecare la alunecare. Această forță de frecare se modelează în bond-graph cu o sursă de efort care absoarbe putere, fapt care este evidențiat prin orientarea semisăgeților de pe bondul corespunzător ei către sursă. Sursa se leagă de joncțiunea 1 în care este conectat şi elementul I, întrucât forța de frecare se deplasează cu viteza acestui element. Pentru sistemul din fig. 5.4.51, bond-graph-ul în care se ia în considerare şi forța de frecare este cel din fig. 5.4.54 la care se adaugă sursa de efort menționată. El este reprezentat în fig. 5.4.62.

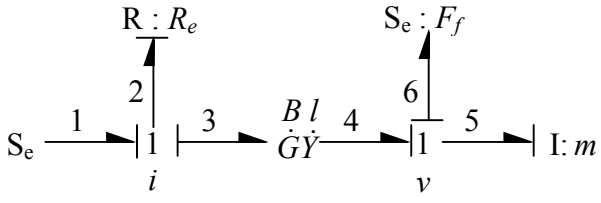


Fig. 5.4.62. Bond-graph-ul sistemului din fig. 5.4.51 considerat cu frecare.

Variabila de stare este p_5 iar drept mărimi cauză acționează $e_6 = F_f$ cu valoare constantă în timp şi $e_1 = e(t)$ care poate depinde de timp. După scrierea ecuațiilor constitutive ale elementelor bond-graph, se ajunge la ecuația diferențială:

$$\dot{p}_5 = -\frac{(k_{GY})^2}{mR_e} p_5 + \frac{k_{GY}}{R_e} e(t) - F_f ,$$

care poate fi scrisă şi în raport cu variabila $v_5 = f_5$, sub forma

$$\dot{v}_5 = -\frac{(k_{GY})^2}{mR_e} v_5 + \frac{k_{GY}}{mR_e} e(t) - \frac{F_f}{m}.$$

Diagrama bloc a sistemului cu frecare este reprezentată în fig. 5.4.63, considerând $v(t) = f_5$ ca variabilă de ieşire.

Dacă se aplică un semnal de intrare de tip treaptă, adică o tensiune $e(t) = e_s$ constantă, atunci apare un regim staționar de funcționare în care viteza barei este constantă şi are valoarea

$$v_s = \frac{e_s}{k_{GY}} - \frac{R_e}{(k_{GY})^2} F_f$$

mai mică decât în cazul în care se neglijează frecarea.

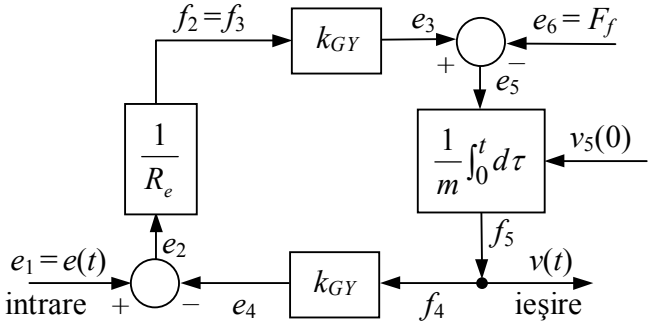
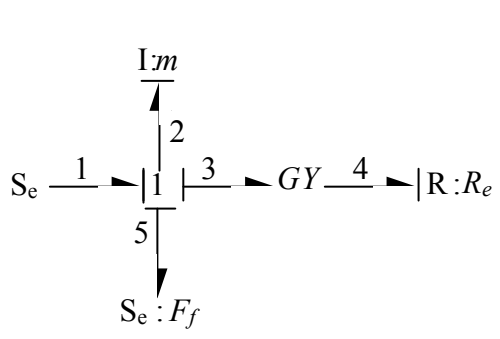
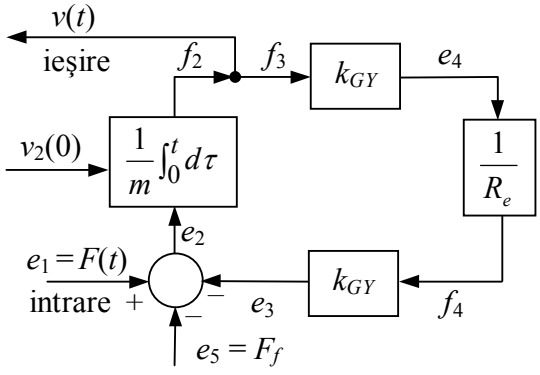


Fig. 5.4.63. Diagrama bloc a sistemului din fig. 5.4.51 considerat cu frecare

Cazul D. Pentru sistemul din fig. 5.4.58, bond-graph-ul în care se ia în considerare şi forța de frecare este cel din fig. 5.4.59 la care se adaugă sursa de efort a forței de frecare. El este reprezentat în fig. 5.4.64.





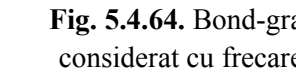


Fig. 5.4.64. Bond-graph-ul sistemului considerat cu frecare din fig. 5.4.58.

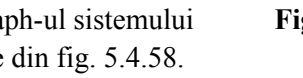


Fig. 5.4.65. Diagrama bloc a sistemului cu frecare din fig. 5.4.58.

Variabila de stare este p_2 iar drept mărimi cauză acționează $e_5 = F_f$ cu valoare constantă în timp şi $e_1 = F(t)$ care poate depinde de timp. După scrierea ecuațiilor constitutive ale elementelor bond-graph, se ajunge la ecuația diferențială:

$$\dot{p}_2 = -\frac{(k_{GY})^2}{mR_e} p_2 + F(t) - F_f ,$$

care poate fi scrisă şi în raport cu variabila $v_2 = f_2$ sub forma

$$\dot{v}_2 = -\frac{(k_{GY})^2}{mR_e} v_2 + \frac{1}{m} F(t) - \frac{1}{m} F_f .$$

Diagrama bloc a sistemului cu frecare este reprezentată în fig. 5.4.65, considerând $v(t) = f_2$ ca variabilă de ieşire.

Dacă se aplică un semnal de intrare de tip treaptă, adică o forță $F(t) = F_s$ *c*onstantă, atunci apare un regim staționar de funcționare în care viteza barei este constantă şi are valoarea

$$v_s = \frac{R_e}{(k_{GY})^2} F_s - \frac{R_e}{(k_{GY})^2} F_f ,$$

mai mică decât în cazul neglijării frecării.

Similar cazului **B** de mai sus, modelul poate fi construit ca o ecuație diferențială în funcția necunoscută $u = e_4$, adică având drept mărime de ieşire diferența de potențial generată între extremitățile barei.

5.5. Construirea modelelor bazată pe bond-graph-uri conţinând cauzalitate derivativă

În decursul atribuirii cauzale apar adesea situații în care, pentru a nu încălca regulile după care se face atribuirea cauzalității, este absolut necesar să se atribuie cauzalitate derivativă unuia sau mai multor elemente de tip I sau C. Acest fapt are implicații nedorite în sensul amplificării dificultăților de rezolvare a sistemului de ecuații care descriu dinamica sistemului fizic. Astfel, variabilele energiei corespunzătoare elementelor I şi C în cauzalitate derivativă nu sunt independente, fapt care conduce la apariția unor relații matematice de tip algebric între aceste variabile şi variabilele de intrare împreună cu variabilele de stare corespunzătoare elementelor I şi C aflate în cauzalitate integrală. În final, sistemul de ecuații care descrie dinamica sistemului este diferențialo-algebric şi rezolvarea lui este, de obicei, mai dificilă.

Să considerăm un sistem fizic care conține n elemente care pot acumula energie (de tip I şi/sau C). În cazul existenței cauzalității derivative în bond-graph-ul asociat sistemului, dacă notăm cu $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^q$ vectorul variabilelor de stare independente ale energiei corespunzând elementelor aflate în cauzalitate integrală, cu $\mathbf{x}_d \in \mathbf{R}^{n-q}$ vectorul variabilelor dependente ale

energiei corespunzând elementelor aflate în cauzalitate derivativă şi cu $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ vectorul variabilelor de intrare, atunci sistemul de ecuații diferențialo-algebric ce descrie dinamica sistemului este

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_d, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{f}_i : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q, \tag{5.5.1}$$

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{f}_d : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{n-q}. \tag{5.5.2}$$

Se observă că modelul la care am ajuns este de tipul (2.6.23) reprezentând o descriere neliniară de stare în forma diferențialo-algebrică. Mai mult chiar, vectorul variabilelor de stare $\mathbf{x}_d$ (care joacă rol de variabile dependente în (2.6.23)) este deja explicitat în raport cu $\mathbf{x}_i$ (care reprezintă variabilele independente) şi mărimile de intrare, adică $\mathbf{x}_d$ este tocmai de forma (2.6.24).

Se remarcă faptul că în ecuațiile diferențiale apar derivatele variabilelor dependente în timp ce în ecuațiile algebrice aceleaşi variabile apar nederivate. Pentru a intra în posesia unei reprezentări de stare explicite, se derivează în raport cu timpul ecuațiile algebrice, ele căpătând forma

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \widetilde{\mathbf{f}}_d(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad \widetilde{\mathbf{f}}_d : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{n-q}, \tag{5.5.3}$$

care coincide cu exprimarea (2.6.25). Se înlocuiesc apoi derivatele $\dot{\mathbf{x}}_d$ în sistemul de ecuații diferențiale de stare rezultând (conform metodei prezentate în paragraful 2.6.3)

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \qquad \hat{\mathbf{f}}_i : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q. \tag{5.5.4}$$

Dacă este posibilă rezolvarea algebrică a acestui sistem în raport cu $\dot{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{R}^q$, atunci el se aduce la forma explicită

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \widetilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \qquad \widetilde{\mathbf{f}}_i : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q, \tag{5.5.5}$$

care coincide cu exprimarea (2.6.27)

O altă cale de rezolvare, ce poate fi uneori convenabilă mai ales atunci când este nevoie de informații şi despre variabilele $\mathbf{x}_d$, constă în aducerea la forma explicită a sistemului de ecuații

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_d, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{f}_i : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q, \tag{5.5.6}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \widetilde{\mathbf{f}}_{d_1}(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j), \qquad \widetilde{\mathbf{f}}_d : \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{n-q}, \tag{5.5.7}$$

care, rezolvat algebric în raport cu $\dot{\mathbf{x}} = \left[\dot{\mathbf{x}}_i{}^T \; \dot{\mathbf{x}}_d{}^T\right]^T \in \mathbf{R}^n$, conduce la sistemul de ecuații diferențiale

$$\dot{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{f}} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n, \tag{5.5.8}$$

ce este tocmai de forma (2.6.29) comentată în paragraful 2.6.3.

Un alt aspect negativ al existenței cauzalității derivative constă în faptul că poate conduce la apariția unor probleme în cadrul simulării pe baza schemei bloc datorită blocurilor de derivare numerică care, în foarte multe cazuri, introduc erori majore. Pentru aceste situații

există posibilitatea de a ameliora rezultatele aşa după cum se va arăta în Capitolul 8, Exemplul 8.4.2. în contextul utilizării schemelor bloc pentru simulare în mediul MATLAB-SIMULINK.

Exemplul 5.5.1.

Se consideră sistemul mecanic din fig. 5.5.1. compus dintr-un reductor cu o treaptă care are prins coaxial cu arborele de intrare un cilindru având momentul de inerţie J_a în raport cu axa principală centrală de inerţie notată (a) care coincide cu axa de rotaţie şi, de asemenea, are prins coaxial cu arborele de ieşire un alt cilindru având momentul de inerţie J_b în raport cu axa principală centrală de inerţie notată (b) care coincide cu axa de rotaţie.

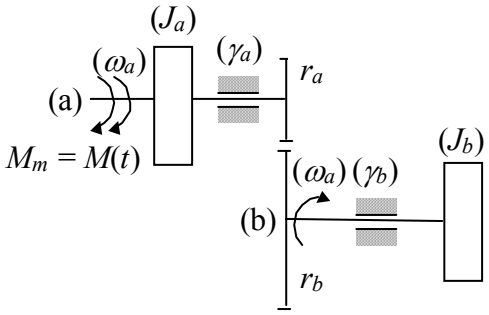


Fig. 5.5.1. Sistem mecanic al cărui bond-graph conţine cauzalitate derivativă

Se consideră că există pierderi prin frecare în cele două lagăre proporţionale cu vitezele de rotaţie ω_a şi ω_b ale celor doi arbori, coeficienţii de proporţionalitate fiind γ_a şi respectiv γ_b. Razele celor două roţi ale reductorului sunt r_a şi r_b. Sistemul este acţionat de un cuplu motor $M_m = M(t)$.

Acest sistem este asemănător cu cel din fig. 5.4.28, (Exemplul 5.4.4) singura deosebire constând în adăugarea elementului inerţial având momentul de inerţie J_a. Această observaţie conduce la concluzia că bond-graph-ul său acauzal, reprezentat în fig. 5.5.2, va conţine în plus faţă de bond-graph-ul acauzal din fig. 5.4.29, un element inerţial I, având parametrul $k_I = J_a$, conectat la joncţiunea 1 corespunzătoare vitezei unghiulare ω_a.

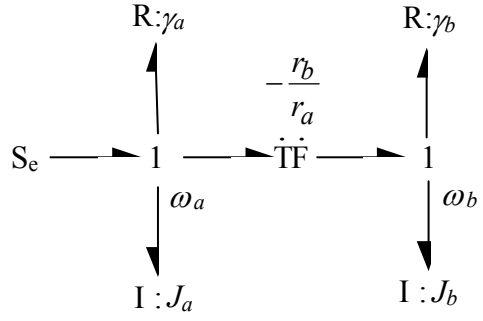


Fig. 5.5.2. Bond-graph-ul acauzal al sistemului din fig. 5.5.1.

Atribuirea cauzală începe de la sursa de efort S_e şi, pentru a continua, este necesar să considerăm elementul I având parametrul J_a în cauzalitate integrală. Acest fapt determină inducerea cauzalităţii pe toate celelalte bonduri, rezultând bond-graph-ul cauzal din fig. 5.5.3. Elementul inerţial I având parametrul J_b capătă, în mod automat, cauzalitate derivativă. Întrucât există un unic element I în cauzalitate integrală, înseamnă că vom avea o singură ecuaţie de stare dar, pentru că există şi un element I în cauzalitate derivată, va mai exista şi o ecuaţie algebrică.

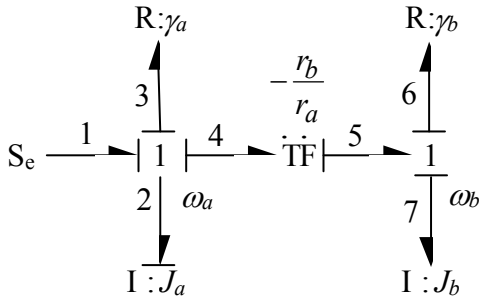


Fig. 5.5.3. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.5.1 cu I_2 în cauzalitate integrală şi I_7 în cauzalitate derivată

Variabila $e_1 = M_m = M(t)$ este unica variabilă de intrare iar variabila p_2 este unica variabilă de stare. Datorită liniarităţii se poate alege ca variabilă de stare viteza unghiulară $\omega_b = \omega(t) = f_7$ în locul lui p_2. Ecuaţia

constitutivă a elementului I_2 în cauzalitate integrală este:

$$f_2 = \frac{p_2}{J_a}.$$

Ecuațiile constitutive ale joncțiunilor sunt

$$M(t) - e_3 - \dot{p}_2 - e_4 = 0,$$

$$f_1 = f_3 = f_4 = f_2,$$

pentru

$$e_5 - e_6 - e_7 = 0,$$

$$f_7 = f_6 = f_5.$$

Ecuațiile constitutive ale transformatorului sunt

$$f_5 = -\frac{r_a}{r_b} f_4,$$

$$e_4 = -\frac{r_a}{r_b} e_5,$$

iar ale elementelor R sunt

$$e_3 = \gamma_a f_3,$$

$$e_6 = \gamma_b f_6.$$

O primă formă a ecuației de stare este

$$\dot{p}_2 = M(t) - e_3 - e_4 = M(t) - \gamma_a f_3 + \frac{r_a}{r_b} e_5 = M(t) - \gamma_a f_2 + \frac{r_a}{r_b}(e_6 + e_7) =$$

$$= M(t) - \gamma_a \frac{p_2}{J_a} + \frac{r_a}{r_b}(\gamma_b f_6 + \dot{p}_7) = M(t) - \gamma_a \frac{p_2}{J_a} + \frac{r_a}{r_b}\left[\gamma_b\left(-\frac{r_a}{r_b}\right)\frac{p_2}{J_a} + \dot{p}_7\right] =$$

$$= M(t) - \left[\gamma_a + \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2 \gamma_b\right]\frac{p_2}{J_a} + \frac{r_a}{r_b}\dot{p}_7.$$

Variabila p_7 trebuie exprimată în funcție de variabila de stare p_2, fapt care se realizează pe baza relației constitutive

$$p_7 = J_b f_7.$$

Folosind celelalte relații constitutive pentru a exprima variabila f_7 în funcție de variabila de stare p_2, se obține

$$p_7 = J_b\left(-\frac{r_a}{r_b}\right) f_4 = \frac{J_b}{J_a}\left(-\frac{r_a}{r_b}\right) p_2,$$

adică ecuația algebrică care, prin derivare, permite eliminarea din ecuația de stare a derivatei $\dot{p}_7$. Rezultă

$$\dot{p}_7 = \frac{J_b}{J_a}\left(-\frac{r_a}{r_b}\right)\dot{p}_2 ,$$

ceea ce conduce, după efectuarea substituției, la următoarea formă finală a ecuației de stare

$$\left[1+\frac{J_b}{J_a}\left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2\right]\dot{p}_2 + \frac{1}{J_a}\left[\gamma_a + \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2 \gamma_b\right] p_2 = M(t) .$$

Această ecuație poate fi scrisă şi în variabila $f_7 = \omega_b(t) = \omega(t)$, caz în care capătă forma

$$\left(\frac{r_b}{r_a}J_a + \frac{r_a}{r_b}J_b\right)\dot{\omega}(t) + \left(\gamma_a \frac{r_b}{r_a} + \gamma_b \frac{r_a}{r_b}\right)\omega(t) = -M(t) .$$

Un aspect demn de remarcat este faptul că, la fel de bine, se poate atribui cauzalitate integrală elementului I_7 având parametrul J_b, ceea ce induce cauzalitate derivativă elementului I_2 având parametrul J_a.

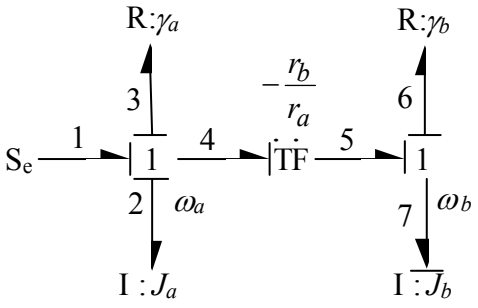


Fig. 5.5.4. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.5.1 cu I_2 în cauzalitate derivată şi I_7 în cauzalitate integrală

Bond-graph-ul cauzal ce se obține în aceste condiții este reprezentat în fig. 5.5.4. Se poate verifica cu uşurință că ecuația de stare în variabila p_7 conduce la aceeaşi ecuație diferențială în variabila $\omega(t)$ ca şi în cazul inițial, ceea ce arată că, aşa cum era de aşteptat, alegerea elementelor cărora li se atribuie cauzalitate integrală nu influențează forma ecuațiilor dinamicii sistemului scrise pentru aceeaşi variabilă.

Schema bloc obținută pe baza bond-graph-ului din fig. 5.5.3 este reprezentată în fig. 5.5.5.

Schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.5.4 diferă de cea din fig. 5.5.5 dar funcția de transfer este aceeaşi (verificarea acestei afirmații este lăsată pe seama cititorului).

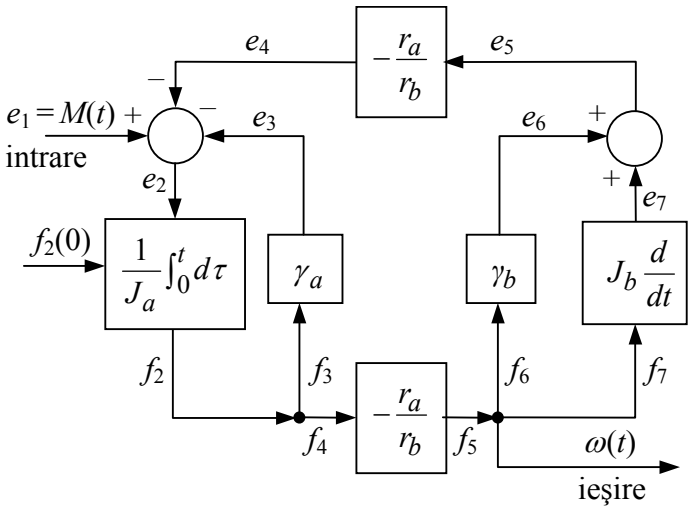


Fig. 5.5.5. Schema bloc corespunzătoare bond-graph-ului din fig. 5.5.3.

Dacă se acționează cu un cuplu motor constant M_s, atunci apare un răspuns staționar în cadrul căruia viteza unghiulară ω_b este constantă şi are valoarea

$$\omega_s = -\frac{M_s}{\gamma_a \frac{r_b}{r_a} + \gamma_b \frac{r_a}{r_b}}.$$

Exemplul 5.5.2.

Se consideră o pârghie de gradul întâi având brațele de lungime a şi respectiv b, situată într-un plan vertical şi având prinse la capete masele m_a şi m_b (fig. 5.5.6), care se roteşte cu un unghi mic. Asupra capătului având prinsă masa m_a acționează o forță $F(t)$, iar de capătul având prinsă masa m_b, este fixată extremitatea unui arc elastic liniar având constanta elastică k_e.

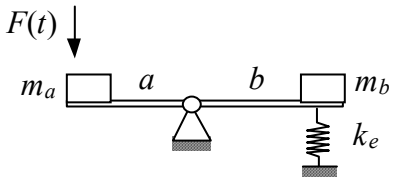


Fig. 5.5.6. Sistem mecanic cu pârghie în care apare cauzalitate derivativă

Bond-graph-ul acestui sistem va conține două joncțiuni 1, corespunzătoare vitezelor v_a şi v_b ale celor două mase, legate printr-un transformator având parametrul $k_{TF} = a/b$. Forța $F(t)$ şi greutățile maselor sunt reprezentate prin surse de efort, cu precizarea că sursa corespunzătoare forței de greutate a masei m_b va fi una care absoarbe putere deoarece această greutate este deplasată în sens opus acțiunii gravitației ceea ce conduce la consum de putere. Masele sunt reprezentate prin elemente I legate de joncțiunile 1 corespunzătoare vitezelor lor, iar arcul este reprezentat printr-un element C legat de joncțiunea 1 corespunzătoare vitezei v_b. În fig. 5.5.7 este reprezentat bond-graph-ul acauzal al acestui sistem.

Pentru atribuirea cauzalității, se aplică mai întâi liniuța cauzală pe bondurile surselor, după care se atribuie cauzalitate integrală elementului I_6 sau I_2. Se alege I_6 pentru că, de regulă, interesează ce se întâmplă la capătul pârghiei opus celui în care acționează forța. Variabila de stare va fi p_6. După această operație, cauzalitatea se induce pe toate bondurile, rezultând elementul C_8 în cauzalitate integrală. Acest fapt înseamnă că sistemul de ecuații de

stare va conține două ecuații în variabilele p_6 și q_8 dar care conțin și variabila p_2, precum și o ecuație algebrică de legătură între p_2 și una sau ambele variabile p_6 și q_8. Bond-graph-ul cauzal este reprezentat în fig. 5.5.8.

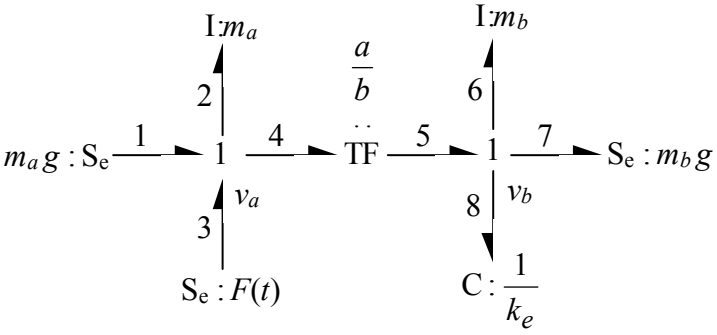


Fig. 5.5.7. Bond-graph-ul acauzal al sistemului din fig. 5.5.6.

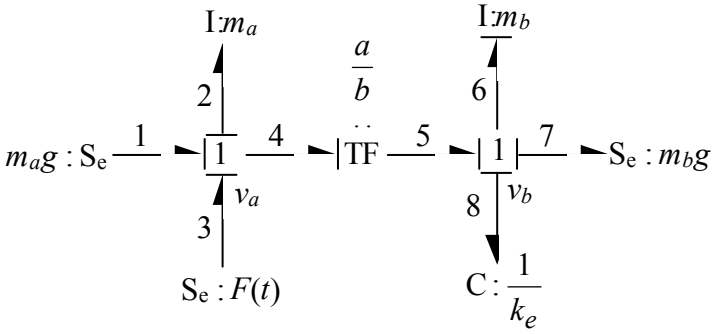


Fig. 5.5.8. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.5.6.

Pentru scrierea ecuațiilor de stare, se stabilesc mai întâi mărimile de tip cauză, care sunt $e_1 = m_a g$, $e_7 = m_b g$ cu valori constante în timp și $e_3 = F(t)$ care poate depinde de timp. Variabilele de stare sunt p_6 și q_8. Ecuațiile constitutive ale elementelor I_2, I_6 și C_8 sunt respectiv

$$p_2 = m_a f_2,$$

$$f_6 = \frac{p_6}{m_b},$$

$$e_8 = k_e q_8.$$

Ecuațiile constitutive ale joncțiunilor sunt

$$m_a g - \dot{p}_2 - e_4 + F(t) = 0,$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4,$$

și

$$e_5 - \dot{p}_6 - m_b g - e_8 = 0,$$

$$f_5 = \dot{q}_8 = f_7 = f_6,$$

iar ale transformatorului sunt

$$e_5 = \frac{a}{b} e_4,$$

$$f_4 = \frac{a}{b} f_5.$$

Ecuațiile de stare se scriu, într-o primă formă, astfel

$$\dot{p}_6 = e_5 - e_8 - m_b g = \frac{a}{b} e_4 - k_e q_8 - m_b g,$$

$$\dot{q}_8 = f_6 = \frac{p_6}{m_b},$$

care, după substituirea lui e_4, capătă forma

$$\dot{p}_6 = \frac{a}{b}\left((m_a g - \dot{p}_2 + F(t)\right) - k_e q_8 - m_b g,$$

$$\dot{q}_8 = \frac{p_6}{m_b}.$$

Acum trebuie scrisă relația algebrică de legătură între variabilele p_6, q_8 și p_2. Ea se obține plecând de la ecuația constitutivă a elementului I_2, rezultând

$$p_2 = m_a f_2 = m_a f_4 = m_a \frac{a}{b} f_5 = m_a \frac{a}{b} f_6 = m_a \frac{a}{b} \frac{p_6}{m_b},$$

adică o relație care leagă variabila p_2 de variabila de stare p_6. Prin derivare se obține:

$$\dot{p}_2 = \frac{m_a}{m_b} \frac{a}{b} \dot{p}_6.$$

După efectuarea substituției în ecuațiile de stare, acestea capătă forma finală

$$\dot{p}_6 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{m_a}{m_b} \right] = -k_e q_8 + \frac{a}{b}\left(m_a q + F(t)\right) - m_b g,$$

$$\dot{q}_8 = \frac{p_6}{m_b}.$$

Acest sistem de două ecuații diferențiale se poate scrie cu uşurință înlocuind variabila p_6 cu variabila $f_6 = v_6$ pe baza derivării relației constitutive a elementului I_6

$$\dot{p}_6 = m_b \dot{f}_6 = m_b \dot{v}_6,$$

iar, după efectuarea substituirilor, se obține

$$\dot{v}_6 \left[m_b + \left(\frac{a}{b} \right)^2 m_a \right] = -k_e q_8 + \frac{a}{b}\left(m_a g + F(t)\right) - m_b g,$$

$$\dot{q}_8 = v_6.$$

Dacă se urmăreşte utilizarea forţei din arc $F_8 = e_8$ drept variabilă de stare, se derivează relaţia constitutivă a elementului C_8

$$\dot{F}_8 = k_e \dot{q}_8$$

şi după înlocuiri, sistemul de ecuaţii diferenţiale rezultă de forma:

$$\dot{v}_6 \left[m_b + \left(\frac{a}{b} \right)^2 m_a \right] = -F_8 + \frac{a}{b}\left(m_a g + F(t) \right) - m_b g,$$

$$\dot{F}_8 = k_e v_6 .$$

Schema bloc a sistemului este reprezentata în fig.5.5.9, considerând drept variabilă de ieşire viteza $v_b(t)$.

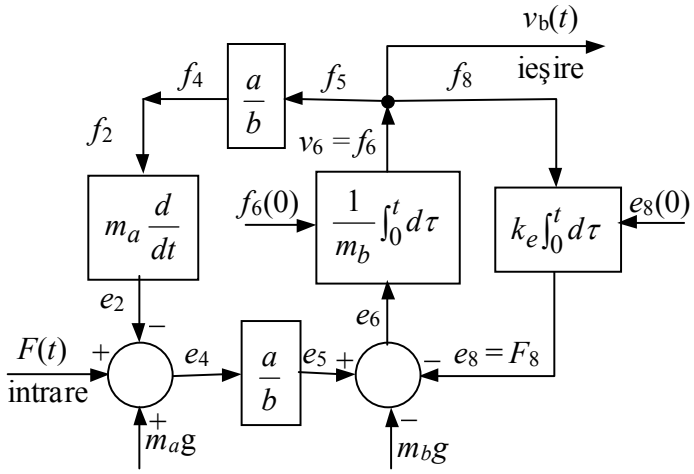


Fig.5.5.9. Schema bloc obţinută pe baza bond-graph-ului din fig.5.5.8.

Matriceal, sistemul de ecuaţii de stare (sau intrare-stare) se scrie de forma (2.4.3)

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_6 \\ \dot{F}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{m_b + \left(\frac{a}{b} \right)^2 m_a} \\ k_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_6 \\ F_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m_b + \left(\frac{a}{b} \right)^2 m_a} \cdot \left(\frac{a}{b}\left(m_a g + F(t) \right) - m_b g \right).$$

Valorile proprii sunt date de rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$s^2 + \frac{k_e}{m_b + \left(\frac{a}{b} \right)^2 m_a} = 0,$$

care sunt pur imaginare. În consecinţă, prin aplicarea unei forţe constante $F(t) = F_s$ drept mărime de intrare, sistemul nu va evolua către un regim staţionar caracterizat prin valori constante ale variabilelor de stare, ci va oscila perpetuu cu aceeaşi amplitudine. Precizăm că, în cazul unui sistem fizic real, întotdeauna va exista o disipare de putere (preponderent prin frecare) care va avea drept efect amortizarea oscilaţiilor, astfel încât se va instala un regim staţionar (după traversarea unui regim tranzitoriu).

Exemplul 5.5.3.

Se consideră sistemul din fig. 5.5.10 care conține o parte hidraulică şi o parte mecanică. Partea hidraulică este compusă dintr-o sursă de presiune de mărime $\Delta p_1 = p(t)$ care, printr-o conductă lungă, acționează asupra unui piston situat într-un cilindru hidraulic în care se generează o presiune $\Delta p_2 = p_c(t)$. Partea mecanică este situată de cealaltă parte a pistonului şi se compune dintr-un arc de compresiune situat între piston şi capacul cilindrului hidraulic şi dintr-o masă de mărime m situată în afara cilindrului ce este prinsă de tija pistonului. Asupra masei acționează o forță $F(t)$ care se opune deplasării datorate presiunii din cilindru. Conducta are o rezistență hidraulică de valoarea R_h şi o inductanță de valoare L_h.

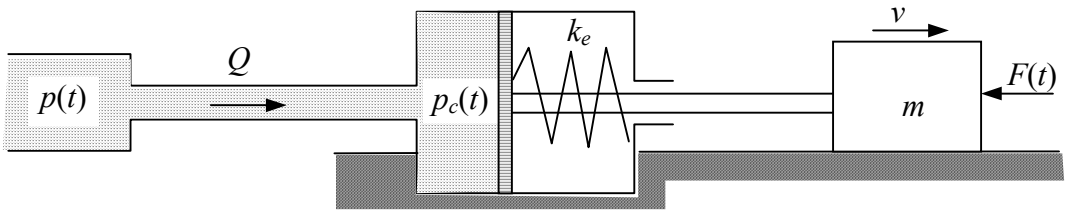


Fig. 5.5.10. Sistem combinat mecanic si hidraulic

Între masa de valoare m şi suprafața de sprijin se consideră că există o forță de frecare proporțională cu viteza, coeficientul de proporționalitate fiind γ. Arcul este considerat liniar, constanta de elasticitate fiind k_e.

Bond-graph-ul nesimplificat al părții hidraulice este prezentat în fig. 5.5.11, în care s-a considerat câte o joncțiune zero pentru presiunea absolută a pompei (p_1), pentru presiunea absolută din cilindru (p_2) şi pentru presiunea de referință p_0 (presiunea atmosferică). Cilindrul s-a modelat ca o sursă de efort ce absoarbe putere, iar pompa ca o sursă de efort care furnizează putere.

După simplificare, bond-graph-ul părții hidraulice este cel reprezentat în fig. 5.5.12.

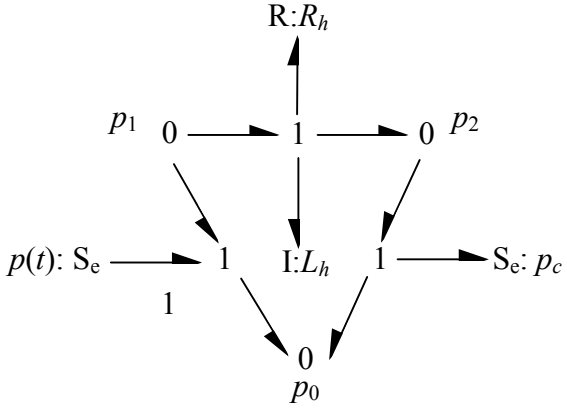


Fig. 5.5.11. Bond-graph-ul nesimplificat al părții hidraulice din sistemul reprezentat în fig. 5.5.10

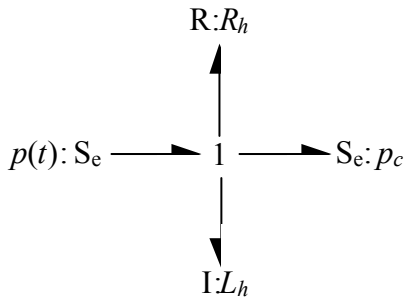


Fig. 5.5.12. Bond-graph-ul simplificat al părții hidraulice din sistemul reprezentat în fig. 5.5.10.

Bond-graph-ul părții mecanice este desenat în fig. 5.5.13, el conținând o joncțiune 1 pentru viteza comună a pistonului şi a masei m. Forța F_p ce apasă asupra pistonului datorită existenței presiunii în cilindru este modelată ca o sursă de efort care furnizează putere, iar forța F ce se opune deplasării masei de mărime m este modelată ca o sursă de efort ce absoarbe putere.

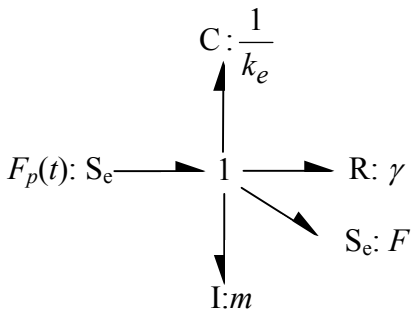


Fig. 5.5.13. Bond-graph-ul părții mecanice din sistemul reprezentat în fig. 5.5.10.

Ținând cont că dacă notăm cu A mărimea ariei pistonului, cu v viteza acestuia şi cu Q debitul fluidului din piston, putem scrie relațiile

$$F_p = p_c A$$

şi

$$Q = vA,$$

atunci putem face legătura între bond-graph-ul părții hidraulice şi cel al părții mecanice printr-un transformator de parametru $k_{TF} = A$. În fig. 5.5.14 este desenat bond-graph-ul cauzal al sistemului reprezentat în fig. 5.5.10. Se remarcă faptul că, după atribuirea cauzală a surselor, s-a trecut la atribuirea cauzalității integrale elementului I_8 ceea ce a condus la propagarea cauzalității pe toate bond-urile iar elementul I_3 a rezultat în cauzalitate derivativă. Sistemul de ecuații va fi deci compus din două ecuații diferențiale în variabilele p_8, q_6 şi p_3, precum şi dintr-o ecuație algebrică ce va exprima legătura dintre variabila p_3 şi cele două variabile de stare p_8 şi q_6.

Ecuațiile constitutive ale elementelor I şi C sunt

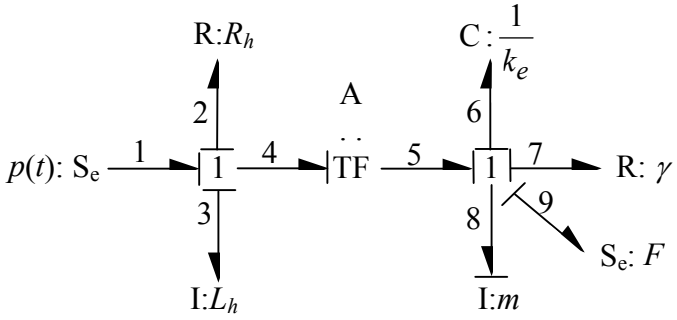


Fig. 5.5.14. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 5.5.10.

$$f_8 = \frac{p_8}{m},$$

$$p_3 = L_h f_3,$$

$$e_6 = k_e q_6,$$

ale elementelor R sunt

$$e_2 = R_h f_2,$$

$$e_7 = \gamma f_7,$$

iar ale joncțiunilor 1 sunt

$$p(t) - e_2 - e_4 - \dot{p}_3 = 0,$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4,$$

respectiv

$$e_5 - e_6 - e_7 - \dot{p}_8 - F(t) = 0,$$

$$f_5 = \dot{q}_6 = f_7 = f_9 = f_8.$$

Ecuațiile constitutive ale transformatorului sunt

$$e_5 = Ae_4,$$

$$f_4 = Af_5.$$

Ecuațiile de stare se scriu într-o prima formă astfel

$$\dot{p}_8 = e_5 - e_6 - e_7 - F = \left[p(t) - e_2 - \dot{p}_3\right]A - k_e q_6 - \gamma \dot{q}_6 - F(t),$$

$$\dot{q}_6 = \frac{1}{m} p_8 ,$$

iar ecuația algebrică este

$$p_3 = L_h f_3 = L_h f_4 = L_h A f_5 = L_h A f_8 = L_h A \frac{1}{m} p_8 .$$

Derivând ecuația algebrică şi făcând substituțiile corespunzătoare, se ajunge la următoarea formă finală a ecuațiilor de stare:

$$\dot{p}_8 \left(1 + \frac{L_h}{m} A^2 \right) = -\left(\frac{A^2 R_h}{m} + \frac{\gamma}{m} \right) p_8 - k_e q_6 + p(t) A - F(t) ,$$

$$\dot{q}_6 = \frac{1}{m} p_8 .$$

Aceste ecuații pot fi exprimate şi în funcție de variabilele $v_8 = f_8$ şi $F_6 = e_6$, rezultând de forma

$$\dot{v}_8 \left(m + L_h A^2 \right) = -\left(A^2 R_h + \gamma \right) v_8 - F_6 + p(t) A - F(t) ,$$

$$\dot{F}_6 = k_e v_8 .$$

Desemnând drept variabilă de ieşire viteza $v = v_8$ a masei m, vom obține o reprezentare intrare-stare-ieşire de forma (2.5.2), (2.5.3) cu următoarea scriere matriceal-vectorială:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_8 \\ \dot{F}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{A^2 R_h + \gamma}{m + L_h A^2} & -\dfrac{1}{m + L_h A^2} \\ k_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_8 \\ F_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{A}{m + L_h A^2} & -\dfrac{1}{m + L_h A^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ F(t) \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_8 \\ F_6 \end{bmatrix} .$$

Schema bloc a sistemului din fig. 5.5.10 este reprezentată în fig. 5.5.15. Dacă la intrarea sistemului se aplică mărimi constante p_s şi F_s, atunci va apărea un răspuns staționar caracterizat prin

$$v_{8_s} = v_s = 0$$

şi

$$F_{6_s} = p_s A - F_s .$$

Pe parcursul regimului tranzitoriu, până la instalarea regimului staționar, în sistem pot apărea oscilații dacă şi numai dacă autovalorile date de polinomul caracteristic

$$s^2 + \frac{A^2 R_h + \gamma}{m + L_h A^2} s + \frac{k_e}{m + L_h A^2} = 0$$

au partea imaginară nenulă.

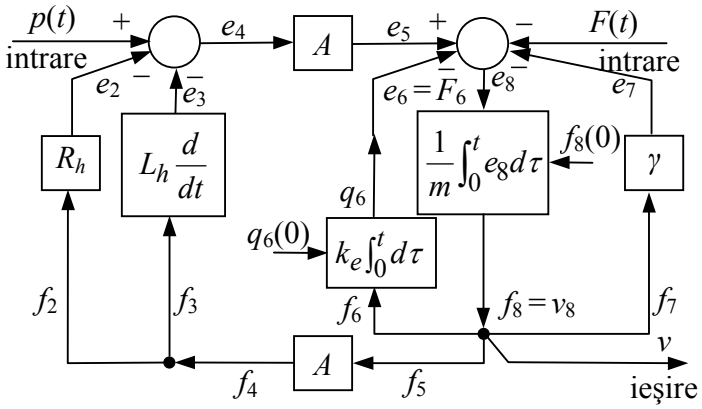


Fig. 5.5.15. Schema bloc a sistemului din fig. 5.5.10.

Merită remarcat faptul că, dacă se neglijează comportarea de tip inerțial a fluidului din conductă atunci bondul etichetat cu numărul 3 în fig. 5.5.14 dispare şi în bond-graph-ul rezultat, atribuirea cauzalității nu mai conduce la elemente în cauzalitate derivativă. De asemenea atragem atenția că atribuirea cauzalității în bond-graph-ul din fig. 5.5.14 nu este unică, oricare din cele două elemente inerțiale putând avea cauzalitate derivativă (adică bondul 3 poate avea cauzalitate integrală şi bondul 8 cauzalitate derivativă) – a se vedea şi discuția aferentă aceleiaşi problematici din exemplul 5.5.1.

6. Extinderi ale limbajul bond-graph

Eficiența constatată în exploatarea limbajului bond-graph, ca instrument ce intermediază construcția modelelor matematice prin standardizarea descrierii la nivel fizic, a stimulat diverse inițiative de extindere a acestui formalism. Extinderile au vizat necesitatea încorporării în limbajul bond-graph a unor elemente noi, corespunzătoare unei accepțiuni mai largi asupra procesării semnalelor şi/sau configurațiilor fizice ce fac obiectul modelării. Având în vedere utilitatea incontestabilă pe care o dovedesc dezvoltările suplimentare de această factură, capitolul curent este dedicat prezentării a patru direcții importante de extindere a limbajului bond-graph, organizate pe secțiuni, după cum urmează:

6.1. Elemente controlate (modulate) în limbajul bond-graph.
6.2. Câmpuri multiport.
6.3. Structuri tip joncțiune şi sisteme multiport.
6.4. Comutatoare si sisteme hibride.

6.1. Elemente controlate (modulate) în limbajul bond-graph

Capacitatea mare de modelare a limbajului bond–graph se datorează faptului că el operează în *mod sistematic* cu perechi de semnale *e* şi *f*, organizate grafic (prin intermediul bond-urilor) în conformitate cu *transferul puterii* între componentele fizice ale sistemului. Prin utilizarea unor aşa-numite "elemente controlate", un bond–graph acceptă şi prezența semnalelor în formă individuală (adică nu perechi). Astfel, construcția modelului poate ține cont şi de semnalele care *nu participă la formularea bilanțurilor de putere*, dar care *posedă informații* fundamentale despre funcționarea sistemului. Cu ajutorul acestor semnale, *parametrii* uniporturilor şi diporturilor pot fi *modificați* pe parcursul funcționării, adică *elementele* bond-graph-ului *sunt controlate*. Pentru elementele controlate se mai foloseşte şi termenul de *elemente modulate*. Această problematică este tratată şi în (Rosenberg and Karnopp, 1983), (Karnopp *et al*., 1990), lucrări care sunt recomandate cititorului interesat în a cunoaşte şi alte modalități de prezentare.

În majoritatea cazurilor, prezența elementelor controlate într-un bond-graph conduce la apariția unor termeni neliniari în descrierea matematică a funcționării sistemului.

6.1.1. Bond-uri active

În modelarea unui număr mare de procese fizico-tehnice se întâlnesc semnale care conțin *informații* deosebit de utile pentru descrierea dinamicii, dar care pot fi *neglijate* din punctul de vedere al *bilanțului energetic*. Astfel de semnale pot fi incluse în reprezentările de tip bond-graph, prin utilizarea aşa numitelor "*bond-uri active*", simbolizate grafic, conform fig. 6.1.1 prin arce cu *săgeți complete*, pe care se marchează semnalul respectiv.

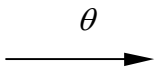


Fig. 6.1.1. Simbolizarea grafică a unui bond activ, corespunzător unui semnal $\theta(t)$

În particular, semnalul $\theta(t)$ poate fi un efort sau un flux, *generat* într-o anumită parte a sistemului modelat (unde puterea aferentă lui $\theta(t)$ nu este neglijată) şi utilizat numai sub raport *informațional* într-o altă parte a sistemului (unde puterea aferentă lui $\theta(t)$ este neglijată). De asemenea semnalul $\theta(t)$ poate fi o *funcție* de un semnal efort $e_i(t)$ sau flux $f_i(t)$, adică $\theta(t) = \varphi(e_i(t))$ sau $\theta(t) = \varphi(f_i(t))$ generat într-o anumită parte a sistemului modelat, unde puterea aferentă lui $e_i(t)$ sau $f_i(t)$ nu este neglijată.

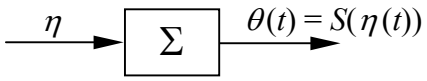


Fig. 6.1.2. Simbolizarea grafică a două bond-uri active, corespunzătoare semnalelor $\theta(t)$ şi $\eta(t)$ ($\theta(t)$ rezultă din transferul lui $\eta(t)$ prin sistemul Σ).

Trebuie, de asemenea, avut în vedere şi cazul general prezentat în fig. 6.1.2, unde semnalul $\theta(t)$ de putere neglijabilă rezultă dintr-un semnal $\eta(t)$ de putere neglijabilă, în urma transferului printr-un sistem Σ, static (descris prin ecuații algebrice) sau dinamic (descris prin ecuații diferențiale), liniar sau neliniar. În această situație, atât $\eta(t)$ cât şi $\theta(t)$ sunt asociate, în simbolizarea grafică, unor bonduri active. Analog celor discutate anterior, $\eta(t)$ poate fi un efort sau un flux generat într-o anumită parte a sistemului studiat, unde puterea lui $\eta(t)$ nu este neglijată. Semnalul $\theta(t)$ rezultă prin aplicarea unui operator S semnalului $\eta(t)$, adică $\theta(t) = S(\eta(t))$.

Bond-urile active sunt utilizate în modelarea funcționării unor elemente controlate, problemă de care ne vom ocupa în detaliu pe parcursul paragrafelor următoare.

6.1.2. Elemente uniport controlate

6.1.2.1. Elemente inerţiale controlate

În fig.6.1.3 se prezintă bond-graph-ul acauzal al unui *uniport inerțial* (I) care este controlat de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bond-ului activ (puterea aferentă lui $\theta(t)$ fiind neglijată). Parametrul uniportului k_{MI} se modifică în timp ca funcție de valoarea semnalului $\theta(t)$, adică:

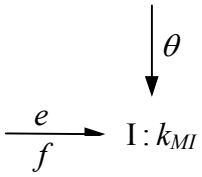


Fig.6.1.3. Bond-graph-ul acauzal al unui uniport inerțial controlat de semnalul θ

$$k_{MI}(t) = \varphi_I(\theta(t)), \qquad (6.1.1)$$

unde φ_I este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a parametrului k_{MI}.

Unui astfel de uniport i se poate asigna cauzalitate integrală sau derivativă, analog cazului când uniportul nu este controlat.

Pentru uniporturile inerțiale controlate se mai utilizează termenul de *uniporturi inerțiale modulate*.

6.1.2.2. Elemente capacitive controlate

În fig. 6.1.4. se prezintă bond-graph-ul acauzal al unui *uniport capacitiv* (C) care este controlat de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bond-ului activ (puterea lui $\theta(t)$ fiind neglijată).

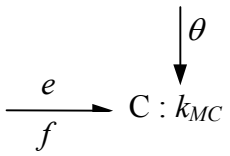


Fig. 6.1.4. Bond-graph-ul acauzal al unui uniport capacitiv controlat de semnalul θ

Parametrul uniportului (k_{MC}) se modifică în timp ca funcție de valoarea semnalului $\theta(t)$, adică:

$$k_{MC}(t) = \varphi_C(\theta(t)), \tag{6.1.2}$$

unde φ_C este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a parametrului k_{MC}.

Unui astfel de uniport i se poate asigna cauzalitate integrală sau derivativă, analog cazului când uniportul nu este controlat.

Pentru uniporturile capacitive controlate se mai utilizează termenul de *uniporturi capacitive modulate*.

6.1.2.3. Elemente rezistive controlate

În fig. 6.1.5. se prezintă bond-graph-ul acauzal al unui *uniport rezistiv* (R) care este controlat de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bond-ului activ (puterea lui $\theta(t)$ fiind neglijată). Parametrul uniportului (k_{MR}) se modifică în timp ca funcție de valoarea semnalului $\theta(t)$, adică:

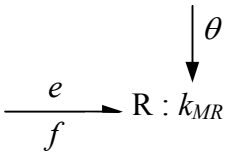


Fig. 6.1.5. Bond-graph-ul acauzal al unui uniport disipativ controlat de semnalul θ.

$$k_{MR}(t) = \varphi_R(\theta(t)), \tag{6.1.3}$$

unde φ_R este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a parametrului k_{MR}.

Pentru uniporturile rezistive controlate se mai folosește termenul de *uniporturi rezistive modulate*.

Unui astfel de uniport i se poate asigna cauzalitate rezistivă sau conductivă, analog cazului când uniportul nu este controlat.

6.1.2.4. Surse controlate

În fig. 6.1.6. se prezintă bond-graph-ul unei *surse de efort* (S_e) care este controlată de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bond-ului activ (puterea lui $\theta(t)$ fiind neglijată). Evoluția în timp a efortului $e(t)$, furnizat de S_e este o funcție de $\theta(t)$, adică:

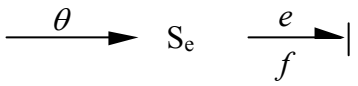


Fig. 6.1.6. Bond-graph-ul unei surse de efort controlate de semnalul θ

$$e(t) = \varphi_e(\theta(t)), \tag{6.1.4}$$

unde φ_e este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a efortului generat de sursă.

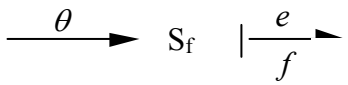


Fig. 6.1.7. Bond-graph-ul unei surse de flux controlate de semnalul θ

În fig. 6.1.7. se prezintă bond-graph-ul unei *surse de flux* (S_f) care este controlată de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bond-ului activ (puterea lui $\theta(t)$ fiind neglijată). Evoluția în timp a fluxului $f(t)$, furnizat de S_f este o funcție de $\theta(t)$, adică:

$$f(t) = \varphi_f(\theta(t)), \tag{6.1.5}$$

unde φ_f este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a fluxului generat de sursă.

6.1.3. Elemente diport controlate

6.1.3.1. Transformatoare controlate

În fig. 6.1.8. se prezintă bond-graph-ul unui transformator (TF) care este controlat de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bond-ului activ (puterea lui $\theta(t)$ fiind neglijată). Parametrul transformatorului k_{TF} se modifică în timp ca funcție de valoarea semnalului $\theta(t)$, adică:

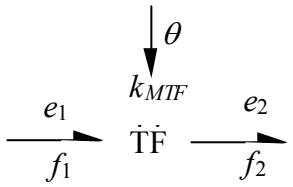


Fig. 6.1.8. Bond-graph-ul acauzal al unui transformator controlat de semnalul θ

$$k_{MTF}(t) = \varphi_{TF}(\theta(t)), \tag{6.1.6}$$

unde φ_{TF} este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a parametrului k_{MTF}.

Cauzalitatea pentru transformatorul controlat poate fi asignată în oricare din cele două moduri care au fost discutate pentru cazul când transformatorul nu este controlat.

Pentru transformatoarele controlate se mai utilizează termenul de *transformatoare modulate*, spunându-se că parametrul transformatorului este modulat de semnalul θ. În multe texte, apare şi notația distinctă MTF în loc de TF, pentru a sublinia faptul că transformatorul în cauză este modulat.

6.1.3.2. Giratoare controlate

În fig. 6.1.9. se prezintă bond-graph-ul acauzal al unui girator (GY) care este controlat de semnalul $\theta(t)$ corespunzător bondului activ θ (puterea lui $\theta(t)$ fiind neglijată). Parametrul giratorului se modifică în timp ca funcție de valoarea semnalului $\theta(t)$, adică:

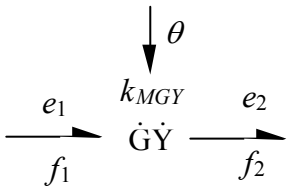


Fig. 6.1.9. Bond-graph-ul acauzal al unui girator controlat de semnalul θ

$$k_{MGY}(t) = \varphi_{GY}(\theta(t)), \tag{6.1.7}$$

unde φ_{GY} este o funcție reală care, prin compunere cu semnalul $\theta(t)$, conduce la dependența de timp a parametrului k_{MGY}.

Cauzalitatea pentru giratorul controlat poate fi asignată în oricare din cele două moduri care au fost discutate pentru cazul când giratorul nu este controlat.

Pentru giratoarele controlate se mai utilizează termenul de *giratoare modulate*, spunându-se că parametrul giratorului este modulat de semnalul θ. În unele texte, apare şi notația distinctă MGY în loc de GY, pentru a sublinia faptul că giratorul în cauză este modulat.

6.1.4. Exemple

Pentru a ilustra modul în care sunt abordate în limbajul bond-graph elementele controlate, se vor da în continuare câteva exemple de sisteme care conțin astfel de elemente.

Exemplul 6.1.1.

Se consideră sistemul hidraulic presupus ca având curgere laminară din fig. 6.1.10. format dintr-un rezervor cu capacitatea hidraulică C_h alimentat cu fluid printr-un robinet având rezistența hidraulică R_{h1} de către o pompă care realizează presiunea $p(t)$. Valoarea rezistenței hidraulice R_{h1} se modifică în funcție de valoarea presiunii hidraulice p_h de la baza rezervorului conform relației $R_{h1} = \varphi_R(p_h)$. Din rezervor fluidul poate fi evacuat printr-un robinet care are rezistența hidraulică R_{h2}. În construcția modelului, vom considera drept mărime de intrare presiunea $p(t)$ drept mărime de ieşire debitul de alimentare $Q(t)$.

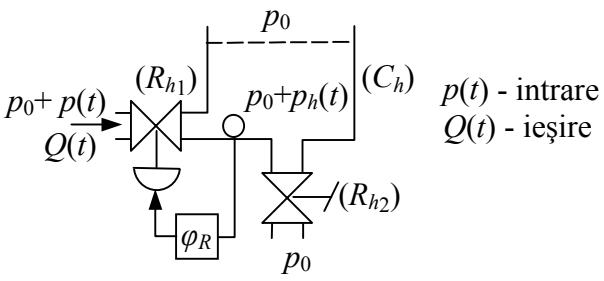


Fig. 6.1.10. Sistem hidraulic al cărui bond-graph conține un element controlat

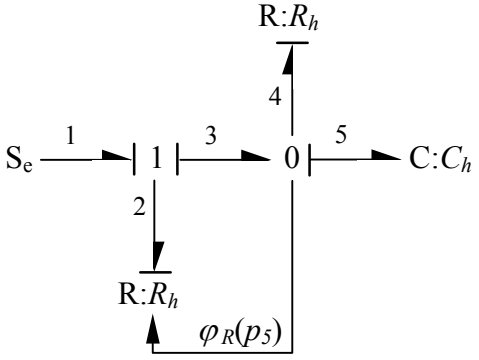


Fig. 6.1.11. Bond-graph-ul sistemului hidraulic reprezentat în fig. 6.1.10.

Bond-graph-ul cauzal al sistemului este reprezentat în fig. 6.1.11. Elementul R_2 este un element rezistiv controlat deoarece parametrul său R_{h1} se modifică în timp ca funcție de presiunea de la baza rezervorului, notată p_5 după modul de numerotare al bondurilor, astfel că relația ce defineşte parametrul rezistorului se scrie

$$R_{h1} = \varphi_R(p_5) = \varphi_R\left(\frac{1}{C_h} q_5\right),$$

unde φ_R este o funcție reală. În bond-graph, acest fapt este evidențiat grafic printr-un bond activ sau semnal care preia din joncțiunea 0 numai efortul impus de bondul 5 tuturor celorlalte bonduri ale joncțiunii şi îl furnizează elementului R_2 pentru a putea interveni asupra parametrul R_{h1} al acestuia. Acest bond activ nu este numerotat şi nu intervine în bilanțul de putere al joncțiunii 0.

Deoarece numai elementul C_5 este în cauzalitate integrală, vom avea o singură ecuație diferențială de stare în variabila $q_5 = V_5$ care reprezintă volumul din rezervor.

Relațiile constitutive ale elementelor C_5, R_2, R_4 şi relațiile constitutive ale celor două joncțiuni sunt:

$$e_5 = \frac{1}{C_h} V_5,$$

$$f_2 = \frac{1}{R_{h1}} e_2,$$

$$f_4 = \frac{1}{R_{h2}} e_4 ,$$

$$p(t) - e_2 - e_3 = 0 ,$$

$$f_1 = f_3 = f_2 ,$$

$$f_3 - f_4 - \dot{V}_5 = 0 ,$$

$$e_3 = e_4 = e_5 .$$

Bondul activ pe care circulă semnalul p_5 către elementul R_2 nu apare în relațiile constitutive ale joncțiunii 0, el având numai rolul de a evidenția dependența unui parametru de un semnal şi nu are implicații în transferul de putere între elementele bond-graph-ului.

Ecuația de stare se scrie într-o primă formă

$$\dot{V}_5 = f_3 - f_4 = \frac{e_2}{R_{h1}} - \frac{e_4}{R_{h2}} = \frac{1}{R_{h1}}(p(t) - e_3) - \frac{e_4}{R_{h2}} = \frac{1}{\varphi_R\left(\frac{V_5}{C_h}\right)}(p(t) - e_5) - \frac{e_5}{R_{h2}},$$

care, în final, devine

$$\dot{V}_5 = -\left(\frac{1}{C_h \varphi_R(p_5)} + \frac{1}{C_h R_{h2}}\right) V_5 + \frac{1}{\varphi_R\left(\frac{V_5}{C_h}\right)} p(t) .$$

Întrucât elementul acumulator de energie are comportare liniară, ecuația diferențială (de stare) poate fi formulată şi în variabila p_5. Astfel, pe baza relației constitutive a elementului C_5 cât şi a derivatei acesteia:

$$\dot{e}_5 = \frac{1}{C_h} \dot{V}_5$$

se poate scrie următoarea ecuație în variabila $e_5 = p_5$:

$$\dot{p}_5 = -\left(\frac{1}{C_h \varphi_R(p_5)} + \frac{1}{C_h R_{h_2}}\right) p_5 + \frac{1}{C_h \varphi_R(p_5)} p(t) .$$

Variabila de ieşire $Q(t) = f_2 = Q_2(t)$ se scrie într-o primă formă

$$Q_2(t) = \frac{e_2}{R_{h_1}} = \frac{p(t) - e_3}{R_{h_2}} ,$$

care ulterior se poate exprima atât în funcție de p_5:

$$Q_2(t) = \frac{1}{\varphi_R(p_5)}(p(t) - p_5) ,$$

cât şi în funcție de V_5:

$$Q_2(t)=\frac{1}{\varphi_R\left(\dfrac{V_5}{C_h}\right)}\left(p(t)-\frac{1}{C_h}V_5\right).$$

Schema bloc a sistemului hidraulic dedusă pe baza bond-graph-ului din fig 6.1.11. este reprezentată în fig. 6.1.12. Semnalul necesar calculării parametrului R_{h_1} (aferent elementului bond-graph R_2) este introdus într-un bloc de calcul neliniar (marcat, conform convenției din secțiunea 2.7 a Capitolului 2, cu o linie de contur dublă). Blocul de calcul furnizează semnalul $\dfrac{1}{\varphi_R(p_5)}$ care este dirijat într-un alt bloc neliniar ce realizează operația de înmulțire cu semnalul $e_2(t)$, rezultând astfel semnalul $f_2(t)$.

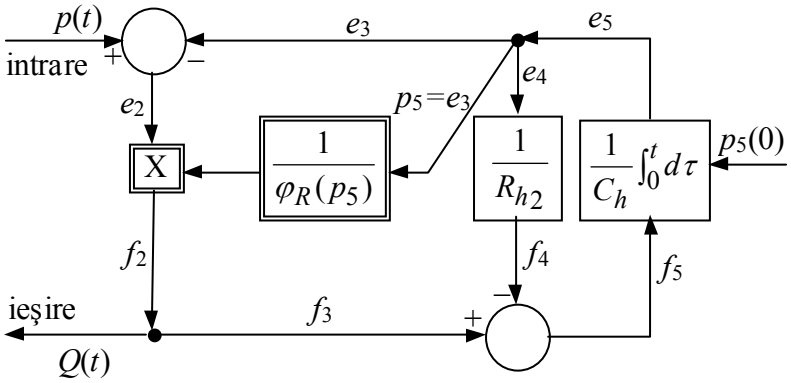


Fig. 6.1.12. Schema bloc a sistemului hidraulic reprezentat în fig.6.1.10.

Exemplul 6.1.2.

Se consideră un pendul format dintr-o tijă de masă neglijabilă de lungime l care, în capătul O, este prinsă de o articulație cilindrică fixă în care există frecare vâscoasă proporțională cu viteza de rotație, coeficientul de proporționalitate fiind γ. La capătul celălalt al tijei este fixată o masă de mărime m (fig. 6.1.13.).

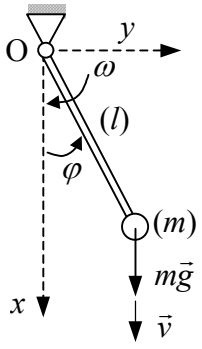


Fig. 6.1.13. Sistem mecanic al cărui bond-graph conține transformatoare modulate

Se roteşte pendulul astfel încât tija să facă cu verticala un unghi φ^o, după care acesta este lăsat liber sub acțiunea forței de greutate a masei. Dacă frecarea nu este mare, atunci vor fi executate oscilații în jurul poziției verticale până la oprire.

Analizând fenomenul fizic, putem considera că avem de a face cu un corp aflat în mişcare de rotație în jurul unei axe orizontale realizată datorită momentului forței de greutate, fapt care conduce la apariția unei viteze unghiulare.

Trebuie găsită deci o legătură între forța de greutate şi momentul ei care este

$$M=-mgl\sin\varphi,$$

unde M este momentul forței în raport cu punctul O. Semnul minus arată că sensul acestui moment este opus sensului pozitiv al axei Oz (nefigurată pe desen) cu care este coliniar vectorul moment. Această relație sugerează necesitatea

introducerii în bond-graph-ul sistemului a unui transformator modulat, având parametrul k_{MTF} de valoare $-l\sin\varphi$ sau $-1/l\sin\varphi$ (în funcție de cauzalitate), care să lege o forță şi viteza ei de deplasare pe direcție coliniară cu ea de momentul şi viteza unghiulară pe care le generează (transformatorul modelează un transformator de putere). Bond-graph-ul cauzal al sistemului este cel din fig. 6.1.14. Forța de greutate este modelată ca o sursă de efort. Singura viteză din sistem este viteza unghiulară, pentru care s-a considerat o joncțiune 1 de care sunt legate elementul inerțial I având ca parametru momentul de inerție J al masei în raport cu axa de rotație Oz de mărime ml^2 şi elementul rezistiv R având parametrul γ. Transformatorul fiind modulat este notat MTF iar parametrul acestuia se calculează pe baza unui semnal φ ce se obține prin integrarea semnalului $\omega=\dot{\varphi}$ provenind din joncțiunea 1, fapt evidențiat grafic în bond-graph.

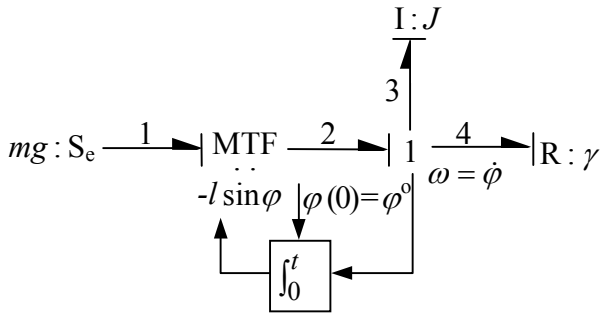


Fig. 6.1.14. Bond-graph-ul cauzal al pendulului văzut ca un rigid în mişcare de rotație

Comportarea sistemului trebuie interpretată ca o dinamică liberă, fără acțiunea unor mărimi de intrare, sursa de efort făcând parte din însăşi structura pendulului. Mişcarea se datorează condiției inițiale nenule $\varphi(0)=\varphi^{\circ}$, în lipsa căreia pendulul rămâne în poziția de echilibru asimptotic stabil (după cum s-a arătat în Exemplul 2.9.3 din Capitolul 2). Desemnăm drept mărime de ieşire viteza v pe direcție verticală a masei m a pendulului. Deoarece există un unic element I în cauzalitate integrală, vom avea o singură ecuație de stare. Pentru obținerea ei se scriu mai întâi ecuațiile constitutive ale elementelor I, R, MTF şi ale joncțiunii 1

$$f_3=\frac{p_3}{ml^2},$$

$$e_4=\gamma f_4,$$

$$e_2=k^{1,2}_{MTF}e_1=-mgl\sin\varphi\ \ (k^{1,2}_{MTF}=-l\sin\varphi \text{ în baza cauzalității}),$$

$$f_1=k^{1,2}_{MTF}f_2=-\omega l\sin\varphi,$$

$$e_2-\dot{p}_3-e_4=0,$$

$$f_2=f_4=\omega.$$

Ecuația de stare se scrie într-o primă formă

$$\dot{p}_3=e_2-e_4=mgl\sin\varphi-\gamma f_4,$$

care, după efectuarea substituțiilor, devine

$$\dot{p}_3=-\frac{\gamma}{ml^2}p_3-mgl\sin\varphi,$$

în care p_3 este momentul cinetic al corpului. Se observă că existența transformatorului modulat a condus la apariția în ecuație a variabilei $q_3=\varphi$ a cărei derivată $f_3=\dot{\varphi}$ este

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{p_3}{ml^2}.$$

Această relație, privită ca o ecuație diferențială, trebuie asociată cu ecuația de stare scrisă anterior pentru elementul I, împreună formând o descriere de stare de ordinul doi de forma (2.6.1), cu mărimea de intrare identic nulă.

De cele mai multe ori, în practică, interesează mai mult viteza unghiulară decât momentul cinetic şi, de aceea, vom trece de la variabila p_3 la variabila ω folosind relația liniară dintre ele, ceea ce conduce la sistemul de ecuații diferențiale

$$\dot{\omega} = -\frac{\gamma}{ml^2}\omega - \frac{g}{l}\sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \omega.$$

Ecuația neliniară de ieşire de forma (2.6.2) în variabila $v = f_1$ este

$$v = -l\sin\varphi\omega\,.$$

Schema bloc a sistemului este reprezentată în fig. 6.1.15. Semnalul $\omega(t)$ este integrat pentru a obține semnalul $\varphi(t)$, care, la rândul său, este introdus într-un bloc de calcul neliniar pentru determinarea parametrului transformatorului. Semnalul rezultat este dirijat către două blocuri de înmulțire în care se realizează produsul dintre parametrul transformatorului şi semnalul $e_1 = mg$ respectiv $f_2 = \omega$.

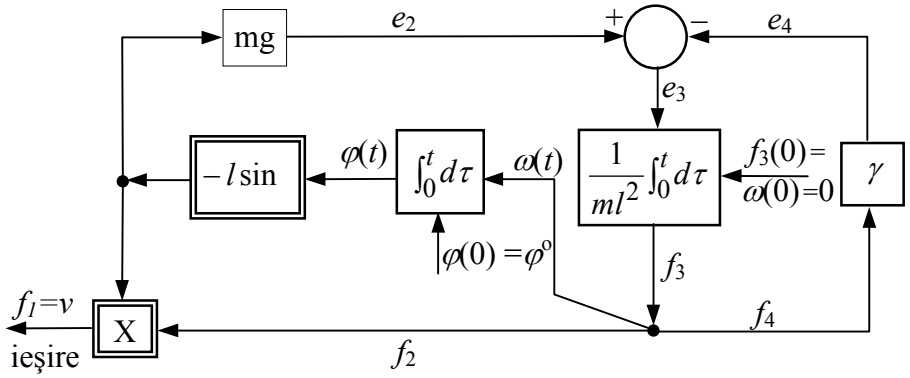


Fig. 6.1.15. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 6.1.13.

Revenind la analiza fenomenului fizic de la care am plecat pentru a realiza modelul, se constată că, la fel de bine, sistemul poate fi considerat ca fiind format dintr-un punct material de masă m care este prins cu o tijă de un punct fix O. Punctul material se mişcă în planul xOy şi are componentele vitezei pe cele două axe $\dot{x}$ şi $\dot{y}$. Pentru aceste viteze se va considera în bond-graph câte o joncțiune 1. Deoarece în articulație există frecare proporțională cu viteza unghiulară a tijei, atunci mai trebuie considerată o joncțiune 1 şi pentru această viteză. De ea va fi legat elementul disipativ R având parametrul γ.

Din fig. 6.1.13. se deduc relațiile

$$x = l\cos\varphi,$$

$$y = l\sin\varphi,$$

care, prin derivare, conduc la următoarele relații de legătură între viteze:

$$\dot{x} = -l\sin\varphi\dot{\varphi} = -\omega l\sin\varphi\,,$$

$$\dot{y} = l\cos\varphi\dot{\varphi} = \omega l\cos\varphi\,.$$

Ele arată că, între joncțiunile 1 corespunzătoare vitezelor $\dot{x}$, $\dot{y}$ şi ω, vor trebui introduse transformatoare modulate de deplasare pentru care valorile concrete ale parametrilor se vor stabili după desenarea bond-graph-ului şi atribuirea cauzalității. Bond-graph-ul va conține câte un element inerțial legat de joncțiunile 1 corespunzătoare vitezelor $\dot{x}$ şi $\dot{y}$ având fiecare parametrul de mărime m şi o sursă de efort incidentă joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei $\dot{x}$ pentru modelarea acțiunilor forței de greutate. În fig. 6.1.16. este reprezentat bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 6.1.13. considerat ca punct material în mişcare plană.

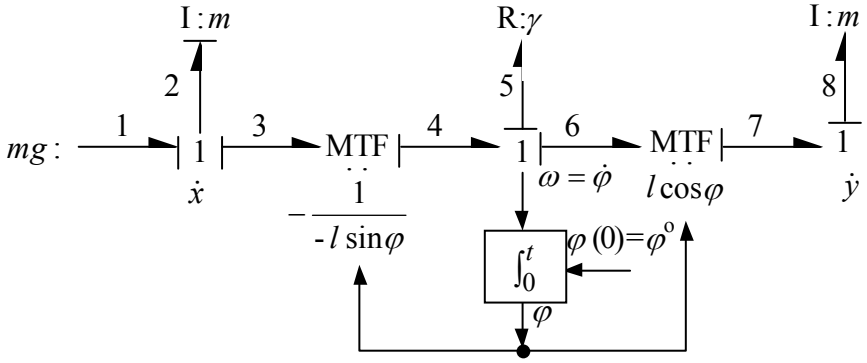


Fig. 6.1.16. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 6.1.13. considerat ca punct material în mişcare plană

În decursul atribuirii cauzale se constată că atunci când unul din elementele I capătă cauzalitate integrală, celălalt rezultă în cauzalitate derivativă. Se alege situația în care elementul I_2 este în cauzalitate integrală iar elementul I_8 în cauzalitate derivativă.

Ținând cont de modul de definire a parametrilor transformatoarelor în cazul general şi de relațiile existente între cele trei viteze din cadrul acestui sistem, se ajunge la următoarea formă a ecuațiilor constitutive ale celor două transformatoare modulate

$$e_3 = -\frac{1}{l\sin\varphi}e_4\,,$$

$$f_4 = -\frac{1}{l\sin\varphi}f_3\,,$$

respectiv

$$e_6 = l\cos\varphi\, e_7\,,$$

$$f_7 = l\cos\varphi\, f_6\,.$$

Rezultă că parametrii celor două transformatoare modulate sunt

$$k_{MTF}^{4,3} = -\frac{1}{l\sin\varphi}\,,$$

şi respectiv

$$k_{MTF}^{7,6} = l\cos\varphi\,.$$

Pentru calculul acestor parametri este necesară cunoaşterea variabilei φ şi utilizarea ei în formule. Bond-graph-ul arată cum se realizează acest lucru prin preluarea semnalului viteză unghiulară $\omega(t)$ din joncțiunea 1 corespunzătoare şi apoi integrarea lui pentru a obține semnalul $\varphi(t)$. Acest semnal este apoi trimis către parametrii transformatoarelor modulate pentru ca aceştia să poată fi calculați.

Bond-graph-ul din fig. 6.1.16. poate fi simplificat prin eliminarea joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei $\dot{y}$, rezultând bond-graph-ul simplificat din fig. 6.1.17.

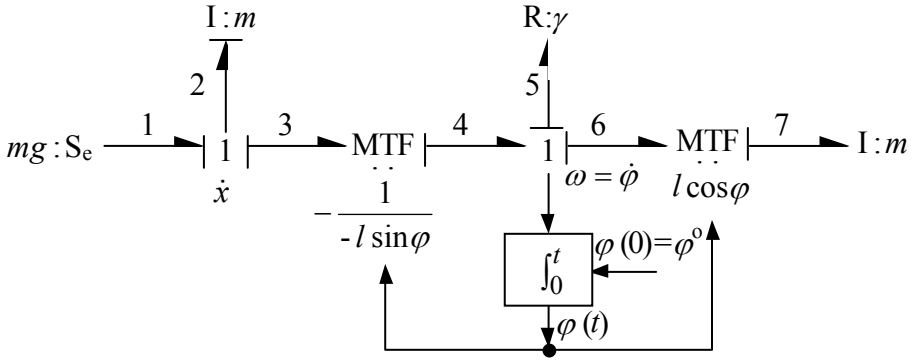


Fig. 6.1.17. Bond-graph-ul cauzal simplificat provenit din bond-graph-u fig. 6.1.16.

Ecuațiile constitutive ale elementelor I_2, I_8 şi R sunt respectiv

$$f_2 = \frac{p_2}{m},$$

$$p_7 = mf_7,$$

$$e_5 = \gamma f_5.$$

Ecuațiile constitutive ale joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei $\dot{x}$ sunt

$$mg - \dot{p}_2 - e_3 = 0,$$

$$f_1 = f_3 = f_2,$$

iar ale joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei ω sunt

$$e_4 - e_5 - e_6 = 0,$$

$$f_5 = f_6 = f_4.$$

Deoarece există un element I în cauzalitate integrală şi unul în cauzalitate derivativă, vom obține o ecuație diferențială de stare în funcția necunoscută p_2 (aferentă elementului I în cauzalitate integrală), care, totodată, conține şi funcția $\dot{p}_7(t)$. Ecuația de stare se deduce prin înlocuiri succesive astfel

$$\dot{p}_2 = mg - e_3 = mg + \frac{1}{l\sin\varphi}e_4 = mg + \frac{1}{l\sin\varphi}(e_5 + e_6) =$$

$$= mg + \frac{1}{l\sin\varphi}(\gamma f_5 + l\cos\varphi e_7) = mg + \frac{1}{l\sin\varphi}\left[\gamma\left(-\frac{1}{l\sin\varphi}\right)\frac{p_2}{m} + l\cos\varphi\dot{p}_7\right],$$

rezultând, în final, de forma

$$\dot{p}_2 = mg - \frac{\gamma}{ml^2 \sin^2 \varphi} p_2 + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \dot{p}_7 .$$

Pe de altă parte între $p_2(t)$ şi $p_7(t)$ există următoarea relaţie de natură algebrică:

$$p_7 = mf_7 = ml\cos\varphi f_6 = ml\cos\varphi\left(-\frac{1}{l\sin\varphi} f_2\right),$$

sau

$$p_7 = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} p_2 .$$

Prin derivare, se obţine

$$\dot{p}_7 = -\frac{1}{\sin^2\varphi}\omega p_2 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\dot{p}_2 ,$$

care substituită în ecuaţia de stare conduce la:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\dot{p}_2 = mg - \frac{\gamma}{ml^2\sin^2\varphi} p_2 + \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\omega p_2 .$$

Între variabila $f_4 = \omega$ şi variabila p_2 se poate scrie relaţia

$$\frac{p_2}{m} = -l\sin\varphi\omega ,$$

care permite rescrierea ecuaţiei de stare sub forma:

$$\dot{p}_2 = mg\sin^2\varphi - \frac{\gamma}{ml^2} p_2 - \frac{1}{ml^2}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} p_2^2 .$$

Ea trebuie asociată cu ecuaţia

$$\dot{\varphi} = -\frac{p_2}{ml\sin\varphi} ,$$

pentru a forma un sistem de ecuaţii diferenţiale în variabilele φ şi p_2 de tipul descrierii de stare neliniare (2.6.1). Precizăm că sistemul de ecuaţii diferenţiale neliniare de mai sus în funcţiile necunoscute $p_2(t)$ şi $\varphi(t)$ are funcţia vectorială din membrul drept continuă Lipschitz pe orice mulţime compactă din $\mathbf{R}^2$ cu restricţia de ordin fizic $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Acest fapt garantează existenţa şi unicitatea soluţiei pentru problema Cauchy asociată sistemului. Continuitatea Lipschitz se dovedeşte uşor ţinând cont că un raport de forma $p_2/\sin\varphi$ are întotdeauna semnificaţia unei viteze unghiulare ω multiplicată cu o constantă finită ($-ml$). Astfel majorarea cerută de condiţia Lipschitz poate fi exprimată ca o funcţie de ω pentru care contextul fizic asigură mărginire. Din aceste raţiuni, valoarea zero a unghiului φ nu este exclusă din compactul pentru care se defineşte membrul drept.

Sistemul se poate scrie în funcţie de variabila viteză $f_2 = \dot{x}$ în loc de variabila impuls p_2, pe baza derivatei relaţiei de definiţie a elementului I_2

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{m}\dot{p}_2 .$$

După înlocuiri, se obține sistemul

$$\dot{f}_2 = g\sin^2\varphi - \frac{\gamma}{ml^2}f_2 - \frac{1}{l}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}f_2^2 ,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{f_2}{l\sin\varphi} .$$

De asemenea, ținând cont de relația

$$f_2 = -l\sin\varphi f_4 = -l\sin\varphi\omega$$

şi de derivata ei

$$\dot{f}_2 = -l\cos\varphi\omega^2 - l\sin\varphi\dot{\omega} ,$$

prima ecuație din sistem se poate scrie în funcție de variabila ω, rezultând aceleaşi ecuații de stare ca în cazul anterior, când pendulul a fost modelat ca un rigid în mişcare de rotație:

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\gamma}{ml^2}\omega ,$$

$$\dot{\varphi} = \omega .$$

Schema bloc a sistemului modelat ca punct material în mişcare plană este reprezentată în fig. 6.1.18.

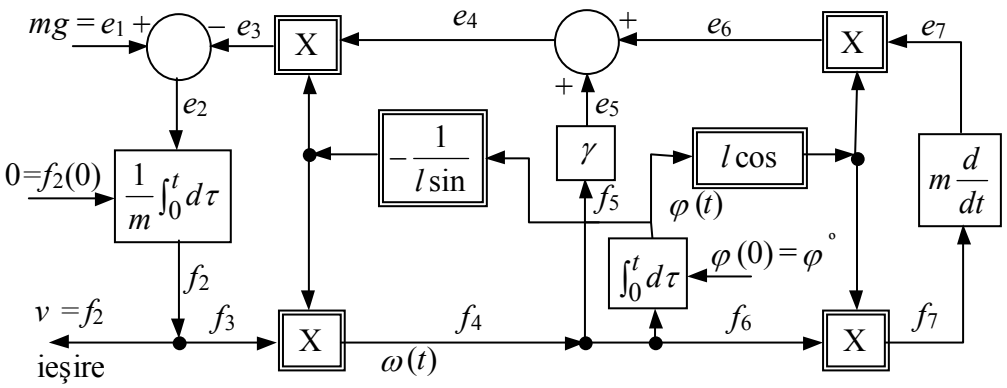


Fig. 6.1.18. Schema bloc a sistemului din fig. 6.1.13. văzut ca punct material în mişcare plană

Exemplul 6.1.3.

Se consideră mecanismul bielă-manivelă din fig. 6.1.19. Manivela are lungimea R şi momentul de inerție J în raport cu axa de rotație, ea fiind acționată de un cuplu motor $M_m(t)$. Biela are lungimea l, masă neglijabilă şi acționează un piston de masă m. Asupra acestuia acționează o forță de frecare F de modul constant.

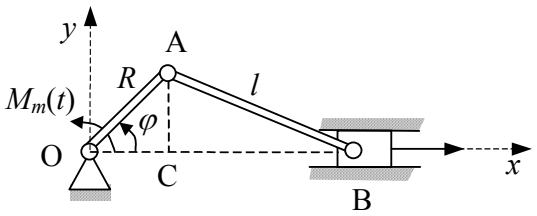


Fig. 6.1.19. Mecanism bielă-manivelă al cărui bond-graph conține un transportor modulat

Dacă se notează cu v viteza pistonului, atunci forța F se scrie

$$F = -\frac{v}{|v|} \cdot |F| = \operatorname{sgn}(v) F \, .$$

Pentru a construi bond-graph-ul sistemului, se consideră câte o joncțiune 1 pentru viteza unghiulară $\dot{\varphi} = \omega$ a manivelei şi pentru viteza $\dot{x} = v$ a pistonului. Între cele două viteze se poate stabili o legătură care se obține scriind coordonata x a pistonului şi apoi derivând această coordonată. Din fig. 6.1.19. rezultă că

$$x = R\cos\varphi + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \, .$$

Derivând în raport cu timpul relația anterioară, se obține

$$\dot{x} = -\left(R\sin\varphi + \frac{R^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}} \right) \dot{\varphi} \, .$$

Această relație arată că între cele două joncțiuni 1 asociate vitezelor, trebuie să existe un transformator modulat. Bond-graph-ul sistemului este reprezentat în fig. 6.1.20.

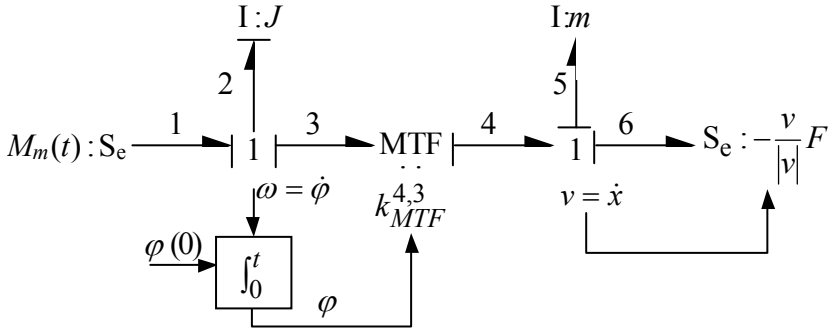


Fig. 6.1.20. Bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 6.1.19.

Forța de frecare este modelată ca o sursă modulată care absoarbe putere. În cursul atribuirii cauzale, se constată că unul din elementele I rezultă în cauzalitate derivativă când celuilalt i se atribuie cauzalitate integrală. S-a considerat elementul I_2 în cauzalitate integrală, dar, la fel de bine, se putea considera elementul I_5 în cauzalitate integrală. Mărimile de intrare sunt $M_m(t)$ şi F, iar mărimea de ieşire se consideră viteza v a pistonului.

Ecuațiile constitutive ale transformatorului modulat sunt

$$e_3 = k_{MTF}^{4,3} e_4 \, ,$$

$$f_4 = k_{MTF}^{4,3} f_3 \, ,$$

unde

$$k_{MTF}^{4,3} = -R\sin\varphi \left[1 + \left(R\cos\varphi \Big/ \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \right) \right] .$$

Ecuațiile constitutive ale elementelor I sunt

$$f_2 = \frac{p_2}{J},$$

$$p_5 = mf_5.$$

Ecuațiile constitutive ale joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei unghiulare ω sunt

$$M_m(t) - \dot{p}_2 - e_3 = 0,$$

$$f_1 = f_3 = f_2,$$

iar cele ale joncțiunii 1 corespunzătoare vitezei v sunt

$$e_4 - \dot{p}_5 - e_6 = 0,$$

$$f_6 = f_5 = f_4.$$

Ecuația de stare scrisă pentru elementul I_2 în cauzalitate integrală este:

$$\dot{p}_2 = M_m(t) - e_3 = M_m(t) - k_{MTF}^{4,3} e_4 = M_m(t) - k_{MTF}^{4,3}(\dot{p}_5 + e_6).$$

Datorită prezenței în aceasta ecuație a funcției $\dot{p}_5(t)$, trebuie determinată o relație algebrică între p_2 și p_5. Aceasta se găsește plecând de la relația constitutivă a elementului I_5, obținându-se

$$p_5 = mf_5 = mf_4 = mk_{MTF}^{4,3} f_3 = mk_{MTF}^{4,3} f_2 = mk_{MTF}^{4,3} \frac{p_2}{J}.$$

Prin derivare în raport cu timpul se obține:

$$\dot{p}_5 = -\frac{m}{J^2}\left[R\cos\varphi + R^2 \frac{R^2 \sin^4\varphi + l^2\cos 2\varphi}{\left(l^2 - R^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}\right] p_2^2 + \frac{m}{J} k_{MTF}^{4,3} \dot{p}_2.$$

Dacă, pentru simplificarea scrierii, facem notația

$$\alpha = -R\cos\varphi - R^2 \frac{R^2 \sin^4\varphi + l^2\cos 2\varphi}{\left(l^2 - R^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}},$$

atunci relația anterioară se scrie

$$\dot{p}_5 = \frac{m}{J^2}\alpha p_2^2 + \frac{m}{J} k_{MTF}^{4,3} \dot{p}_2.$$

Facem acum înlocuirea în ecuația de stare ținând cont și de faptul că

$$v = k_{MTF}^{4,3} \frac{p_2}{J},$$

(care este și ecuația de ieșire), rezultând:

$$\dot{p}_2\left(1 + \left(k_{MTF}^{4,3}\right)^2 \frac{m}{J}\right) = M_m(t) - k_{MTF}^{4,3} \frac{m}{J^2}\alpha p_2^2 - \frac{\left(k_{MTF}^{4,3}\right)^2}{\left|k_{MTF}^{4,3}\right|} F.$$

Această ecuație se completează cu ecuația

$$\dot{\varphi} = \frac{p_2}{J},$$

conducând astfel la o ecuație de stare neliniară de ordinul doi de forma (2.6.1).

Această reprezentare se poate formula şi în variabilele de stare $\omega(t)$ şi $\varphi(t)$ pe baza relației

$$\omega = \frac{p_2}{J},$$

precum şi în variabilele de stare $v(t)$ şi $\varphi(t)$ pe baza relației

$$v = k_{MTF}^{4,3} \frac{p_2}{J},$$

rezultând:

.

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{m\left(K_{MTF}^{4,3}\right)\alpha}{J + m\left(k_{MTF}^{4,3}\right)^2}\omega - \frac{F\left(k_{MTF}^{4,3}\right)^2}{\left(J + m\left(k_{MTF}^{4,3}\right)^2\right)\left|k_{MTF}^{4,3}\right|} + \frac{M_m(t)}{J + m\left(k_{MTF}^{4,3}\right)^2}.$$

Schema bloc a sistemului este reprezentată în fig. 6.1.21.

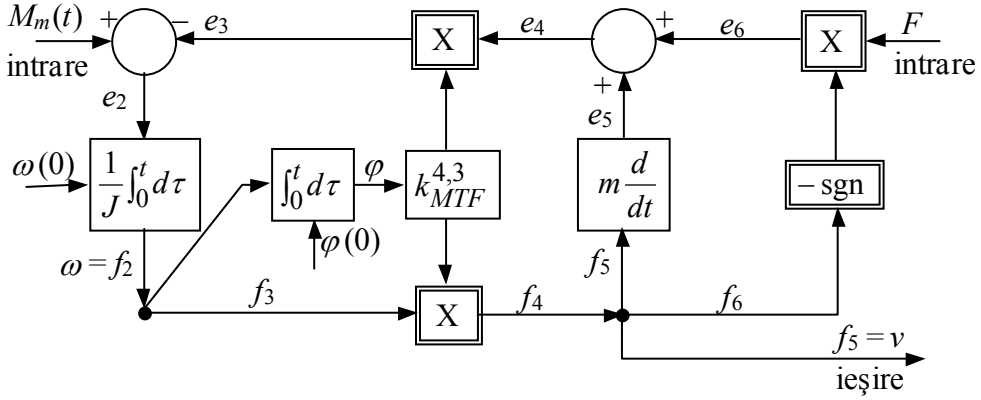


Fig. 6.1.21. Schema bloc a sistemului din fig. 6.1.19.

Exemplul 6.1.4.

Se consideră sistemul hidraulic a cărui structură şi funcționare este descrisă în Exemplul 2.6.3. din capitolul 2 şi este reprezentat în fig. 2.6.1. Spre deosebire de modelul construit în Exemplul 2.6.3, în exemplul curent vom considera drept mărime de ieşire presiunea $P(t)$ de la baza rezervorului (care, evident, este proporțională prin factorul ρg cu înălțimea $H(t)$ luată ca mărime de ieşire în Exemplul 2.6.3). Bond-graph-ul sistemului este desenat în fig. 6.1.22.

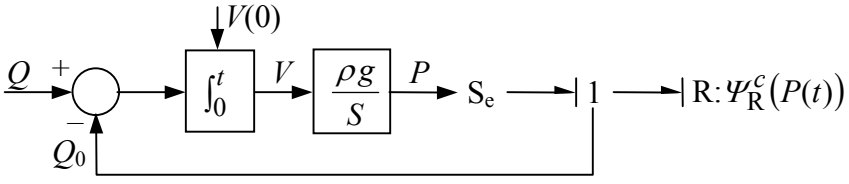


Fig. 6.1.22. Bond-graph-ul sistemului hidraulic reprezentat în fig. 2.6.1. conținând o sursă controlată

Rezervorul este modelat ca o sursă de efort care generează presiunea hidraulică ρgH iar robinetul ca un element disipativ R. Elementul R este în cauzalitate conductivă şi este neliniar, ecuația sa constitutivă fiind de forma

$$Q_0 = \Psi_R^c(P).$$

Având în vedere relația neliniară considerată în Exemplul 2.6.3

$$P = kQ_0^2,$$

rezultă că ecuația constitutivă a elementului disipativ este

$$Q_0 = \sqrt{P/k}.$$

Deoarece debitele de umplere $Q(t)$ şi de golire $Q_0(t)$ influențează mărimea presiunii de la baza rezervorului, aceasta face ca funcționarea sursei de presiune din fig. 2.6.1. să fie modelată ca o sursă comandată. Presupunând că în rezervor se află inițial volumul $V(0)$, atunci acest volum, după deschiderea robinetelor, devine

$$V(t) = V(0) + \Delta V = V(0) + \int_{t_0}^{t} \left(Q(\tau) - Q_0(\tau)\right) d\tau.$$

Volumul din rezervor se exprimă în funcție de aria S a acestuia şi înălțimea H a fluidului cu relațiile

$$V(t) = SH(t),$$

$$V(0) = SH(0),$$

unde $H(0)$ este înălțimea inițială a fluidului. Relația de calcul a volumului de fluid din rezervor capătă, după înlocuiri, forma

$$SH(t) = SH(0) + \int_{t_0}^{t} \left(Q(\tau) - Q_0(\tau)\right) d\tau.$$

Deoarece presiunea P de la baza rezervorului se calculează cu relația generică

$$P = \rho gH,$$

unde ρ este densitatea volumică a fluidului, g este accelerația gravitațională iar H este înălțimea fluidului din vas, atunci se amplifică relația de calcul a volumului de fluid din rezervor cu produsul ρg şi se obține

$$\rho gH(t)S = \rho gH_0 S + \rho g \int_{t_0}^{t} \left(Q(\tau) - Q_0(\tau)\right) d\tau,$$

care conduce la

$$P(t)S = P_0 S + \rho g \int_{t_0}^{t} \left(Q(\tau) - Q_0(\tau)\right) d\tau.$$

Derivând relația anterioară, rezultă

$$\dot{P}(t) = \frac{\rho g}{S} Q(t) - \frac{\rho g}{S} Q_0(t).$$

Ținând cont de faptul că debitul de golire este

$$Q_0(t) = \sqrt{P(t)/k},$$

se obține ecuația diferențială neliniară care ne furnizează presiunea $P(t)$ la baza rezervorului, adică presiunea furnizată de sursă în condițiile în care această sursă este considerată o sursă controlată de debitul $Q(t)$:

$$\dot{P}(t) + \frac{\rho g}{S\sqrt{k}}\sqrt{P(t)} = \frac{\rho g}{S}Q(t).$$

Prin înmulțirea cu $1/\rho g$ acest model neliniar coincide cu cel obținut în Exemplul 2.6.3. care a fost dedus fără a face apel la tehnica bond-graph.

Schema bloc construită cu ajutorul bond-graph-ului din fig. 6.1.22. este reprezentată în fig. 6.1.23.

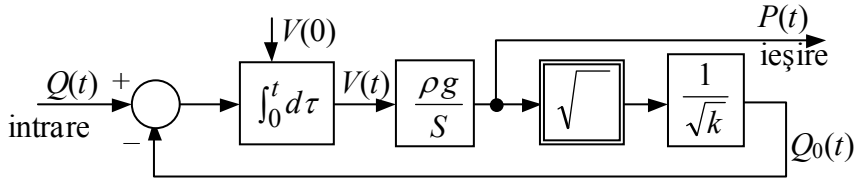


Fig. 6.1.23. Schema bloc a sistemului hidraulic reprezentat în fig. 2.6.1.

În cazul funcționării cu semnal mic în vecinătatea unui regim staționar, modelul de tip bond-graph va coincide ca structură cu cel din fig. 6.1.22., exceptând descrierea folosită pentru elementul rezistiv corespunzător elementului de golire. După cum reiese şi din discuția asupra modelului în mici variații dezvoltată în Exemplul 2.6.4., curgerea este considerată laminară şi, prin urmare, elementul rezistiv are relația constitutivă liniară cu parametrul $k_R = 2\rho g H_s/Q_s = 2P_s/Q_s$, unde indicele s referă punctul static de funcționare.

În ceea ce priveşte schema bloc, se păstrează structura din fig. 6.1.23 cu precizarea că legătura de la $p(t)$ la $q_0(t)$ se realizează acum printr-un bloc liniar ce conține constanta $1/k_R$ conform fig. 6.1.24, în care notațiile pentru variabile sunt cele specifice micilor variații utilizate în Exemplul 2.6.4.

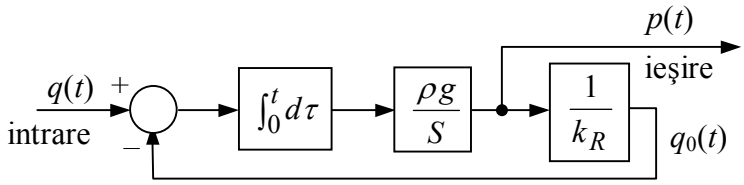


Fig. 6.1.24. Schema bloc a sistemului hidraulic reprezentat în fig. 2.6.1. asociată funcționării cu mici variații

6.2. Câmpuri multiport

Extinderea din această secțiune a limbajului bond-graph se referă la conținutul legilor constitutive corespunzătoare elementelor C, I şi R în condițiile generalizării modului lor de conectare drept configurații multiport. Cititorului interesat în detalii suplimentare sau în confruntarea modului nostru de prezentare cu alte maniere de abordare, îi sunt recomandate studiile monografice (Rosenberg and Karnopp, 1983), (Karnopp *et al*., 1990).

6.2.1. Câmpuri C

În fig. 6.2.1. se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* C *explicit*, cu *n* porturi şi cauzalitate integrală completă (pentru toate bondurile). Uzual, pentru fluxurile corespunzătoare celor *n* bonduri ce compun structura, se utilizează notația $\dot{q}_j (= f_j)$, $j = 1, \ldots, n$ unde q_j semnifică deplasările generalizate.

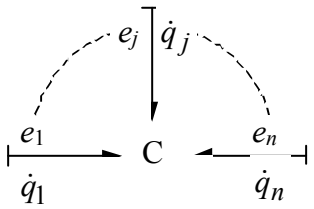


Fig. 6.2.1. Bond-graph-ul unui câmp C explicit cu *n* porturi şi cauzalitate integrală completă

Extinderea naturală a legii constitutive specifice unui element uniport C, posedând cauzalitate de tip integral, permite formularea *legilor constitutive* ale câmpului C cu cauzalitate integrală completă. Aceste legi constau în exprimarea eforturilor e_j, $j = 1, \ldots, n$, în funcție de deplasările generalizate q_j, sub forma aplicației:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\Psi}_C^i(\mathbf{q}), \qquad \boldsymbol{\Psi}_C^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{6.2.1}$$

unde **e**, respectiv **q**, notează vectorii:

$$\mathbf{e} = [e_1 \ldots e_n]^T, \qquad \mathbf{q} = [q_1 \ldots q_n]^T. \tag{6.2.2}$$

În exprimarea vectorială (6.2.1), indicele superior *i* marchează faptul că toate cele *n* porturi ale câmpului sunt în cauzalitate integrală. Totodată (6.2.1) arată faptul că fiecare e_j, $j = 1, \ldots n$, depinde (în general) de toți $q_j, j = 1, \ldots n$, adică, detaliat, avem scrierea:

$$e_j = \left(\boldsymbol{\Psi}_C^i\right)_j (q_1, \ldots, q_n), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{6.2.3}$$

În *cazul liniar*, când toate cele *n* funcții (6.2.3) sunt combinații liniare de q_j $j = 1, \ldots, n$, exprimarea vectorială (6.2.1) a legilor constitutive ale câmpului C devine:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K}_C^i \mathbf{q}, \qquad \mathbf{K}_C^i \in \mathbf{R}^{n \times n}. \tag{6.2.4}$$

Matricea $\mathbf{K}_C^i$ din (6.2.4) este denumită *matrice de rigiditate* (*eng*. stiffness matrix), această denumire provenind din mecanică, unde vectorul **q** posedă semnificația concretă de deplasare.

O analiză din punct de vedere energetic a câmpului C din fig. 6.2.1. pune în evidență faptul (deosebit de important) că funcția vectorială de variabilă vectorială $\boldsymbol{\Psi}_C^i$ din (6.2.1) (corespunzând cazului general, neliniar), precum şi matricea $\mathbf{K}_C^i$ din (6.2.4) (corespunzând cazului liniar) posedă *o proprietate de simetrie*. Cu alte cuvinte, în scrierea legilor constitutive ale unui câmp C, funcția $\boldsymbol{\Psi}_C^i$, sau respectiv matricea $\mathbf{K}_C^i$ *nu pot fi pur arbitrare.* Într-adevăr energia acumulată de câmpul C la un moment oarecare de timp *t* este:

$$E(t)=\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}e_j(\tau)f_j(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{\Psi}_C^i\right)_j(q_1(\tau),...,q_n(\tau))\dot{q}_j(\tau)d\tau, \tag{6.2.5}$$

ceea ce arată că forma diferențială:

$$dE=\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{\Psi}_C^i\right)_j(q_1(\tau),...,q_n(\tau))\dot{q}_j(\tau)d\tau=\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{\Psi}_C^i\right)_j(q_1,...,q_n)dq_j \tag{6.2.6}$$

este o formă diferențială exactă. Făcând apel la noțiuni elementare de teoria matematică a câmpurilor, se constată că exprimarea (6.2.3) a legilor constitutive defineşte un *câmp de gradienți*

$$\mathbf{e}=\boldsymbol{\Psi}_C^i(\mathbf{q})=\left[\frac{\partial E}{\partial q_1}...\frac{\partial E}{\partial q_n}\right]^T=gradE \tag{6.2.7}$$

de *potențial scalar E*. Drept urmare, câmpul de vectori **e** este irotațional, sau, echivalent, *conservativ*, ceea ce înseamnă că:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\Psi}_C^i\right)_l}{\partial q_j}=\frac{\partial\left(\boldsymbol{\Psi}_C^i\right)_j}{\partial q_l},\quad l,j=1,\ ...,\ n,\ l\neq j\,. \tag{6.2.8}$$

Simetria pusă în evidență pentru cazul general, neliniar de către (6.2.8) conduce în cazul liniar (când **e** este exprimat conform (6.2.4)) la concluzia că matricea de rigiditate $\mathbf{K}_C^i$ este simetrică, adică

$$\left(\mathbf{K}_C^i\right)_{lj}=\left(\mathbf{K}_C^i\right)_{jl},\qquad l,j=1,...,r,\ l\neq j\,. \tag{6.2.9}$$

O altă proprietate importantă a câmpului C o constituie faptul că energia acumulată într-un interval de timp [t_0, t] depinde numai de valorile deplasărilor generalizate la timpul inițial, $\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}_0$ şi la timpul final, $\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}$. Într-adevăr, conservativitatea câmpului de gradienți (6.2.7) asigură faptul că valoarea integralei (6.2.5) care defineşte energia este independentă de drumul parametrizat:

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n,\quad \boldsymbol{\gamma}(t_0)=\mathbf{q}_0,\quad \boldsymbol{\gamma}(t)=\mathbf{q}\,, \tag{6.2.10}$$

pe care se efectuează integrarea. Altfel spus, energia poate fi exprimată direct in termenii deplasărilor generalizate, prin:

$$E(\mathbf{q})=\int_{\boldsymbol{\gamma}}\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{\Phi}_C^i\right)_j(q_1,...,\ q_n)dq_j=\int_{\boldsymbol{\gamma}}\sum_{j=1}^{n}e_j(q_1,...,\ q_n)dq_j\,, \tag{6.2.11}$$

fapt ce arată că valoarea $E(\mathbf{q})$ este unic determinată până la o constantă cu semnificația $E(\mathbf{q}_0)=E(\mathbf{q}(t_0))$.

În fig. 6.2.2 se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* C *explicit* cu *n* porturi şi *cauzalitate derivativă completă* (pentru toate bondurile).

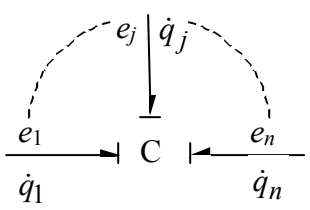


Fig. 6.2.2. Bond-graph-ul unui câmp C explicit cu *n* porturi şi cauzalitate derivativă completă

Utilizând notațiile (6.2.2), legile constitutive ale acestui câmp C se scriu sub forma vectorială:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\Psi}_C^d(\mathbf{e}), \quad \boldsymbol{\Psi}_C^d : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \qquad (6.2.12)$$

care generalizează exprimarea cunoscută din cazul unui element uniport C, posedând cauzalitate derivativă. În situația când câmpul C este liniar, legile constitutive (6.2.12) dobândesc o transcriere matriceală:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}_C^d \mathbf{e}, \quad \mathbf{K}_C^d \in \mathbf{R}^{n\times n}, \qquad (6.2.13)$$

unde matricea $\mathbf{K}_C^d$ se numeşte *matrice de complianță* (*eng*. compliance matrix), denumire provenită din mecanică.

În exprimările (6.2.12) şi (6.2.13), indicele superior *d* precizează faptul că toate cele *n* porturi ale câmpului C sunt în cauzalitate derivativă.

Dacă pentru un câmp C se poate asigna atât cauzalitate integrală completă, cât şi cauzalitate derivativă completă, atunci, prin compararea legilor constitutive (6.2.1) cu (6.2.12) şi respectiv (6.2.4) cu (6.2.13), constatăm următoarele conexiuni:

- aplicația $\boldsymbol{\Psi}_C^d$ (6.2.12) este inversa aplicației $\boldsymbol{\Psi}_C^i$ (6.2.1), în raport cu operația de compunere a funcțiilor vectoriale, de variabilă vectorială;
- matricea $\mathbf{K}_C^d$ (6.2.13) este inversa matricei $\mathbf{K}_C^i$ (6.2.4), în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătrate.

În baza observației anterioare, rezultă imediat că simetria matricei $\mathbf{K}_C^i$ atrage în mod obligatoriu şi simetria matricei $\mathbf{K}_C^d = \left(\mathbf{K}_C^i\right)^{-1}$.

În fig. 6.2.3 se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* C *explicit* cu *n* porturi şi *cauzalitate mixtă*, primele *j* bonduri posedând cauzalitate integrală, iar celelalte *n-j* bonduri posedând cauzalitate derivativă. Legile constitutive ale acestui câmp C se scriu cu ajutorul aplicației:

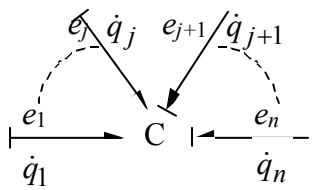


Fig. 6.2.3. Bond-graph-ul unui câmp C explicit cu *n* porturi şi cauzalitate mixtă

$$\boldsymbol{\Psi}_C^m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \qquad (6.2.14)$$

definită, pe componente, în conformitate cu cauzalitatea fiecărui bond:

$$e_l = \left(\boldsymbol{\Psi}_C^m\right)_l (q_1,...,q_j, e_{j+1}, ...,e_n),\ l = 1,...,j \qquad (6.2.15\text{-a})$$

$$q_l = \left(\boldsymbol{\Psi}_C^m\right)_l (q_1,...,q_j, e_{j+1}, ...,e_n),\ l = j+1,...,n. \qquad (6.2.15\text{-b}).$$

În exprimările (6.2.14) şi (6.2.15), indicele superior *m* precizează faptul că este asigurată o cauzalitate mixtă.

Relațiile (6.2.15) pot fi scrise compact sub forma:

$$\mathbf{v}_C^m = \boldsymbol{\Psi}_C^m\left(\mathbf{w}_C^m\right), \qquad (6.2.16)$$

unde vectorii $\mathbf{v}_C^m$ şi $\mathbf{w}_C^m$ sunt definiți prin:

$$\mathbf{v}_C^m = \left[e_1 \ldots e_j q_{j+1} \ldots q_n\right]^T, \qquad \mathbf{w}_C^m = \left[q_1 \ldots q_j e_{j+1} \ldots e_n\right]^T. \tag{6.2.17}$$

În cazul unui câmp C liniar, aplicația (6.2.16) permite scrierea vectorial-matriceală:

$$\mathbf{v}_C^m = \mathbf{K}_C^m \mathbf{w}_C^m, \ \mathbf{K}_C^m \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.18}$$

Până în acest punct al prezentării câmpurilor C, am discutat structurile de tip explicit corespunzând diferitelor moduri de asignare a cauzalității. În construcția unui bond-graph poate apărea însă *un grup* de *n elemente uniport* C interconectate prin intermediul joncțiunilor J0, J1 şi/sau transformatoarelor, în această situație având de a face cu un *câmp* C *implicit*. Operând transformări (reduceri) asupra bond-graph-ului asociat unui câmp C implicit, se obține un bond-graph corespunzător unui câmp C explicit care conține *un singur* element C multiport (de tipul celor prezentate în fig. 6.2.1, fig. 6.2.2, sau fig. 6.2.3). Drept consecință, legile constitutive pentru un câmp C implicit posedă aceeaşi formă ca şi în cazul unui câmp C explicit.

6.2.2. Câmpuri I

În fig. 6.2.4 se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* I *explicit* cu *n* porturi şi *cauzalitate integrală completă* (pentru toate bondurile). Uzual, pentru eforturile corespunzătoare celor *n* bonduri ce compun structura, se utilizează notația $p_j (= e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, unde p_j semnifică impulsurile generalizate.

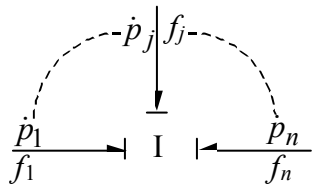


Fig. 6.2.4. Bond-graph-ul unui câmp I explicit cu *n* porturi şi cauzalitate integrală completă

Extinderea naturală a legii constitutive specifice unui element uniport I, posedând cauzalitate de tip integral, permite formularea *legilor constitutive* ale câmpului I cu cauzalitate integrală completă. Aceste legi constau în exprimarea fluxurilor f_j, $j = 1, \ldots, n$, în funcție de impulsurile generalizate p_j, sub forma aplicației

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Psi}_I^i(\mathbf{p}), \qquad \mathbf{\Psi}_I^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{6.2.19}$$

unde ***f***, respectiv ***p*** notează vectorii:

$$\mathbf{f} = \left[f_1 \ldots f_n\right]^T, \qquad \mathbf{p} = \left[p_1 \ldots p_n\right]^T. \tag{6.2.20}$$

În exprimarea vectorială (6.2.19), indicele superior *i* marchează faptul că toate cele *n* porturi ale câmpului sunt în cauzalitate integrală. Totodată (6.2.19) arată faptul ca fiecare f_j, $j = 1, \ldots, n$, depinde (în general) de toți $p_j, j = 1, \ldots, n$, adică, detaliat, avem scrierea:

$$f_j = \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_j (p_1, \ldots, p_n), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{6.2.21}$$

În *cazul liniar*, când toate cele *n* funcții (6.2.20) sunt combinații liniare de $p_j, j = 1, \ldots, n$, exprimarea vectorială (6.2.19) a legilor constitutive ale câmpului I devine:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_I^i \mathbf{p}, \qquad \mathbf{K}_I^i \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.22}$$

O analiză din punct de vedere energetic a câmpului I din fig. 6.2.4 pune în evidență faptul (deosebit de important) că funcția vectorială de variabilă vectorială $\mathbf{\Psi}_I^i$ din (6.2.19) (corespunzând cazului general, neliniar), precum şi matricea $\mathbf{K}_I^i$ din (6.2.22) (corespunzând cazului liniar) posedă o proprietate de simetrie. Cu alte cuvinte, în scrierea legilor constitutive ale unui câmp I, funcția $\mathbf{\Psi}_I^i$, sau respectiv matricea $\mathbf{K}_I^i$ *nu pot fi pur arbitrare*. Într-adevăr energia acumulată de câmpul I la un moment oarecare de timp *t* este:

$$E(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} f_j(\tau) e_j(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_j \left(p_1(\tau),..., p_n(\tau)\right) \dot{p}_j(\tau) d\tau , \qquad (6.2.23)$$

ceea ce arată că forma diferențială:

$$dE = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_j \left(p_1(\tau),..., p_n(\tau)\right) \dot{p}_j(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_j \left(p_1,..., p_n\right) dp_j , \qquad (6.2.24)$$

este o formă diferențială exactă.

Făcând apel la noțiuni elementare de teoria matematică a câmpurilor, se constată că exprimarea (6.2.21) a legilor constitutive defineşte un *câmp de gradienți.*

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Psi}_I^i(\mathbf{p}) = \left[\frac{\partial E}{\partial p_1} \dots \frac{\partial E}{\partial p_n} \right]^T = gradE \qquad (6.2.25)$$

de *potențial scalar E*. Drept urmare, câmpul vectorial **f** este *irotațional*, sau, echivalent, *conservativ*, ceea ce înseamnă că:

$$\frac{\partial \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_l}{\partial q_j} = \frac{\partial \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_j}{\partial p_l}, \quad l, j = 1, ..., n, \; l \neq j . \qquad (6.2.26)$$

Simetria pusă în evidență pentru cazul general, neliniar, de către (6.2.26) conduce în cazul liniar (când **f** este exprimat conform (6.2.22)) la concluzia că matricea $\mathbf{K}_I^i$ este simetrică, adică:

$$\left(\mathbf{K}_I^i\right)_{lj} = \left(\mathbf{K}_I^i\right)_{jl}, \qquad l, j = 1,..., n, \; l \neq j . \qquad (6.2.27)$$

O altă proprietate importantă a câmpului I o constituie faptul că energia acumulată într-un interval de timp $[t_0, t]$ depinde numai de valorile impulsurilor generalizate la timpul inițial, $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ şi la timpul final, $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}$. Într-adevăr, conservativitatea câmpului de gradienți (6.2.25) asigură faptul că valoarea integralei (6.2.23) care defineşte energia este independentă de drumul parametrizat

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau) : \mathbf{R} \to \mathbf{R^n}, \quad \boldsymbol{\gamma}(t_0) = \mathbf{p}_0, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{p}, \qquad (6.2.28)$$

pe care se efectuează integrarea. Astfel spus, energia poate fi exprimată direct în termenii impulsurilor generalizate, prin:

$$E(\mathbf{p}) = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{\Psi}_I^i\right)_j (p_1, ..., p_n) dp_j = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} f_j (p_1, ..., p_n) dp_j , \qquad (6.2.29)$$

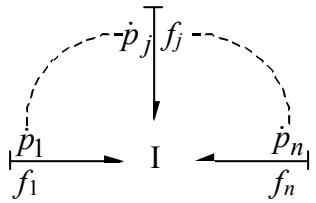


Fig. 6.2. 5. Bond-graph-ul unui câmp I explicit cu *n* porturi şi cauzalitate derivativă completă

fapt ce arată că valoarea $E(\mathbf{p})$ este unic determinată până la o constantă cu semnificația $E(\mathbf{p}_0) = E(\mathbf{p}(t_0))$.

În fig. 6.2.5 se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* I *explicit* cu *n* porturi şi *cauzalitate derivativă completă* (pentru toate bondurile).

Utilizând notațiile (6.2.20), *legile constitutive* ale acestui câmp I se scriu sub forma vectorială:

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Psi}_I^d(\mathbf{f}), \quad \mathbf{\Psi}_I^d : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \qquad (6.2.30)$$

care generalizează exprimarea cunoscută din cazul unui element uniport I, posedând cauzalitate derivativă. În situația când câmpul I este *liniar*, legile constitutive (6.2.30) dobândesc scrierea matriceală:

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_I^d \mathbf{f}, \quad \mathbf{K}_I^d \in \mathbf{R}^{n \times n}. \qquad (6.2.31)$$

În exprimările (6.2.30) şi (6.2.31), indicele superior *d* precizează faptul că toate cele *n* porturi ale câmpului I sunt în cauzalitate derivativă.

Dacă pentru un câmp I se poate asigna atât cauzalitate integrală completă, cât şi cauzalitate derivativă completă, atunci, prin compararea legilor constitutive (6.2.19) cu (6.2.30) şi respectiv (6.2.22) cu (6.2.31), constatăm următoarele conexiuni:

- aplicația $\mathbf{\Psi}_I^d$ (6.2.30) este inversa aplicației $\mathbf{\Psi}_I^i$ (6.2.19), în raport cu operația de compunere a funcțiilor vectoriale, de variabilă vectorială;
- matricea $\mathbf{K}_I^d$ (6.2. 31) este inversa matricei $\mathbf{K}_I^i$ (6.2.22), în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătrate.

În baza observației anterioare, rezultă imediat că simetria matricei $\mathbf{K}_I^i$ atrage în mod obligatoriu şi simetria matricei $\mathbf{K}_I^d = (\mathbf{K}_I^i)^{-1}$.

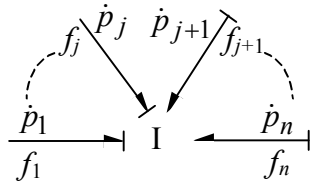


Fig. 6.2.6. Bond-graph-ul unui câmp C explicit cu *n* porturi şi cauzalitate mixtă

În fig. 6.2.6. se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* I *explicit* cu *n* porturi şi cauzalitate mixtă, primele *j* bonduri posedând cauzalitate integrală, iar celelalte $n - j$ bonduri posedând cauzalitate derivativă.

Legile constitutive ale acestui câmp I se scriu cu ajutorul aplicației:

$$\mathbf{\Psi}_I^m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \qquad (6.2.32)$$

definită, pe componente, în conformitate cu cauzalitatea fiecărui bond:

$$f_l = \left(\mathbf{\Psi}_I^m\right)_l (p_1, ..., p_j, f_{j+1}, ..., f_n), \; l = 1, ..., j \qquad (6.2.33\text{-a})$$

$$p_l = \left(\mathbf{\Psi}_I^m\right)_l (p_1, ..., p_j, f_{j+1}, ..., f_n), \; l = j+1, ..., n. \qquad (6.2.33\text{-b})$$

În exprimările (6.2.32) şi (6.2.33), indicele superior *m* precizează faptul că este asignată o cauzalitate mixtă.

Relaţiile pot fi scrise compact sub forma:

$$\mathbf{v}_I^m = \mathbf{\Psi}_I^m\left(\mathbf{w}_I^m\right), \tag{6.2.34}$$

unde vectorii $\mathbf{v}_I^m$ şi $\mathbf{w}_I^m$ sunt definiţi prin:

$$\mathbf{v}_I^m = \left[f_1 \dots f_j\, p_{j+1} \dots p_n\right]^T, \quad \mathbf{w}_I^m = \left[p_1 \dots p_j\, f_{j+1} \dots f_n\right]^T. \tag{6.2.35}$$

În cazul unui câmp I *liniar*, aplicaţia (6.2.34) permite scrierea vectorial-matriceală:

$$\mathbf{v}_I^m = \mathbf{K}_I^m \mathbf{w}_I^m, \ \ \mathbf{K}_I^m \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.36}$$

Până în acest punct al prezentării câmpurilor I, am discutat *structurile de tip explicit* corespunzând diferitelor moduri de asignare a cauzalităţii. În construcţia unui bond-graph poate apărea însă un grup de *n elemente uniport* I interconectate prin intermediul joncţiunilor J0, J1 şi/sau transformatoarelor, în această situaţie având de a face cu un *câmp* I *implicit*. Operând transformări (reduceri) asupra bond-graph-ului asociat unui câmp I implicit, se obţine un bond-graph corespunzător unui câmp I explicit care conţine *un singur* element I multiport (de tipul celor prezentate în fig. 6.2.4, fig. 6.2.5, sau fig. 6.2.6). Drept consecinţă, legile constitutive pentru un câmp I implicit posedă aceeaşi formă ca şi în cazul unui câmp I explicit.

6.2.3. Câmpuri mixte IC

În fig. 6.2.7. se prezintă bond-graph-ul unui *câmp mixt* IC *explicit*, cu *n* porturi şi cauzalitate integrală completă.

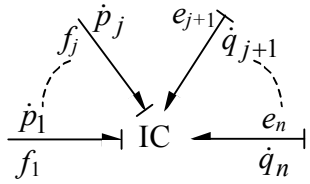


Fig. 6.2.7. Bond-graph-ul unui câmp mixt IC explicit cu *n* porturi şi cauzalitate integrală completă

În baza celor discutate în paragrafele 6.2.1. şi 6.2.2, legile constitutive ale unui astfel de câmp se scriu cu ajutorul aplicaţiei:

$$\mathbf{\Psi}_{IC}^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{6.2.37}$$

definită, pe componente, în conformitate cu modul de acumulare al energiei specific fiecărui port:

$$f_l = \left(\mathbf{\Psi}_{IC}^i\right)_l (p_1, \dots, p_j, e_{j+1}, \dots, e_n), \ l = 1, \dots, j, \tag{6.2.38-a}$$

$$e_l = \left(\mathbf{\Psi}_{IC}^i\right)_l (f_1, \dots, f_j, q_{j+1}, \dots, q_n), \ l = j+1, \dots, n. \tag{6.2.38-b}$$

În exprimările (6.2.37) şi (6.2.38), indicele superior *i* precizează faptul că toate porturile posedă cauzalitate integrală.

Relaţiile (6.2.38) pot fi scrise compact sub forma:

$$\mathbf{v}_{IC}^i = \mathbf{\Psi}_{IC}^i\left(\mathbf{w}_{IC}^i\right), \tag{6.2.39}$$

unde vectorii $\mathbf{v}_{IC}^i$ şi $\mathbf{w}_{IC}^i$ sunt definiţi prin:

$$\mathbf{v}_{IC}^i = \left[f_1 \dots f_j e_{j+1} \dots e_n\right], \qquad \mathbf{w}_{IC}^i = \left[p_1 \dots p_j q_{j+1} \dots q_n\right]. \tag{6.2.40}$$

În cazul unui câmp mixt IC *liniar*, aplicaţia (6.2.37) permite scrierea vectorial-matriceală:

$$\mathbf{v}_{IC}^{i} = \mathbf{K}_{IC}^{i}\mathbf{w}_{IC}^{i},\ \ \mathbf{K}_{IC}^{i} \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.41}$$

Ca şi în cazul câmpurilor C sau câmpurilor I, analiza sub raport energetic a câmpului mixt IC din fig. 6.2.7 pune în evidenţă faptul că atât aplicaţia $\boldsymbol{\Psi}_{IC}^{i}$ (6.2.37) (corespunzând cazului neliniar), cât şi matricea $\mathbf{K}_{IC}^{i}$ (6.2.41) (corespunzând cazului liniar) posedă o *proprietate de simetrie*.

6.2.4. Câmpuri R

În fig. 6.2.8. se prezintă bond-graph-ul unui *câmp* R *explicit*, cu *n* porturi şi cauzalitate rezistivă completă (pentru toate conexiunile).

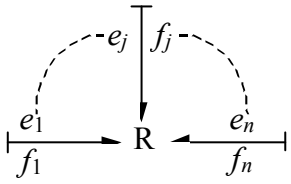


Fig. 6.2.8. Bond-graph-ul unui câmp R explicit cu *n* porturi şi cauzalitate rezistivă completă

Extinderea naturală a legii constitutive specifice unui element uniport R, posedând cauzalitate de tip rezistiv, permite formularea *legilor constitutive* ale câmpului R cu cauzalitate rezistivă completă. Aceste legi constau în exprimarea eforturilor e_j, $j = 1, \ldots, n$ în funcţie de fluxurile f_j sub forma:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\Psi}_{R}^{r}(\mathbf{f}), \qquad \boldsymbol{\Psi}_{R}^{r} : \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n} \tag{6.2.42}$$

unde **e**, respectiv **f** notează vectorii:

$$\mathbf{e} = \left[e_1 \ldots e_n\right]^{T}, \qquad \mathbf{f} = \left[f_1 \ldots f_n\right]^{T}. \tag{6.2.43}$$

În exprimarea vectorială (6.2.42), indicele superior *r* marchează faptul că toate cele *n* porturi ale câmpului sunt în cauzalitate rezistivă. Totodată (6.2.42) arată faptul că fiecare e_j, $j = 1, \ldots, n$, depinde (în general de toţi $f_j, j = 1, \ldots, n$), adică, detaliat avem scrierea:

$$e_j = \left(\boldsymbol{\Psi}_{R}^{r}\right)_{j}(f_1,\ldots,f_n), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{6.2.44}$$

În *cazul liniar*, când toate cele *n* funcţii (6.2.44) sunt combinaţii liniare de $f_j, j = 1, \ldots, n$, exprimarea vectorială (6.2.42) a legilor constitutive ale câmpului R devine:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K}_{R}^{r}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{K}_{R}^{r} \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.45}$$

În fig. 6.2.9 se prezintă bond-graph-ul unui câmp R explicit cu *n* porturi şi cauzalitate conductivă completă (pentru toate conexiunile).

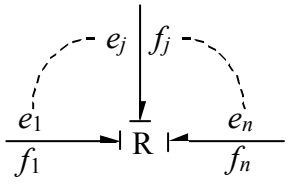


Fig. 6.2.9 bond-graph-ul unui câmp R cu *n* porturi şi cauzalitate conductivă completă

Utilizând notaţiile (6.2.43), *legile constitutive* ale acestui câmp R se scriu sub forma vectorială:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\Psi}_{R}^{c}(\mathbf{e}), \qquad \boldsymbol{\Psi}_{R}^{c} : \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n} \tag{6.2.46}$$

care generalizează exprimarea cunoscută din cazului unui element uniport R, posedând cauzalitate conductivă. În situaţia când câmpul R este liniar, legile constitutive (6.2.46) dobândesc scrierea matricială:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_{R}^{c}\mathbf{e}, \qquad \mathbf{K}_{R}^{c} \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.47}$$

În exprimările (6.2.46) şi (6.2.47), indicele superior *c* precizează faptul că toate cele *n* porturi ale câmpului R sunt în cauzalitate conductivă.

Dacă pentru un câmp R se poate asigna atât cauzalitate rezistivă completă, cât şi cauzalitate conductivă completă, atunci, prin compararea legilor constitutive (6.2.42) cu (6.2.46) şi respectiv (6.2.45) cu (6.2.47) constatăm următoarele legături:

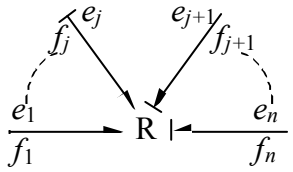


Fig. 6.2.10. Bond-graph-ul unui câmp R explicit cu *n* porturi şi cauzalitate mixtă

- aplicația $\mathbf{\Psi}_R^c$ (6.2.46) este inversa aplicației $\mathbf{\Psi}_R^r$ (6.2.42), în raport cu compunerea funcțiilor vectoriale, de variabilă vectorială;
- matricea $\mathbf{K}_R^c$ (6.2. 47) este inversa matricei $\mathbf{K}_R^r$ (6.2.45), în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătrate.

În fig. 6.2.10 se prezintă bond-graph-ul unui câmp R explicit cu *n* porturi şi cauzalitate mixtă, primele *j* conexiuni posedând cauzalitate rezistivă, iar celelalte $n-j$ conexiuni posedând cauzalitate conductivă.

Legile constitutive ale acestui câmp se scriu cu ajutorul aplicației

$$\mathbf{\Psi}_R^m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{6.2.48}$$

definită, pe componente, în conformitate cu cauzalitatea fiecărei conexiuni

$$e_l = \left(\mathbf{\Psi}_R^m\right)_l (f_1,...,f_j, e_{j+1}, ...,e_n),\ l=1,...,j, \tag{6.2.49-a}$$

$$f_l = \left(\mathbf{\Psi}_R^m\right)_l (f_1,...,f_j, e_{j+1}, ...,e_n),\ l=j+1,...,n. \tag{6.2.49-b}$$

În exprimările (6.2.48) şi (6.2.49), indicele superior *m* precizează faptul că este asignată o cauzalitate mixtă.

Relațiile (6.2.49) pot fi scrise compact sub forma:

$$\mathbf{v}_R^m = \mathbf{\Psi}_R^m\left(\mathbf{w}_R^m\right), \tag{6.2.50}$$

unde vectorii $\mathbf{v}_R^m$ şi $\mathbf{w}_R^m$ sunt definiți prin:

$$\mathbf{v}_R^m = \left[e_1 \ldots e_j f_{j+1} \ldots f_n\right]^T, \qquad \mathbf{w}_R^m = \left[f_1 \ldots f_j e_{j+1} \ldots e_n\right]^T. \tag{6.2.51}$$

În cazul unui câmp R liniar, aplicația (6.2.50) permite scrierea vectorial-matriceală:

$$\mathbf{v}_R^m = \mathbf{K}_R^m \mathbf{w}_R^m,\ \mathbf{K}_R^m \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{6.2.52}$$

Până în acest punct al prezentării câmpurilor R, am discutat structurile de tip *explicit* corespunzând diferitelor moduri de asignare a cauzalității. În construcția unui bond-graph poate apărea însă un grup de *n elemente uniport* R interconectate prin intermediul joncțiunilor J0, J1 şi/sau transformatoarelor şi/sau giratoarelor, în această situație având de a face cu un *câmp R implicit*. Operând transformări (reduceri) asupra bond-graph-ului asociat unui câmp R implicit, se obține un bond-graph corespunzător unui câmp R explicit conținând *un singur* element R multiport (de tipul celor prezentate în fig. 6.2.8, fig. 6.2.9, sau fig. 6.2.10). Drept consecință, legile constitutive pentru un câmp R implicit posedă aceeaşi formă ca şi în cazul unui câmp R explicit.

6.2.5. Exemple

Exemplul 6.2.1

Se consideră sistemul mecanic din fig. 6.2.11.a preluat după (Karnopp *et al.*, 1990) compus dintr-un resort care este fixat la extremitatea O şi asupra căruia acționează forțele F_x, F_y la extremitatea P. Resortul posedă constanta elastică k şi are în repaus lungimea r_0. Notând prin x şi y deplasările punctului P în direcția abscisei şi respectiv în direcția ordonatei, sistemului i se poate ataşa bond-graph-ul din fig. 6.2.11.b, corespunzând unui câmp C explicit cu 2 porturi şi cauzalitate integrală completă (vezi prototipul din fig. 6.2.1).

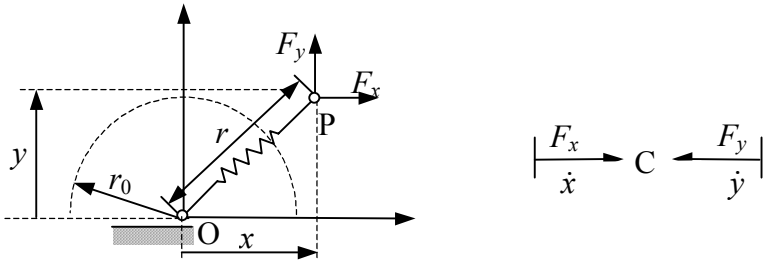


Fig. 6.2.11. Sistemul utilizat în Exemplul 6.2.1.
a) reprezentare schematizată; b) bond-graph-ul asociat

Relațiile constitutive se pot astfel scrie sub forma (6.2.3), conducând la exprimarea concretă:

$$F_x = k\Delta x = k\left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} r_0 \right),$$

$$F_y = k\Delta y = k\left(y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} r_0 \right).$$

Se constată cu uşurință satisfacerea condițiilor de simetrie de forma (6.2.8) specifice câmpului C şi anume:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -k \frac{2xy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3} r_0 .$$

După cum este de aşteptat, la aceleaşi relații constitutive se ajunge construind vectorii câmpului de gradienți (6.2.7) generat de potențialul scalar E, care semnifică energia acumulată de resort:

$$E = \frac{1}{2} k (\Delta r)^2 = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2, \qquad r \overset{\text{not}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Aplicarea concretă a relației (6.2.7) conduce la exprimările analitice

$$F_x = \frac{\partial E}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial E}{\partial y},$$

care coincid cu exprimările deduse anterior.

Se constată verificarea imediată a condițiilor de simetrie (6.2.8) datorate conservativității câmpului C şi anume:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -k \frac{2xy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} r_0 .$$

6.3. Structuri tip joncţiune şi sisteme multiport

Extinderea din această secțiune a limbajului bond-graph are în vedere o modalitate de organizare tipizată în descrierea sistemului, prin gruparea elementelor pe categorii ce se caracterizează printr-un comportament similar în procesarea energiei. Detalii şi informații suplimentare pot fi găsite în referințele bibliografice recomandate pentru secțiunea 6.2 precum şi în (Borne *et al*., 1991).

6.3.1. Definirea conceptelor

Structurile tip joncțiune sunt ansambluri de joncțiuni J0, J1, transformatoare şi giratoare care conservă puterea. La porturile unei astfel de structuri sunt conectate elemente de tip sursă, acumulatoare de energie şi disipatoare de energie, conform fig. 6.3.1.

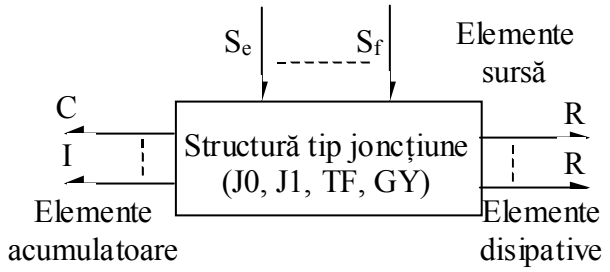


Fig. 6.3.1. Conectarea elementelor la o structură tip joncțiune (reprezentare sub formă de bond-graph acauzal)

Reprezentarea grafică din fig. 6.3.1 sugerează imediat faptul că structura tip joncțiune împreună cu elementele conectate formează un *sistem multiport*.

Prin asignarea cauzalității unui sistem multiport, se pot pune în evidență relațiile de tip vectorial ce caracterizează dinamica sistemului multiport.

6.3.2. Sisteme multiport cu cauzalitate integrală

În cazul unui sistem multiport cu cauzalitate integrală pentru toate elementele acumulatoare de energie, să considerăm reprezentarea sub formă de bond-graph cauzal din fig. 6.3.2.a. Acestei reprezentări i se poate asocia descrierea sub formă de schemă bloc din fig. 6.3.2.b care ilustrează modul de procesare al semnalelor, bazat pe definirea următorilor vectori de dimensiuni adecvate:

$\dot{\mathbf{x}}$ - vectorul semnalelor de intrare în elementele acumulatoare de energie;
$\mathbf{z}$ - vectorul semnalelor de ieşire din elementele acumulatoare de energie;
$\mathbf{d}_{in}$ - vectorul semnalelor de intrare în elementele disipative;
$\mathbf{d}_{out}$ - vectorul semnalelor de ieşire din elementele disipative;
$\mathbf{u}$ - vectorul semnalelor de ieşire din surse;
$\mathbf{v}$ - vectorul semnalelor de intrare în surse.

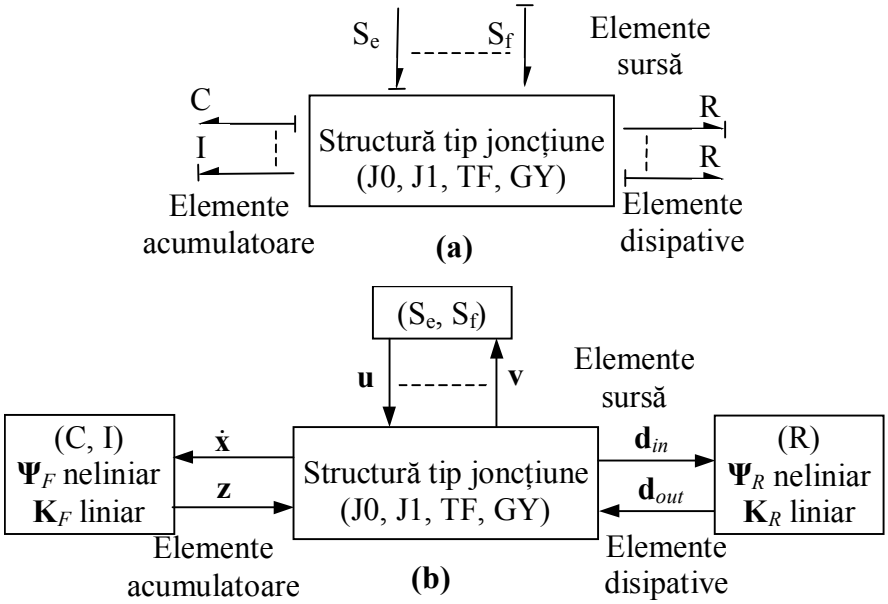


Fig. 6.3.2. Sisteme multiport cu cauzalitate integrală completă
(a) reprezentare sub formă de bond-graph cauzal, **(b)** reprezentare sub formă de schemă bloc

Blocul corespunzător elementelor acumulatoare de energie este caracterizat prin dinamica elementelor integratoare:

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau + \mathbf{x}(t_0), \tag{6.3.1}$$

la care se asociază relația vectorială statică dintre $\mathbf{z}$ şi $\mathbf{x}$, de forma (în general neliniară):

$$\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\Psi}_F(\mathbf{x}(t)). \tag{6.3.2}$$

În cazul particular al comportării liniare a elementelor acumulatoare, relația (6.3.2) poate fi scrisă drept:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{K}_F \mathbf{x}(t), \tag{6.3.3}$$

unde $\mathbf{K}_F$ este o matrice diagonală cu coeficienți de forma $1/k_C$ sau $1/k_I$ corespunzând cauzalității integrale).

Blocul corespunzător elementelor disipative este caracterizat prin relația vectorială statică dintre $\mathbf{d}_{out}$ şi $\mathbf{d}_{in}$, de forma (în general, neliniară):

$$\mathbf{d}_{out}(t) = \boldsymbol{\Psi}_R(\mathbf{d}_{in}(t)). \tag{6.3.4}$$

În cazul particular al comportării liniare a elementelor disipative, relația (6.3.4) poate fi scrisă drept:

$$\mathbf{d}_{out}(t) = \mathbf{K}_R \mathbf{d}_{in}(t), \tag{6.3.5}$$

unde $\mathbf{K}_R$ este o matrice diagonală cu coeficienți k_R (corespunzând cauzalității rezistive) sau $1/k_R$ (corespunzând cauzalității conductive).

6.3.3. Sisteme multiport cu cauzalitate mixtă

În cazul unui sistem multiport cu cauzalitate mixtă (elementele acumulatoare de energie posedă fie cauzalitate integrală, fie cauzalitate derivată), să considerăm reprezentarea sub formă de bond-graph cauzal din fig. 6.3.3(a). Acestei reprezentări i se poate asocia descrierea sub formă de schemă bloc din fig. 6.3.3(b) care ilustrează modul de procesare a semnalelor, bazat pe definirea următorilor vectori de dimensiuni adecvate:

- $\dot{\mathbf{x}}^i$ - vectorul semnalelor de intrare în elementele acumulatoare de energie, cu cauzalitate integrală;
- $\mathbf{z}^i$ - vectorul semnalelor de ieşire din elementele acumulatoare de energie, cu cauzalitate integrală;
- $\dot{\mathbf{x}}^d$ - vectorul semnalelor de ieşire din elementele acumulatoare de energie, cu cauzalitate derivativă;
- $\mathbf{z}^d$ - vectorul semnalelor de intrare în elementele acumulatoare de energie, cu cauzalitate derivativă;
- $\mathbf{d}_{in}$ - vectorul semnalelor de intrare în elementele disipative;
- $\mathbf{d}_{out}$ - vectorul semnalelor de ieşire din elementele disipative;
- $\mathbf{u}$ - vectorul semnalelor de ieşire din surse;
- $\mathbf{v}$ - vectorul semnalelor de intrare în surse.

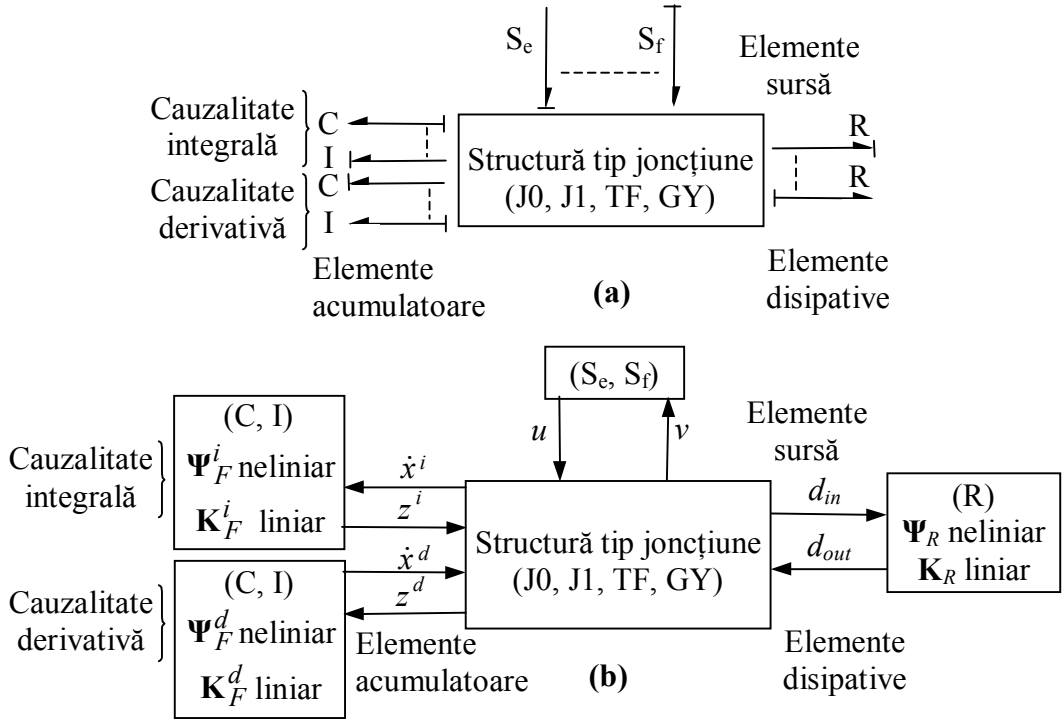


Fig. 6.3.3. Sisteme multiport cu cauzalitate mixtă
(a) reprezentare sub formă de bond-graph cauzal, **(b)** reprezentare sub formă de schemă bloc

Blocul corespunzător elementelor acumulatoare de energie, cu cauzalitate integrală, este caracterizat prin dinamica elementelor integratoare:

$$\mathbf{x}^i(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{x}}^i(\tau) d\tau + \mathbf{x}^i(t_0), \tag{6.3.6}$$

la care se asociază relația vectorială statică dintre $\mathbf{z}^i$ şi $\mathbf{x}^i$, de forma (în general neliniară):

$$\mathbf{z}^i(t) = \mathbf{\Psi}_F^i(\mathbf{x}^i(t)). \tag{6.3.7}$$

În cazul particular al comportării liniare a elementelor acumulatoare, cu cauzalitate integrală, relația (6.3.7) poate fi scrisă drept:

$$\mathbf{z}^i(t) = \mathbf{K}_F^i \mathbf{x}^i(t), \tag{6.3.8}$$

unde $\mathbf{K}_F^i$ este o matrice diagonală cu coeficienți de forma $1/k_C$ sau $1/k_I$ (corespunzând cauzalității integrale).

Blocul corespunzător elementelor acumulatoare de energie, cu cauzalitate derivativă, este caracterizat prin dinamica elementelor:

$$\dot{\mathbf{x}}^d(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}^d(t), \tag{6.3.9}$$

la care se asociază relația vectorială statică dintre $\mathbf{z}^d$ şi $\mathbf{x}^d$, de forma (în general neliniară):

$$\mathbf{z}^d(t) = \mathbf{\Psi}_F^d(\mathbf{x}^d(t)). \tag{6.3.10}$$

În cazul particular al comportării liniare a elementelor acumulatoare, cu cauzalitate derivativă, relația (6.3.10) poate fi scrisă drept:

$$\mathbf{z}^d(t) = \mathbf{K}_F^d \mathbf{x}^d(t), \tag{6.3.11}$$

unde $\mathbf{K}_F^d$ este o matrice diagonală cu coeficienți de forma k_C sau k_I (corespunzând cauzalității derivative).

Blocul corespunzător elementelor disipative este caracterizat prin relația vectorială statică dintre $\mathbf{d}_{out}$ şi $\mathbf{d}_{in}$ de forma (în general neliniară):

$$\mathbf{d}_{out}(t) = \mathbf{\Psi}_R(\mathbf{d}_{in}(t)). \tag{6.3.12}$$

În cazul particular al comportării liniare a elementelor disipative, relația (6.3.12) poate fi scrisă drept:

$$\mathbf{d}_{out}(t) = \mathbf{K}_R \mathbf{d}_{in}(t), \tag{6.3.13}$$

unde $\mathbf{K}_R$ este o matrice diagonală cu coeficienți de forma k_R (corespunzând cauzalității rezistive) sau $1/k_R$ (corespunzând cauzalității conductive).

6.3.4. Exemple

Exemplul 6.3.1

Se consideră sistemul mecanic reprezentat în fig. 6.3.4. format dintr-o pârghie de gradul întâi având brațele de lungime a şi respectiv b, la extremitatea fiecăruia fiind fixată câte o masă de mărime m_a, respectiv m_b. Asupra masei de mărime m_a acționează o forță $F(t)$. De extremitatea de care este atașată masa m_b mai este fixat capătul unui arc elicoidal de constantă elastică k_e şi care este prins la celălalt capăt de un amortizor vâscos având constanta de amortizare γ. Se consideră că sistemul se găseşte într-un plan orizontal şi, prin urmare, forțele de greutate sunt perpendiculare pe planul figurii şi că se neglijează orice pierderi de energie prin frecare cu excepția celor din amortizor.

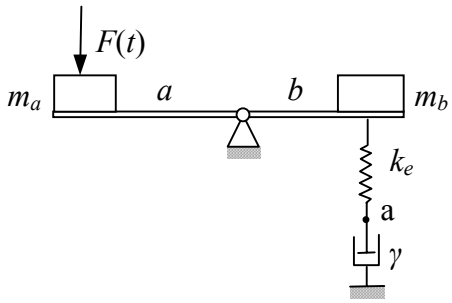


Fig. 6.3.4. Sistem mecanic cu pârghie, arc şi amortizor

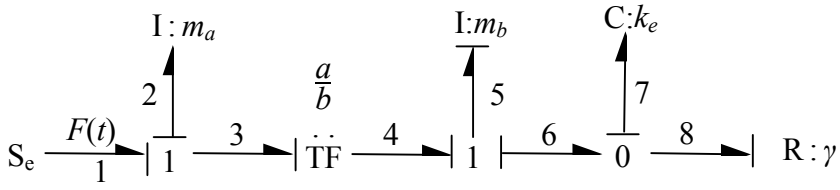


Fig. 6.3.5. Bond-graph-ul sistemului mecanic reprezentat în fig. 6.3.4

Bond-graph-ul sistemului este reprezentat în fig. 6.3.5. Considerându-se în cauzalitate integrală elementele I_5 şi C_7, elementul I_2 a rezultat în cauzalitate derivativă, prin urmare sistemul este unul multiport cu cauzalitate mixtă. Bondurile 3, 4 şi 6 sunt bonduri interne în raport cu structura de tip joncțiune, iar bondurile 1, 2, 5, 7 şi 8 sunt bonduri externe în raport cu structura de tip joncțiune. Bondul 1 este corespunzător unei surse de efort, bondul 2 este corespunzător unui element inerțial în cauzalitate derivativă, bondurile 5 şi 7 sunt corespunzătoare unui element inerțial şi unui element capacitiv ambele în cauzalitate integrală iar bondul 8 este corespunzător unui element disipativ.

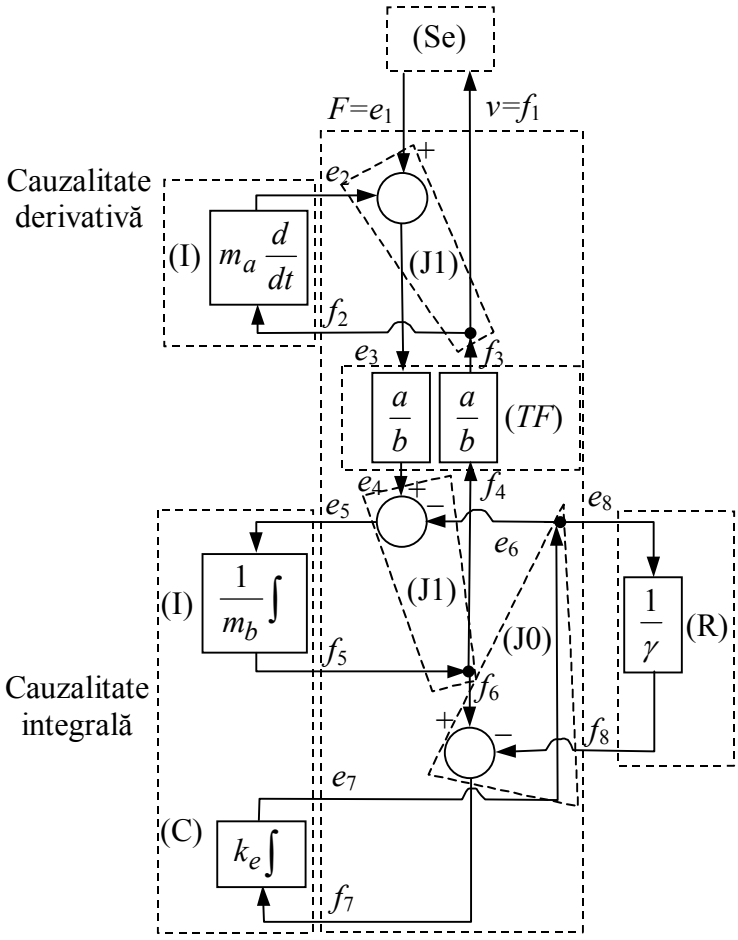


Fig. 6.3.6. Reprezentarea sistemului mecanic din fig. 6.3.4 ca sistem multiport, sub formă de diagramă bloc

Reprezentarea sub formă de schemă bloc care pune în evidență structura de sistem multiport în conformitate cu fig. 6.3.3.b, este desenată în fig. 6.3.6. Utilizând pentru semnale notațiile generale din fig. 6.3.3.b, rezultă următoarea semnificație concretă:

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \begin{bmatrix} e_5 \\ f_7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}^i = \begin{bmatrix} f_5 \\ e_7 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{x}}^d = [e_2], \qquad \mathbf{z}^d = [f_2],$$

$$\mathbf{d}_{in} = [e_8], \qquad \mathbf{d}_{out} = [f_8],$$

$$\mathbf{u} = [e_1], \qquad \mathbf{v} = [f_1].$$

6.4. Comutatoare şi sisteme hibride

În aplicațiile inginereşti se întâlnesc frecvent sisteme fizice ce conțin dispozitive cu rol de comutator, cum ar fi relee, diode, tiristoare, ambreiaje mecanice, robinete închis-deschis etc.

Într-un atare sistem fizic, structura interacţiunilor energetice se modifică pe parcursul timpului şi, drept urmare, sunt necesare modele adecvate, capabile să surprindă atât *dinamica continuă* dintre două modificări succesive ale structurii, cât şi *mecanismul discret în timp* al producerii comutărilor. Datorită complementarităţii continuu-discret în timp pe care o manifestă în funcţionare, sistemele fizice de această natură sunt desemnate, uzual, drept "sisteme hibride", iar descrierea modului lor de operare face apel la "modele hibride". Terminologia de sistem sau model hibrid este de dată relativ recentă, izvorând din teoria controlului automat care, în ultimul deceniu, a acordat o atenţie deosebită dezvoltării formalismelor matematice ce tratează interfaţarea fenomenelor continue cu evenimente discrete.

Limbajul bond-graph pune la dispoziţie instrumente eficiente pentru modelarea funcţionării comutatoarelor şi, în mod implicit, pentru construcţia modelelor hibride. În cele ce urmează, în această secţiune, vom expune două metodologii diferite de modelare a comutatoarelor, care sunt deopotrivă utilizate pentru descrierea comportării sistemelor hibride. Fără a intra în nici un fel de detalii, precizăm totuşi că limbajul bond-graph nu constituie singura tehnică folosită în prezent pentru elaborarea modelelor hibride.

6.4.1. Modelarea comutatoarelor ca elemente rezistive controlate

În cadrul acestei metodologii de modelare adaptată după (Dauphin – Tanguy *et al.*, 1989), comutatoarelor li se asociază, în descrierea de tip bond-graph, elemente rezistive controlate după următorul principiu:

Fig.6.4.1. Stările unui comutator a cărui funcţionare face obiectul modelării în limbajul bond-graph: **(a)** comutator închis; **(b)** comutator deschis.

a) Când comutatorul este închis (fig.6.4.1.a) elementul rezistiv asociat are rezistenţă foarte mică, sau, echivalent, conductanţă foarte mare.
b) Când comutatorul este deschis (fig.6.4.1.b) elementul rezistiv asociat are rezistenţă foarte mare, sau, echivalent, conductanţă foarte mică.

Având în vedere că un element rezistiv controlat ce modelează funcţionarea unui comutator poate avea, în bond-graph-ul cauzal, fie *cauzalitate conductivă*, fie *cauzalitate rezistivă*, se impune următoarea detaliere a caracteristicii $f(e)$ şi respectiv $e(f)$ a elementului rezistiv, conform fig.6.4.2.

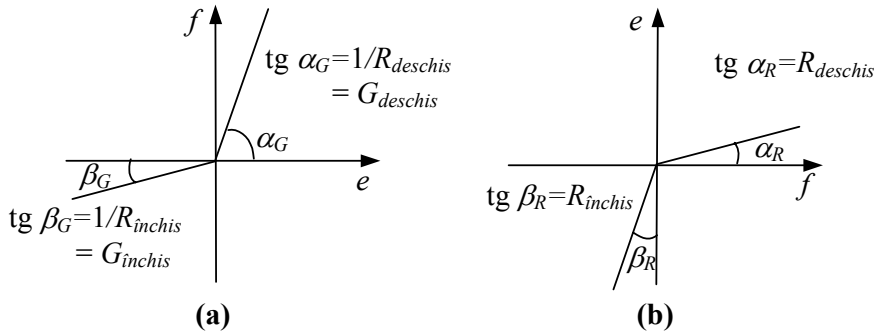


Fig.6.4.2. Caracteristicile elementului rezistiv controlat care modelează funcţionarea unui comutator: **(a)** cauzalitatea elementului controlat este de tip conductiv; **(b)** cauzalitatea elementului controlat este de tip rezistiv.

- Dacă elementul rezistiv se află în bond-graph în conexiune cauzală conductivă, atunci dependența $f(e)$ este cea ilustrată în fig.6.4.2.(a):

$$f(e)=\begin{cases}\dfrac{1}{R_{deschis}}e=G_{deschis}e, & e>0,\\ 0, & e=0,\\ \dfrac{1}{R_{inchis}}e=G_{inchis}e, & e<0.\end{cases} \qquad (6.4.1)$$

Controlul elementului rezistiv se realizează modulând conductanța acestuia prin intermediul semnalului *e* conform specificației bond-graph din fig.6.4.3.(a).

- Dacă elementul rezistiv se află în bond-graph în conexiune cauzală rezistivă, atunci dependența $e(f)$ este cea ilustrată în fig.6.4.2.(b):

$$e(f)=\begin{cases}R_{deschis}f, & f>0,\\ 0\ , & f=0,\\ R_{inchis}f, & f<0.\end{cases} \qquad (6.4.2)$$

Controlul elementului rezistiv se realizează modulând rezistența acestuia prin intermediul semnalului *f*, conform specificației bond-graph din fig.6.4.3.(b).

Atragem atenția asupra faptului că atât explicitarea $f(e)$ dată de (6.4.1), cât şi explicitarea $e(f)$ dată de (6.4.2) corespund unei *aceleaşi relații implicite* dintre *e* şi *f*, ceea ce face ca să nu aibă importanță cauzalitatea asigurată elementului rezistiv controlat ce modelează funcționarea comutatorului. Cu alte cuvinte, în construcția bond-graph-ului cauzal nu trebuie manifestată nici o preferință privind atribuirea cauzalității pentru elementele rezistive controlate ce modelează comutatoare, urmărindu-se aplicarea regulilor de uz general cunoscute din capitolul 5.

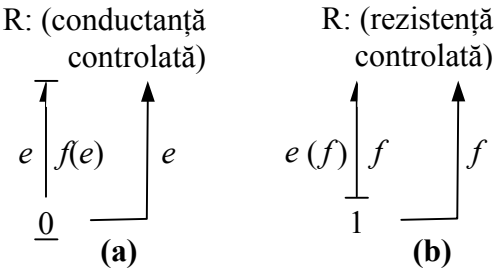


Fig.6.4.3. Descrierea în limbaj bond-graph a controlului unui element rezistiv care modelează funcționarea unui comutator: **(a)** controlul conductanței prin semnal *e*; **(b)** controlul rezistenței prin semnal *f*.

Valorile $R_{deschis}$ şi $R_{închis}$ necesare descrierii elementului controlat se vor alege în concordanță cu specificațiile tehnice ce caracterizează construcția şi funcționarea comutatoarelor ca obiecte fizice concrete.

Metodologia de modelare prezentată în acest paragraf poate fi transpusă în limbajul sistemelor multiport (tratate în secțiunea precedentă a acestui capitol) prin reprezentarea grafică schematizată din fig.6.4.4 care evidențiază rolul uniporturilor rezistive controlate.

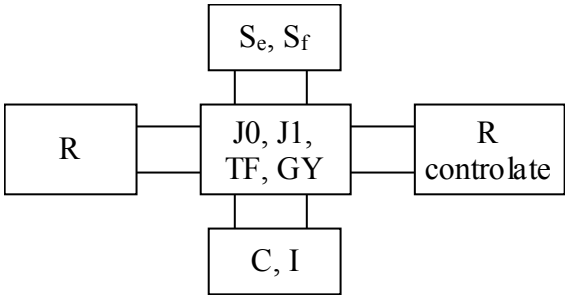


Fig.6.4.4. Reprezentarea în limbajul sistemelor multiport a structurii de sistem hibrid ce rezultă conform metodologiei de modelare din paragraful 6.4.1.

6.4.2. Modelarea comutatoarelor ca surse ideale de putere nulă

În cazul acestei metodologii de modelare adaptată după (Söderman *et al*., 1993), (Strömberger and Söderman, 1995), comutatorul este introdus *ca un element nou de sine stătător* al limbajului bond-graph, adăugat la setul de nouă elemente standard prezentate în Capitolul 5. Cu alte cuvinte, nu se va mai face apel la un element bond-graph deja definit pentru a descrie funcționarea comutatoarelor (ca în paragraful precedent).

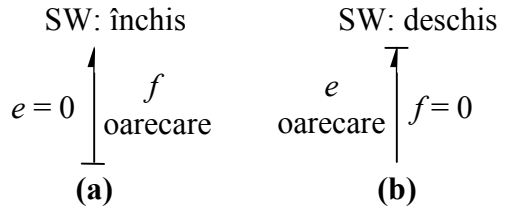


Fig.6.4.5. Transformarea unui element SW într-o sursă ideală de putere nulă, în urma atribuirii cauzalității: **(a)** comutatorul închis devine o sursă ideală de efort nul; **(b)** comutatorul deschis devine o sursă ideală de flux nul

Elementul comutator notat SW (de la termenul englezesc "Switch") este un uniport care se ataşează în joncțiunile J0 sau J1 ale *bond-graph-ului cauzal*, în conformitate cu modul de conectare a dispozitivului ce realizează comutarea (în contextul structurii sistemului fizic căruia îi aparține). În etapa de asigurare a cauzalității, *fiecare element* SW devine o sursă ideală de putere nulă, după următorul principiu, ilustrat grafic în fig.6.4.5.

A. Dacă comutatorul modelat prin elementul SW este închis (fig.6.4.1.a), atunci SW joacă rolul unei *surse ideale de efort nul* (care poate prelua orice flux), conform fig.6.4.5.a.

B. Dacă comutatorul modelat prin elementul SW este deschis (fig.6.4.1.b), atunci SW joacă rolul unei *surse ideale de flux nul* (care poate prelua orice efort), conform fig.6.4.5.b.

Subliniem faptul că, în baza principiului detaliat mai sus, atribuirea cauzalității tuturor elementelor SW se realizează cu maximă prioritate (vezi asignarea cauzalității surselor discutată în Capitolul 5). Aşadar poziția (închis, respectiv deschis) pe care o are un comutator atrage, după caz, cauzalități diferite pentru elementul SW care îl modelează şi, implicit, conduce la moduri diferite de asignare a cauzalității şi pentru bondurile corespunzătoare altor porturi din bond-graph.

În general vorbind, metoda studiată operează cu un *bond-graph acauzal unic* din care rezultă *mai multe bond-graph-uri cauzale*, numărul acestora fiind dat de numărul de configurații închis/deschis distincte care se pot crea cu toate comutatoarele existente în sistem. Astfel, dacă un sistem conține n comutatoare, numărul maxim de configurații realizate este 2^n, adică vom avea maximum 2^n bond-graph-uri cauzale. În multe situații, nu toate cele 2^n configurații ale comutatoarelor sunt posibile din punct de vedere fizic, ceea ce permite reducerea numărului de bond-graph-uri cauzale distincte, care trebuie avute în vedere. Pe de altă parte, în lipsa unei intuiții fizice privind combinațiile de comutatoare care nu au justificarea practică, se vor construi toate cele 2^n bond-graph-uri cauzale şi, din examinarea contradicțiilor ce apar în asignarea cauzalității, vor putea fi depistate acele configurații de comutatoare ce nu pot fi realizate pe parcursul funcționării.

Metodologia de modelare prezentată în acest paragraf poate fi transpusă în limbajul sistemelor multiport (tratate în secțiunea precedentă a acestui capitol) prin reprezentarea grafică schematizată din fig.6.4.6 care ilustrează transformarea topologiei acauzale unice în mai multe topologii cauzale.

Încheiem această secțiune printr-o discuție detaliată a problemelor ce apar prin asignarea cauzalității într-o joncțiune la care este conectat un element SW. Pentru fiecare din cazurile a) şi b) analizate mai sus, vom lua în discuție situațiile:

1) Elementul SW este conectat la o joncțiune J0;

2) Elementul SW este conectat la o joncțiune J1.

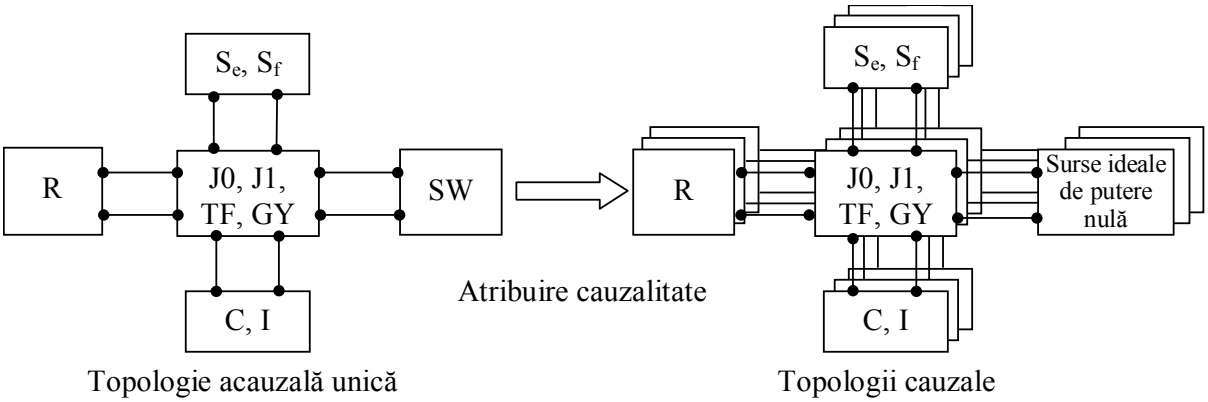


Fig.6.4.6. Reprezentarea în limbajul sistemelor multiport a transpunerii bond-graph-lui acauzal unic în mai multe bond-graph-uri cauzale, conform metodologiei din paragraful 6.4.2.

În scopul facilitării înțelegerii acestor aspecte vom asocia prezentării în termeni bond-graph şi o prezentare în contextul particular al sistemelor (circuitelor) electrice. Pentru aceasta vom face apel la ilustrarea grafică din tabelul 6.4.1. Astfel, pentru un comutator modelat printr-un element SW, distingem următoarele posibilități de asignare a cauzalității în joncțiunea unde este conectat SW, cu efectele menționate în ultima coloană a tabelului.

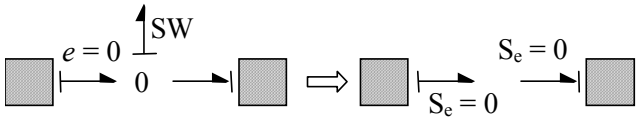
A1) Dacă comutatorul este închis şi elementul SW asociat este conectat într-o joncțiune J0, atunci SW va fixa efort nul pe J0 şi, drept efect, SW dispare, J0 dispare, iar celelalte porturi conectare la J0 se separă (fiecare dintre ele primind o sursă de efort nul pe bond-ul rămas liber prin dispariția lui J0).

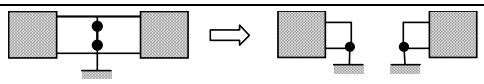
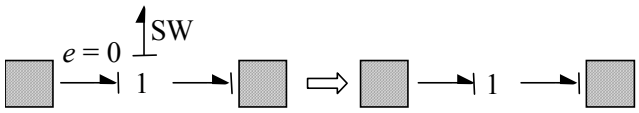
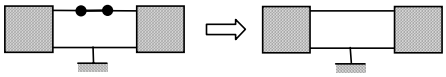
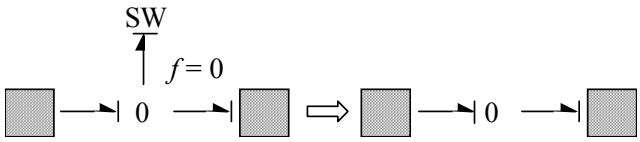
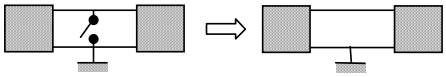
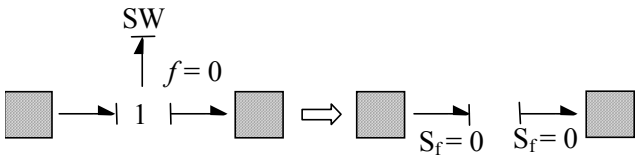
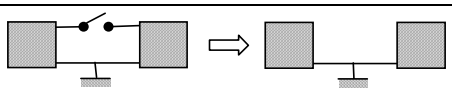
A2) Dacă comutatorul este închis şi elementul SW asociat este conectat într-o joncțiune J1, atunci SW va contribui cu efort nul în bilanțul de eforturi al lui J1 şi, drept efect, SW dispare, iar J1 (fără diportul corespunzător lui SW) se păstrează neschimbat.

B1) Dacă comutatorul este deschis şi elementul SW asociat este conectat într-o joncțiune J0, atunci SW va contribui cu flux nul în bilanțul de fluxuri al lui J0 şi, drept efect, SW dispare, iar J1 (fără diportul corespunzător lui SW) se păstrează neschimbat.

B2) Dacă comutatorul este deschis şi elementul SW asociat este conectat într-o joncțiune J1, atunci SW va fixa flux nul pe J1 şi, drept efect, SW dispare, J1 dispare, iar celelalte porturi conectate la J1 se separă (fiecare dintre ele primind o sursă de flux nul pe bond-ul rămas liber prin dispariția lui J1.

Tabelul 6.4.1. Efectul atribuirii cauzalității în joncțiunea pe care este conectat elementul SW (ilustrare prin reprezentare bond-graph şi prin particularizare pentru sisteme electrice)

Cazul considerat	Explicitare	Tipul reprezentării	Efectul rezultat prin asignarea cauzalității în joncțiune
A1	SW: închis conectat în J0	bond-graph	

		sistem electric	
A2	SW: închis conectat în J1	bond-graph	
		sistem electric	
B1	SW: deschis conectat în J0	bond-graph	
		sistem electric	
B2	SW: deschis conectat în J1	bond-graph	
		sistem electric	

Atragem atenția că, în unele situații, bond-graph-ul cauzal rezultat, poate fi prelucrat în continuare în sensul simplificării topologiei, conform regulilor prezentate în Capitolul 5.

Încheiem acest paragraf cu precizarea că, prin scrierea ecuațiilor intrare-stare-ieşire aferente tuturor bond-graph-urilor cauzale, se va ajunge la o *descriere de tip multi-model* a funcționării sistemului. Cu alte cuvinte, descrierea completă va conține mai multe modele de stare, care se succed în conformitate cu configurația comutatoarelor. *Modelul hibrid* rezultă astfel ca o concatenare de modele standard, de tipul intrare-stare-ieşire.

6.4.3. Exemple

În acest paragraf, vom ilustra construcția modelelor hibride pentru un sistem fizic care conține dispozitive de comutare. Sistemul considerat este un convertor de putere cu o schemă funcțională foarte simplă, în care comutările sunt asigurate de două diode şi pot fi modelate atât prin metoda elementelor rezistive controlate cât şi prin metoda surselor ideale de putere nulă. Alegerea unui astfel de circuit electric este motivată de faptul că circuitele convertoare de putere reprezintă o clasă tipică de sisteme hibride, a căror funcționare în regim de comutație poate fi abordată eficient prin tehnicile de modelare discutate în secțiunea curentă.

Exemplul 6.4.1.

Se consideră circuitul de redresare dublă alternanță din fig.6.4.7.(a) unde sursa de tensiune furnizează $u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$. Pentru a simplifica descrierea funcționării, în fig.6.4.7.(b), sursa de tensiune alternativă şi transformatorul cu priză mediană în secundar sunt înlocuite prin sursele de tensiune în opoziție de fază $u_1(t) = -u_2(t) = 110\sqrt{2}\sin(100\pi t)$.

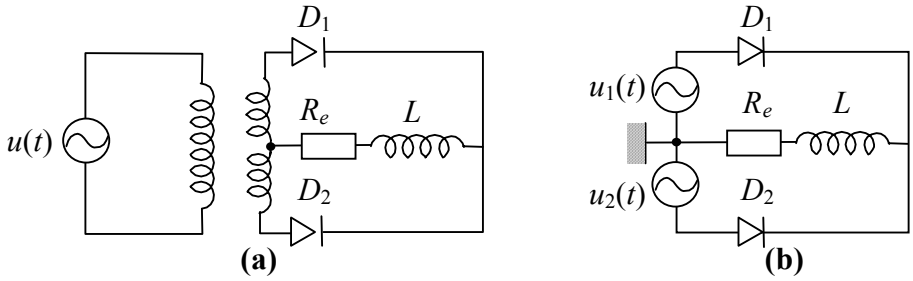


Fig.6.4.7. Redresorul dublă alternanță utilizat în Exemplul 6.4.1. **(a)** circuitul inițial; **(b)** circuitul modificat prin înlocuirea sursei $u(t)$ şi a transformatorului, a cărui funcționare este modelată.

Drept mărime de ieşire $y(t)$ se consideră curentul prin bobină. Pentru construirea bond-graph-ului, vom modela diodele D_1 şi D_2 prin elemente rezistive controlate, conform celor discutate în paragraful 6.4.1. Bond-graph-ul acauzal este prezentat în fig.6.4.8., unde uniporturile rezistive R_2 şi R_5 sunt asociate diodelor D_1 şi respectiv D_2, având parametrii R_{D1} şi R_{D2} ale căror valori sunt controlate conform detalierii din bond-graph-ul cauzal.

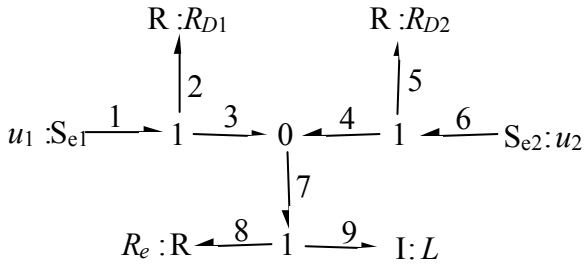


Fig. 6.4.8. Bond-graph-ul acauzal corespunzător circuitului din fig. 6.4.7(b) în care D_1 şi D_2 sunt modelate prin uniporturile rezistive R_2 şi R_5.

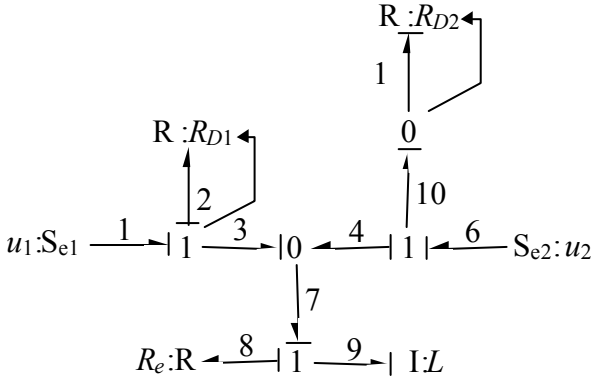


Fig.6.4.9. Bond-graph-ul cauzal corespunzător circuitului din fig. 6.4.7(b) în care D_1 şi D_2 sunt modelate prin uniporturile rezistive controlate R_2 şi R_5.

În construcția bond-graph-ului cauzal, se constată că atribuirea cauzalității integrale pentru elementul inductiv va face ca efortul în joncțiunea J0 să fie impus fie de bond-ul 3, fie de bond-ul 4. Decidem ca bond-ul 3 să fie cel care impune efortul în J0 şi, fără a mai explicita etapele intermediare (cu care presupunem că cititorul este deja familiarizat), prezentăm direct bond-graph-ul cauzal din fig.6.4.9. Mai facem, totuşi, observația că desemnarea bond-ului 4 drept cel care impune efortul în J0 ar conduce la o topologie simetrică cu cea din fig.6.4.9, fără a ridica probleme suplimentare în raport cu tratarea ce urmează.

Se observă că uniportul R_2 este controlat prin fluxul f_3 (conform schemei din fig.6.4.3.(b) şi a caracteristicii de tip rezistiv din fig.6.4.2.(b)), în timp ce uniportul R_5 este controlat prin efortul e_{10} (conform schemei din fig.6.4.3.(a) şi a caracteristicii de tip conductiv din fig.6.4.2.(b)). Pentru a reprezenta mecanismul de control al conductanței diportului R_{10}, a fost introdusă o joncțiune J0 suplimentară şi bond-ul numerotat 10 în fig.6.4.9. Valorile $R_{deschis}$ şi $R_{închis}$ ce caracterizează funcționarea diodelor D_1 şi D_2 se precizează în raport cu tipul acestora, în general ele fiind de ordinul $10^4\Omega$ şi respectiv $10^{-1}\Omega$.

În scrierea ecuațiilor cu ajutorul bond-graph-ului cauzal din fig.6.4.9, vom utiliza notațiile generice L şi R_e pentru parametrul bobinei şi respectiv al rezistenței, iar prin $R_{D1}(f_3)$ şi $G_{D2}(e_5)$ sunt desemnate mecanismele de control ale uniporturilor rezistive R_2 şi R_5 asociate celor două diode. Astfel putem scrie ecuația diferențială în variabilă de ieşire f_9:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) = e_7(t)$$

şi următoarele ecuații algebrice

$$e_7(t) = e_1(t) - R_{D1}(f_1(t))f_1(t),$$

$$e_5(t) = e_6(t) - e_7(t),$$

$$f_9(t) = f_1(t) + G_{D2}(e_5(t))e_5(t),$$

care permit, la fiecare moment de timp, exprimarea membrului drept al ecuației diferențiale de mai sus, adică a lui $e_7(t)$ în funcție de variabila $f_9(t)$ şi sursele de tensiune $e_1(t) = u_1(t)$, $e_6(t) = u_2(t)$. Precizăm că existența unei atare exprimări nu trebuie înțeleasă în sensul strict al explicitării analitice prin înlocuire (care, în cazul de față nu este profitabilă), ci ca un mod implicit de definite a lui $e_7(t)$, care permite abordarea numerică a rezolvării ecuației diferențiale pentru a simula funcționarea redresorului.

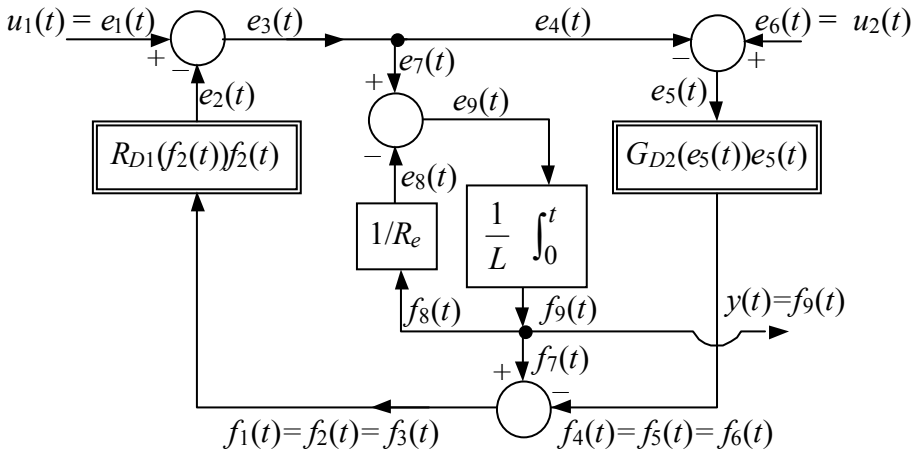


Fig.6.4.10. Schema bloc ce modelează funcționarea circuitului din fig.6.4.7(b)

Pornind de la bond-graph-ul cauzal din fig.6.4.9, se construieşte imediat şi schema bloc din fig.6.4.10, ce modelează funcționarea circuitului din fig.6.4.7(b). Prin examinarea diagramei se pot pune în evidență următoarele aspecte definitorii pentru funcționarea redresorului:

Atât timp cât $u_1(t) > 0$, presupunem că avem $e_3(t) > 0$ şi $f_9(t) > 0$. Rezultă $e_5(t) < 0$ şi $f_5(t) < 0$, $|f_5(t)|$ mic (conform fig.6.4.2(a)). Din $e_3(t) > 0$, rezultă că presupunerea $f_9(t) > 0$ se verifică. Cum $f_5(t)$ este neglijabil, avem $f_2(t) \simeq f_9(t) > 0$. Conform fig.6.4.2(b), rezultă $e_2(t) > 0$, $|e_2(t)|$ mic.

Aşadar $e_2(t)$ poate fi neglijat şi avem $e_3(t) \simeq u_1(t)$ adică presupunerea $e_3(t) > 0$ se verifică. Per global, aceste remarci conduc la concluzia că, dacă se neglijează curentul mic $f_5(t)$ prin D_2 blocată şi tensiunea mică $e_2(t)$ pe D_1 în conducție, atunci putem scrie:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) \simeq u_1(t),\ u_1(t) \geq 0\,.$$

În mod perfect analog vom ajunge prin simetrie şi la concluzia:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) \simeq u_2(t),\ u_2(t) \geq 0\,.$$

Este evident acum că aceste ultime constatări asigură înțelegerea deplină a sensului ecuației diferențiale obținute mai înainte:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) = e_7(t)$$

şi a condițiilor algebrice care leagă $e_7(t)$ de $f_9(t), u_1(t), u_2(t)$.

Exemplul 6.4.2.

Ne plasăm în contextul Exemplului 6.4.1, cu singura deosebire că diodele D_1, D_2 vor fi modelate drept surse ideale de putere nulă, conform metodologiei prezentate în paragraful 6.4.2.

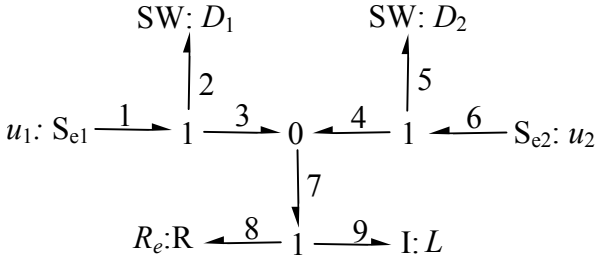


Fig.6.4.11. Bond-graph-ul acauzal unic corespunzător circuitului din fig.6.4.7(b), utilizând elemente comutator SW_1 pentru modelarea diodelor D_1, D_2.

Bond-graph-ul acauzal unic asociat circuitului din fig.6.4.7(b) are topologia din fig.6.4.11, în care uniporturile de tip comutator SW sunt asociate diodelor D_1, D_2.

Facem observația importantă că la acest moment, adică înainte de a trece la asignarea cauzalității, topologiile bond-graph-urilor acauzale, construite prin metodele expuse în paragrafele 6.4.1 şi 6.4.2 coincid, cu excepția semnificației uniporturilor ce modelează dispozitivele de comutare.

Prin atribuirea cauzalității, din bond-graph-ul acauzal unic vor rezulta mai multe bond-graph-uri cauzale unice. Întrucât avem $n = 2$ comutatoare, fiecare putând fi închis sau deschis, ar trebui să analizăm 4 situații distincte de asignare a cauzalității, pentru a acoperi toate configurațiile realizabile cu cele două comutatoare. Totuşi, din modul de funcționare elementar al circuitului din fig.6.4.7(b), se constată imediat că fizic nu pot apărea decât următoarele două cazuri:

(1) D_1 în conducție (comutator închis) şi D_2 blocată (comutator deschis);

(2) D_1 blocată (comutator deschis) şi D_2 în conducție (comutator închis).

Atragem atenția în mod deosebit asupra exprimării de mai sus, pentru a evita orice confuzie de limbaj, ce ar putea proveni din utilizarea termenilor "deschis" sau "închis". Astfel sintagma "diodă deschisă" înseamnă "comutator închis" şi invers, sintagma "diodă închisă" înseamnă "comutator deschis".

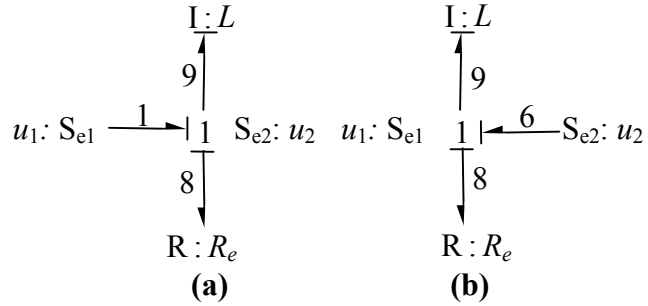


Fig.6.4.12. Bond-graph-urile cauzale corespunzătoare funcționării circuitului din fig.6.4.7(b).
(a) D_1 în conducție, D_2 blocată;
(b) D_1 blocat, D_2 în conducție.

În *cazul* (1), avem SW: D_1 închis conectat la J1 (adică situația A2 din tabelul 6.4.1) şi SW: D_2 deschis conectat la J1 (adică situația B2 din tabelul 6.4.1). Astfel, în urma unor operațiuni de simplificare a topologiei, rezultă bond-

graph-ul cauzal din fig.6.4.12.a. În *cazul* (2), avem SW: D_1: deschis conectat la J1 (adică situația B2 din tabelul 6.4.1) şi SW: D_2 închis conectat la J1 (adică situația A2 din tabelul 6.4.1). Astfel, în urma unor operațiuni de simplificare a topologiei, rezultă bond-graph-ul cauzal din fig.6.4.12.b. Observăm cu uşurință că simetria perfectă a cazurilor (1) şi (2) atrage simetria bond-graph-urilor cauzale din fig.6.4.12.a şi b.

Ca şi în Exemplul 6.4.1, în scrierea ecuațiilor cu ajutorul bond-graph-urilor cauzale, vom utiliza notațiile L şi R_e pentru parametrul bobinei şi respectiv al rezistenței. Totodată, pentru bond-urile care conectează în fig.6.4.12 uniporturile R şi I, vom păstra indicii 8 şi 9 din bond-graph-ul acauzal.

Astfel, pentru bond-graph-ul cauzal din fig.6.4.12.a putem scrie ecuația diferențială:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) = u_1(t),\ u_1(t) \geq 0 \ \ (D_1 \text{ conduce}, D_2 \text{ blocată})$$

iar pentru bond-graph-ul cauzal din fig.6.4.12(b) putem scrie ecuația diferențială:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) = u_2(t),\ u_2(t) \geq 0 \ \ (D_1 \text{ blocată}, D_2 \text{ conduce}).$$

Modelul complet al funcționării redresorului constă, aşadar, din succesiunea în timp, cu o perioadă de 10 ms, a celor două submodele de tip ecuație diferențială liniară de ordinul I, determinate anterior.

Cum membrii stângi coincid, iar între membrii drepți există relația:

$$u_1(t) = -u_2(t) = u(t)/2,$$

vom avea, drept model complet, ecuația:

$$L\dot{f}_9(t) + R_e f_9(t) = |u(t)|/2.$$

Observație: În cazul acestui redresor simplu, modul de funcționare oferă indicații ferme asupra configurațiilor de comutatoare valide şi chiar asupra modului de construire rapidă a modelului complet (prin eliminarea acelei ramuri de circuit unde dioda este blocată).

Dacă însă informațiile din fizică nu ne permit să intuim aceste configurații de comutatoare care se realizează pe parcursul funcționării, putem construi toate bond-graph-urile cauzale ce rezultă din bond-graph-ul acauzal şi, ulterior, analizăm validitatea acestora. De pildă, în situația exemplului nostru, am luat în discuție numai combinațiile de comutatoare desemnate anterior drept (1) şi (2) care au condus la cele două bond-graph-uri din fig.6.4.12. Să extindem studiul şi pentru celelalte două cazuri rămase neanalizate şi anume:

(3) D_1 în conducție şi D_2 în conducție;

(4) D_1 blocată şi D_2 blocată.

Vom presupune că nu respingem aceste posibilități din considerente fizice şi dorim să construim bond-graph-urile cauzale aferente.

În cazul (3) avem SW: D_1 închis conectat la J1 şi SW: D_2 închis conectat la J1 (adică ambele comutatoare în situația A2 din tab.6.4.1). Rezultă bond-graph-ul din fig.6.4.13.a cu *conflict de cauzalitate* în joncțiunea J0. În cazul (4) avem SW: D_1 deschis conectat la J1 şi SW: D_2 deschis conectat la J1 (adică ambele comutatoare în situația B2 din tab.6.4.1). Rezultă bond-graph-ul din fig.6.4.13.b cu *conflict de cauzalitate* în joncțiunea J0. Cu alte cuvinte cazurile (3) şi (4) nu corespund unor configurații de comutatoare realizabile practic.

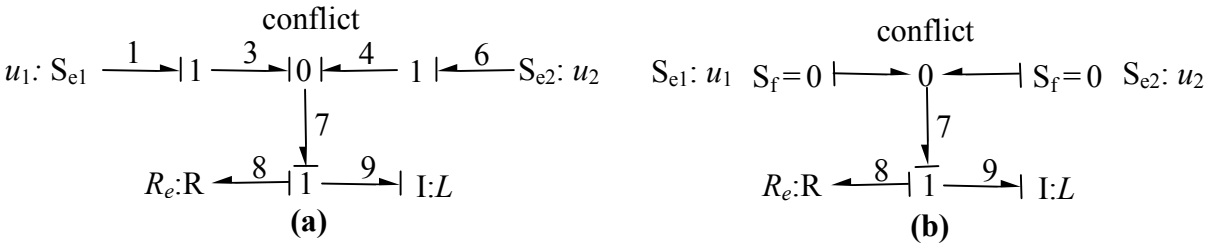


Fig.6.4.13. Bond-graph-uri cu conflicte de cauzalitate corespunzătoare configurațiilor de comutatoare ce nu pot fi realizate fizic în funcționarea circuitului din fig.6.3.7.b
(a) D_1 în conducție, D_2 în conducție ; **(b)** D_1 blocată, D_2 blocată.

Exemplul 6.4.3.

Se consideră schema simplificată a operației de rabotare din fig. 6.4.14. Pe masa mașinii se găsește un semifabricat de masă m care este acționat de o forță F și se deplasează cu viteza v. Forța de așchiere este notată F_a. Atunci când semifabricatul se mișcă spre dreapta, are loc operația de așchiere și acționează forța F_a. Atunci când semifabricatul se mișcă spre stânga, așchierea nu se mai produce, iar forța F_a nu mai acționează. Astfel, putem privi acțiunea forței F_a ca fiind separată de restul sistemului printr-un comutator (modelabil cu ajutorul unui element SW), ceea ce conduce la bond-graph-ul acauzal din fig. 6.4.15. Prin asignarea cauzalității se obțin situațiile A2 și, respectiv, B2 din tabelul 6.4.1, rezultând bond-graph-urile cauzale din fig. 6.4.16.a și, respectiv, fig. 6.4. 16.b.

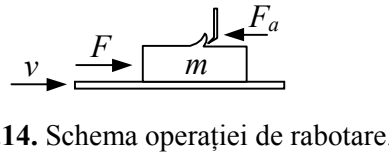


Fig. 6.4.14. Schema operației de rabotare.

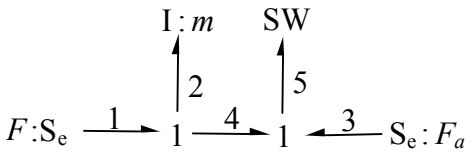


Fig. 6.4.15. Bond-graph-ul acauzal corespunzător operației de rabotare.

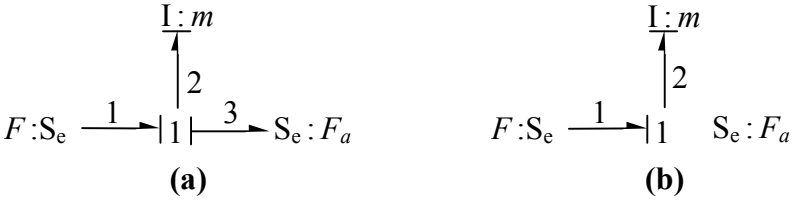


Fig. 6.4.16. Bond-graph-urile cauzale corespunzătoare operației de rabotare:
(a) SW închis (F_a acționează) , **(b)** SW deschis (F_a nu acționează)

7. Studii de caz - Modelarea unor sisteme din diverse domenii tehnice

În scopul sublinierii calităților metodei bond-graph dar şi în scopul ilustrării, prin exemple, a modului concret de aplicare a acesteia, în acest capitol va fi prezentată modelarea unor sisteme tehnice care procesează diverse tipuri de energie.

Fiecare exemplu va conține o scurtă descriere a funcționării sistemului considerat, bond-graph-ul acestuia precum şi modelele matematice ce pot fi construite pe baza bond-graph-ului (reprezentarea intrare - stare - ieşire, schema bloc şi funcția de transfer - în cazul dinamicilor liniare). Deasemenea, vor fi incluse unele comentarii privind răspunsurile sistemelor studiate la mărimi de intrare constante (această situație fiind cel mai frecvent întâlnită în exploatarea curentă).

Materialul este organizat de aşa manieră încât fiecărui studiu de caz să-i corespundă câte o secțiune a capitolului de față, după cum urmează:

7.1. Incintă încălzită cu radiator.
7.2. Servomotor hidraulic.
7.3. Pompă cu piston.
7.4. Punte Wheatstone.
7.5. Termometru.
7.6. Manipulator cu două grade de libertate.
7.7. Absorbitor dinamic cu frecare vâscoasă.
7.8. Sistem de reglare.
7.9. Motor de curent continuu.
7.10. Convertor de putere rezonant.

7.1. Incintă încălzită cu radiator

Se consideră un sistem termic reprezentat schematic în fig. 7.1.1, format dintr-o incintă având capacitatea termică C_t [J/K] care este încălzită cu ajutorul unui radiator cu ulei. O parte din fluxul termic (puterea) $P(t)=\dot{Q}(t)$ [W] produs de radiator contribuie la creşterea temperaturii instantanee $T(t)$ din incintă, iar o altă parte se disipă prin rezistența termică R_t [K/W] a pereților incintei. Temperatura mediului exterior incintei T_m este constantă şi nu este influențată prin încălzirea incintei. Se consideră că la momentul inițial temperatura incintei $T(0)$ satisface

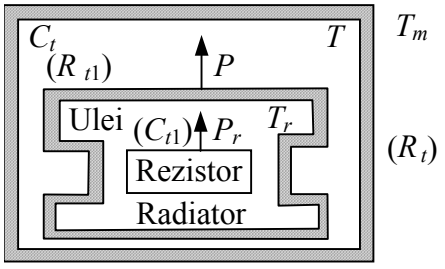


Fig. 7.1.1. Incintă încălzită cu radiator

condiția $T(0) \geq T_m$.

La rândul său, radiatorul cu ulei este încălzit de o rezistență electrică care produce fluxul termic (puterea) $P_r(t) = \dot{Q}_r(t)$ [W], uleiul din interior având capacitatea termică C_{t1}[J/K] iar pereții radiatorului rezistența termică R_{t1}[W/K]. Fluxul $P_r(t)$ trebuie să acopere disiparea din pereții radiatorului, încălzirea uleiului din radiator de la temperatura inițială $T_r(0) = T(0)$ la temperatura instantanee $T_r(t) > T(t)$ şi producerea fluxului $P(t)$ care încălzeşte incinta. Fluxul P_r şi temperatura T_m acționează drept mărimi de intrare, iar temperaturile T_r şi T_m pot fi alese drept mărimi de ieşire pentru modelul ce urmează a fi construit.

În modelul bond-graph, fluxul produs de rezistența electrică se modelează ca o sursă ideală de flux, iar mediul exterior incintei se modelează ca sursă ideală de temperatură deoarece el absoarbe orice cantitate de flux termic fără a-şi modifica temperatura (semisăgeata va fi orientată către sursă). Incinta şi uleiul din radiator se vor modela ca elemente capacitive, iar pereții radiatorului şi ai incintei se vor modela ca elemente disipative. Bond-graph-ul cauzal al acestui sistem termic este reprezentat în fig. 7.1.2. Atribuirea cauzală începe cu cele două surse şi continuă cu atribuirea cauzalității integrale celor două elemente capacitive, după care cauzalitatea se propagă pe restul bondurilor.

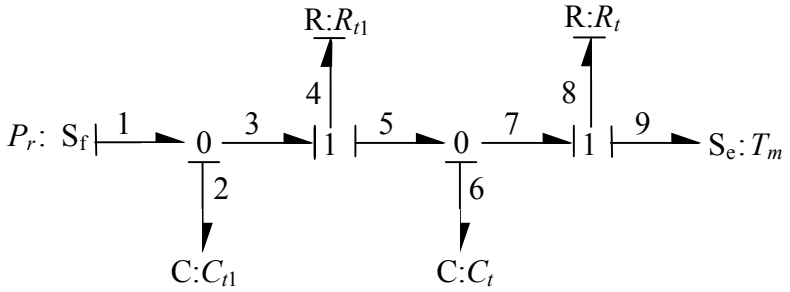


Fig. 7.1.2. Bond-graph-ul sistemului termic reprezentat în fig. 7.1.1.

Deoarece sunt două elemente capacitive în cauzalitate integrală, vor rezulta două ecuații de stare.

Ecuațiile intrare-stare-ieşire, deduse pe baza bond-graph-ului reprezentat în fig. 7.1.2, au forma:

$$\dot{Q}_2 = -\frac{1}{R_{t1}C_{t1}}Q_2 + \frac{1}{R_{t1}C_t}Q_6 + P_r,$$

$$\dot{Q}_6 = \frac{1}{R_{t1}C_{t1}}Q_2 - \frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{R_{t1}} + \frac{1}{R_t}\right)Q_6 + \frac{1}{R_t}T_m,$$

$$T_r = \frac{Q_2}{C_{t1}},$$

$$T = \frac{Q_6}{C_t},$$

dacă variabilele de ieşire sunt considerate temperatura T_r a uleiului din radiator şi temperatura T a incintei.

Sub formă matriceală, sistemul de ecuaţii intrare-stare-ieşire se scrie

$$\begin{bmatrix}\dot{Q}_2\\ \dot{Q}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_{t1}C_{t1}} & \dfrac{1}{R_{t1}C_t}\\ \dfrac{1}{R_{t1}C_{t1}} & -\dfrac{1}{C_t}\left(\dfrac{1}{R_{t1}}+\dfrac{1}{R_t}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_2\\ Q_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{R_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_r\\ T_m\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}T_r\\ T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_{t1}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{C_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_2\\ Q_6\end{bmatrix},$$

fiind de forma (2.5.2) şi (2.5.3) cu matricea **D** nulă, unde:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_{t1}C_{t1}} & \dfrac{1}{R_{t1}C_t}\\ \dfrac{1}{R_{t1}C_{t1}} & -\dfrac{1}{C_t}\left(\dfrac{1}{R_{t1}}+\dfrac{1}{R_t}\right)\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{R_t}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_{t1}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{C_t}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}P_r\\ T_m\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}Q_2\\ Q_6\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}T_r\\ T\end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată matricei **A** este:

$$s^2+\left(\frac{1}{R_{t1}C_{t1}}+\frac{1}{C_tR_{t1}}+\frac{1}{C_tR_t}\right)s+\frac{1}{R_tR_{t1}C_tC_{t1}}=0,$$

de unde rezultă că ambele autovalori ale lui **A** sunt reale şi negative. Astfel, dacă rezistorul debitează o putere constantă P_{rs}, atunci sistemul va evolua, fără oscilaţii, către un regim staţionar caracterizat prin următoarele valori constante ale variabilelor de stare

$$Q_{2s}=C_{t1}(R_{t1}+R_t)P_{rs}+C_{t1}T_m,$$

$$Q_{6s}=C_tR_tP_{rs}+C_tT_m.$$

Temperatura radiatorului în regim staţionar va fi:

$$T_{rs}=(R_{t1}+R_t)P_{rs}+T_m,$$

iar a incintei:

$$T_s=R_tP_{rs}+T_m.$$

Se constată că, în regim staţionar, puterea P_{rs} furnizată de rezistor este utilizată pentru a menţine diferenţa de temperatură T_s-T_m şi pentru a acoperi pierderile prin pereţii incintei.

Matricea de transfer este de forma (2.5.8) cu **D** nulă:

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2+\left(\frac{1}{R_{t1}C_{t1}}+\frac{1}{R_{t1}C_t}+\frac{1}{R_tC_t}\right)s+\frac{1}{R_tR_{t1}C_tC_{t1}}}\begin{bmatrix} \frac{1}{C_{t1}}\left[s+\frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{R_{t1}}+\frac{1}{R_t}\right)\right] & \frac{1}{R_tR_{t1}C_tC_{t1}} \\ \frac{1}{R_{t1}C_tC_{t1}} & \left(s+\frac{1}{R_{t1}C_{t1}}\right)\frac{1}{R_tC_t} \end{bmatrix},$$

unde funcțiile $G_{ij}(s)$ $(i,j=1,2)$ explicitează legătura dintre mărimea de intrare $u_j(t)$ (j = 1, 2) şi mărimea de ieşire $y_i(t)$ (i = 1, 2). Valorile de regim staționar T_{rs} şi T_s se pot obține din $G(s)$ cu ajutorul teoremei valorii finale referitoare la transformarea Laplace.

Schema bloc a sistemului termic reprezentat în fig. 7.1.1 este desenată în fig. 7.1.3.

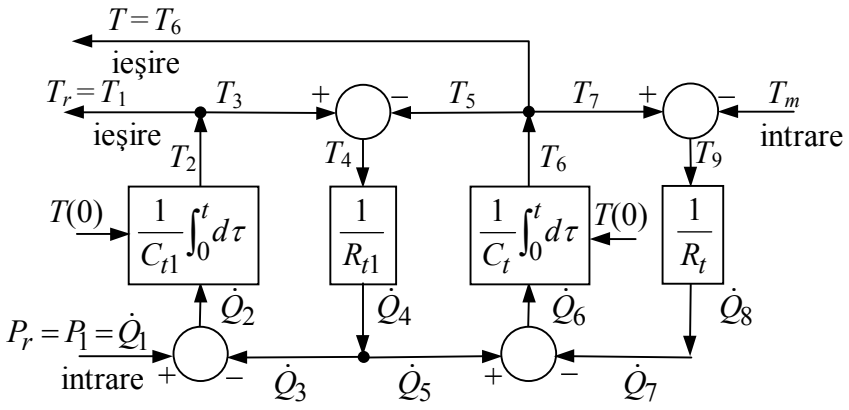


Fig. 7.1.3. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 7.1.1

7.2. Servomotor hidraulic

În fig. 7.2.1 este reprezentat schematic un servomotor hidraulic liniar acționat cu ulei incompresibil. El se compune dintr-un distribuitor hidraulic a cărui tijă de comandă, atunci când este deplasată, de exemplu spre stânga, cu distanța $x(t)$ [m] corespunzătoare punctului M, prin orificiul I va pătrunde ulei sub presiune (vezi linia întreruptă) în camera I cu debitul Q [m^3/s] şi, în acelaşi timp, se va deschide orificiul II. Astfel, pistonul de arie A se va deplasa spre dreapta cu distanța $y(t)$ [m] corespunzător punctului N, iar uleiul din camera II va fi evacuat prin orificiul II (vezi linia întreruptă) deoarece între camera I şi camera II se creează o diferență de presiune ΔP[kg/m^2]. Se consideră că debitul $Q(t)$ depinde atât de deplasarea $x(t)$ a tijei de comandă cât şi de diferența de presiunea ΔP dintre cele două camere, conform relației:

$$Q(t)=K_1x(t)-K_2\Delta P(t),$$

unde K_1 [m^2/s] şi K_2 [m^{4}s/kg] sunt constante pozitive.

Funcționarea se desfăşoară similar în cazul în care tija de comandă se deplasează spre dreapta, rezultând deplasarea pistonului spre stânga (uleiul sub presiune va pătrunde prin orificiul II în camera II iar uleiul din camera I va fi evacuat prin orificiul I).

De tija pistonului este prins solidar, în punctul N, un corp de masă m care se deplasează cu frecare vâscoasă ($k_R = \gamma$).

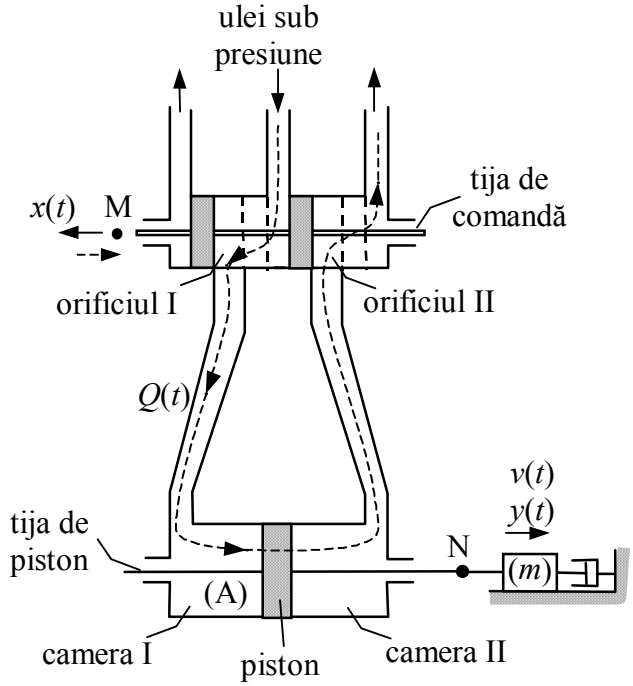


Fig. 7.2.1. Reprezentarea schematizată a unui servomotor hidraulic

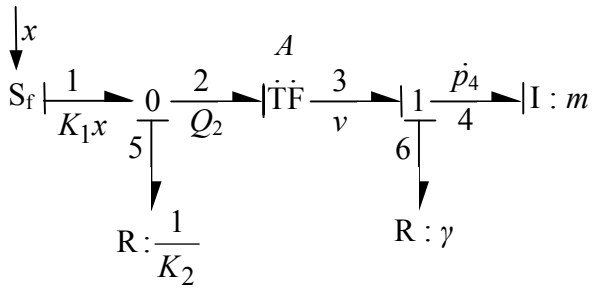


Fig. 7.2.2. Bond-graph-ul sistemului din fig. 7.2.1

Bond-graph-ul sistemului va conține o sursă controlată de flux (K_1x), un transformator care face trecerea de la parametrii puterii hidraulice la parametrii puterii mecanice $\left(k_{TF}^{1,2} = A\right)$, un element inerțial care modelează masa corpului şi un element rezistiv (γ) modelând funcționarea amortizorului. Considerând că există pierderi de debit prin neetanşeități, acestea se modelează printr-un element disipativ fluidic $R_f = 1/K_2$ conectarea acestuia făcându-se printr-o joncțiune J0. Pentru construirea modelului vom considera drept mărime de intrare deplasarea $x(t)$ a punctului M şi drept mărime de ieşire viteza $v(t)$ sau deplasarea $y(t)$ a punctului N. În final se obține bond-graph-ul din fig. 7.2.2, care conține un element inerțial în cauzalitate integrală. Drept urmare va rezulta o singură ecuație de stare în necunoscuta p_4 şi anume

$$\dot{p}_4 = -\frac{1}{m}\left(\frac{A^2}{K_2} + \gamma\right)p_4 + \frac{K_1}{K_2}Ax\,.$$

Deoarece elementul inerțial este liniar, pe baza ecuației sale constitutive

$$p_4 = mv_4 = mv$$

şi a derivatei acesteia

$$\dot{p}_4 = m\dot{v}\,,$$

se poate scrie o ecuație de funcționare în necunoscuta v, de forma:

$$m\dot{v} + \left(\frac{A^2}{K_2} + \gamma\right)v = \frac{K_1}{K_2}Ax\,.$$

Mai mult, ținând cont că $v = \dot{y}$, se poate construi o reprezentare intrare - stare - ieşire de ordinul doi, având drept intrare deplasarea $x(t)$ şi drept ieşire deplasarea $y(t)$. La rândul ei această reprezentare este echivalentă cu o ecuație diferențială de ordinul doi în necunoscuta $y(t)$ de forma:

$$\ddot{y} + \frac{1}{m}\left(\frac{A^2}{K_2} + \gamma\right)\dot{y} = \frac{K_1 A}{K_2 m} x \,.$$

Analizând ecuația diferențială în necunoscuta v, se observă că rădăcina ecuației caracteristice atașate este reală şi negativă, fapt care arată că există un răspuns staționar v_s. Pentru deplasarea $x(t)$ de valoare constantă x_s, se obține viteza constantă a masei

$$v_s = \frac{K_1 A}{A^2 + \gamma K_2} x_s \,,$$

iar, drept consecință, deplasarea $y(t)$ se modifică liniar. În aceste condiții, energia furnizată de sursă este folosită numai pentru a acoperi disipările din elementele rezistive.

Aceleaşi concluzii se trag şi atunci când se scrie funcția de transfer pentru cele două ecuații diferențiale în necunoscutele v şi respectiv y.

Pentru ecuația în necunoscuta v, funcția de transfer este

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \,,$$

unde factorul de amplificare K este

$$K = \frac{K_1 A}{A^2 + \gamma K_2} \,,$$

iar constanta de timp T este

$$T = \frac{K_2 m}{A^2 + \gamma K_2} \,.$$

Pentru ecuația în necunoscuta y, funcția de transfer este

$$G_1(s) = \frac{K}{s[Ts + 1]} = \frac{1}{s} G(s) \,,$$

care pune în evidență operația de integrare între viteza şi deplasarea masei.

Schema bloc rezultată pe baza bond-graph-ului din fig. 7.2.2 este reprezentată în fig. 7.2.3.

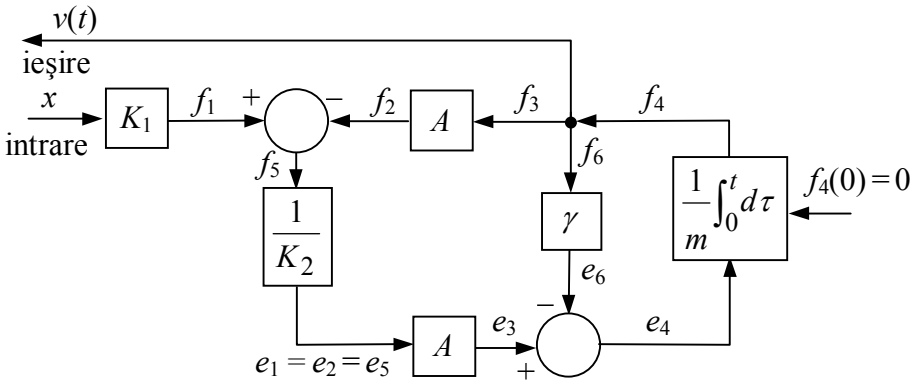


Fig. 7.2.3. Schema bloc a sistemului obținută pe baza bond-graph-ului din fig. 7.2.2

În cazul când fluidul se consideră compresibil şi se modelează şi pierderile de debit datorită compresibilității, este necesar să se introducă un element capacitiv având parametrul $k_C = C_f$ în joncțiunea J0 a bond-graph-ului din fig. 7.2.2. Se obține bond-graph-ul din fig. 7.2.4.

Elementul capacitiv va avea cauzalitate integrală şi deci vor rezulta două ecuații de stare în necunoscutele q_7 şi p_4. Dacă se consideră ca variabilă de ieşire viteza $f_4 = v$ a masei m, atunci se poate scrie o ecuație de ieşire pe baza ecuației constitutive a elementului inerțial. Sistemul de ecuații intrare-stare-ieşire este în acest caz

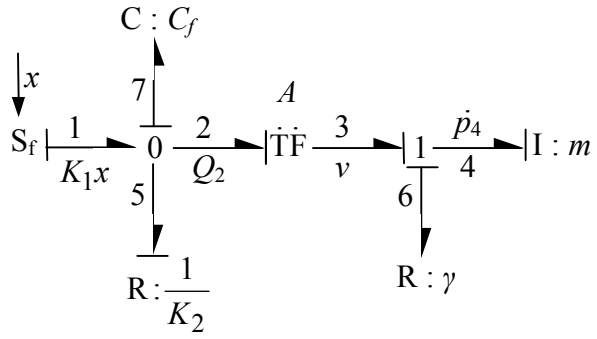


Fig. 7.2.4. Bond-graph-ul sistemului din fig. 7.2.1 în care se ține cont de compresibilitatea fluidului

$$\dot{q}_7 = -\frac{1}{C_f} K_2 q_7 - \frac{A}{m} p_4 + K_1 x\,,$$

$$\dot{p}_4 = \frac{1}{C_f} A q_7 - \frac{1}{m} \gamma\, p_4\,,$$

$$v = \frac{1}{m} p_4\,.$$

Sub formă matriceală acesta se scrie

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_7 \\ \dot{p}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_2}{C_f} & -\frac{A}{m} \\ \frac{A}{C_f} & -\frac{\gamma}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_7 \\ p_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} x\,,$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_7 \\ p_4 \end{bmatrix},$$

având deci forma (2.5.2), (2.5.3) cu matricea **D** nulă şi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_7 \\ p_4 \end{bmatrix},\ \mathbf{y} = v,\ \mathbf{u} = x,\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{K_2}{C_f} & -\frac{A}{m} \\ \frac{A}{C_f} & -\frac{\gamma}{m} \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Deoarece ecuația caracteristică ataşată matricei **A** este

$$s^2 + \left(\frac{\gamma}{m} + \frac{K_2}{C_f} \right) s + \frac{K_2 \gamma}{m C_f} + \frac{A^2}{m C_f} = 0\,,$$

având ambele rădăcini cu partea reală negativă, rezultă că există, şi în acest caz, un răspuns staționar de valoare v_s, atunci când x este constant şi egal cu x_s:

$$v_s = \frac{p_4}{m} = \frac{K_1 A}{A^2 + \gamma K_2} x_s\,.$$

Se constată că valoarea acestui regim staționar coincide cu cea obținută în cazul anterior, în care nu s-a considerat pierderea de debit datorată compresibilității.

Funcția de transfer este

$$G(s)=\frac{\dfrac{K_1 A}{\left(A^2+\gamma K_2\right)}}{\dfrac{s^2 m C_f}{A^2+\gamma K_2}+\dfrac{s\left(\gamma C_f+K_2 m\right)}{A^2+\gamma K_2}+1}.$$

Schema bloc a sistemului obținută pe baza bond-graph-ului din fig. 7.2.4 este reprezentată în fig.7.2.5.

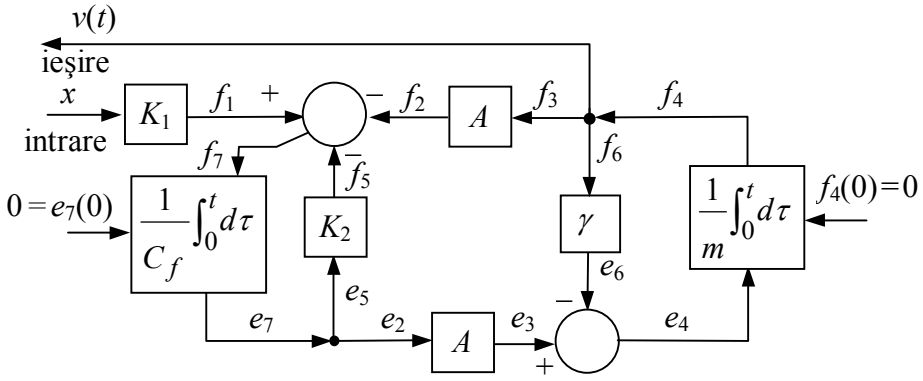


Fig. 7.2.5. Schema bloc a sistemului obținută pe baza bond-graph-ului din fig. 7.2.4

7.3. Pompă cu piston

Se consideră pompa cu piston din fig. 7.3.1. Ea este acționată printr-o culisă pusă în mişcare de un culisor acționat de o manivelă de rază *r* şi moment de inerție *J* în raport cu axa de rotație. Manivela este rotită cu viteză unghiulară $\omega(t)$ (considerată mărime de ieşire) de un motor având cuplul motor $M(t)$ (considerat mărime de intrare). Culisa este solidară cu un piston de arie *A* căruia îi imprimă o mişcare rectilinie alternativă. Pe parcursul unei rotații complete a manivelei, cele două supape se deschid şi se închid pe rând, conducând la următorul mod de funcționare:

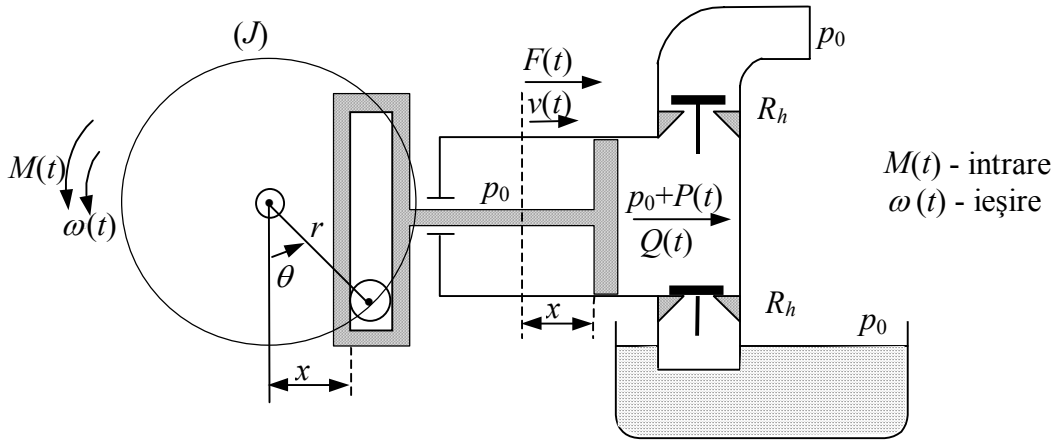


Fig. 7.3.1. Reprezentarea schematizată a unei pompe cu piston

Când presiunea $P(t)$ în cilindru este scăzută (datorită poziției pistonului) supapa superioară rămâne închisă, iar cea inferioară se deschide permițând absorbția fluidului în cilindru. Când presiunea $P(t)$ în cilindru este ridicată (datorită poziției pistonului) supapa inferioară se închide, iar cea superioară se deschide, permițând fluidului să fie împins afară din cilindru. Se presupune că, atunci când sunt deschise, cele două supape au aceeaşi rezistență hidraulică, având parametrul $k_R = R_f$.

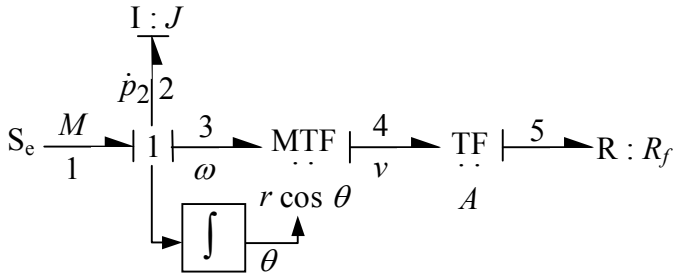


Fig. 7.3.2. Bond-graph-ul sistemului reprezentat în fig. 7.3.1.

Bond-graph-ul sistemului va conține o sursă de efort pentru cuplul motor M, un element inerțial de parametru J pentru manivelă, un transformator modulat de parametru $k_{MTF}^{3,4} = r\cos\theta$ care face trecerea de la mişcarea de rotație a manivelei la mişcarea de translație a culisei, un transformator care face trecerea de la parametrii mişcării mecanice de translație la parametrii puterii hidraulice şi un element disipativ care modelează pierderile din supape. Ca element de legătură este necesară o joncțiune 1 cu viteză comună $\omega = \dot{\theta}$. În fig. 7.3.2 este reprezentat bond-graph-ul cauzal al sistemului din fig. 7.3.1.

Pentru atribuirea cauzală, se începe cu sursa de efort şi cu elementul I căruia i se atribuie cauzalitate integrală, fapt care generează cauzalitate pe celelalte bonduri. Ecuația diferențială care rezultă pe baza bond-graph-ului din fig. 7.3.2 este

$$\dot{p}_2 = -R_f A^2 (r\cos\theta)^2 \frac{p_2}{J} + M ,$$

unde p_2 este momentul cinetic al manivelei.

Elementul inerțial fiind liniar, ecuația constitutivă a sa

$$p_4 = Jf_4 = J\omega$$

are derivata

$$\dot{p}_4 = J\dot{\omega} .$$

După efectuarea substituțiilor în ecuația diferențială de mai sus, aceasta capătă forma:

$$\dot{\omega} = -\frac{R_f A^2}{J}(r\cos\theta)^2\omega + \frac{M}{J}.$$

Ea constituie o primă ecuație dintr-o descriere de stare, la care trebuie adăugată informația privind funcționarea transformatorului modulat.

Ținând cont că

$$\dot{\theta} = \omega$$

se poate construi o reprezentare intrare - stare - ieşire de ordinul doi având drept intrare cuplul $M(t)$ şi drept ieşire viteza unghiulară $\omega(t)$. Dacă se intenționează ca mărimea de ieşire să fie debitul Q_5, atunci ecuația de ieşire, dedusă tot pe baza bond-graph-ului, este

$$Q_5 = \omega A r\cos\theta.$$

Folosind bond-graph-ul sistemului se obține schema bloc din fig. 7.3.3.

Se constată că prin aplicarea unui cuplu constant M_s drept mărime de intrare, mărimea de ieşire ω nu ajunge la o valoare constantă datorită formei neliniare a primei ecuații diferențiale din modelul de stare. Tot datorită neliniarității nu se poate construi un model de tip funcție de transfer.

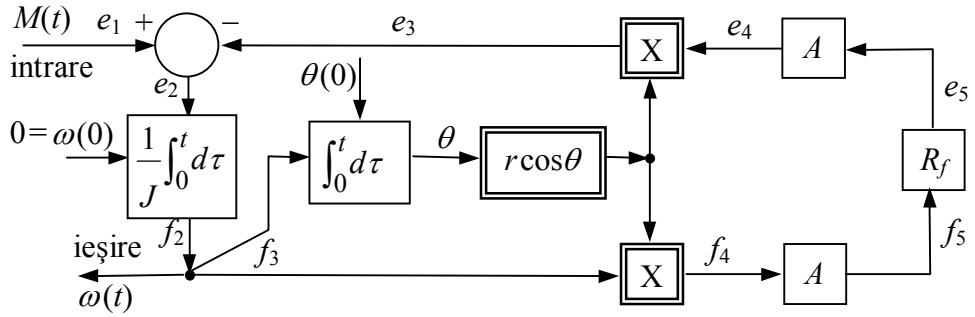


Fig. 7.3.3. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 7.3.1.

7.4. Punte Wheatstone

Puntea Wheatstone este un sistem electric utilizat pentru măsurarea rezistențelor în curent continuu. Schema acesteia este reprezentată în fig. 7.4.1.

Din fizică este bine ştiut faptul că atunci când diferență de potențial între punctele b şi c este nulă (spunându-se că puntea este echilibrată), între rezistențele din cele patru brațe ale punții, există egalitatea

$$R_{e4}R_{e2} = R_{e1}R_{e3}.$$

Ne propunem să obținem această egalitate aplicând în exclusivitate principiile de modelare conforme metodei bond-graph.

Bond-graph-ul punții Wheatstone aflată în echilibru este arătat în fig. 7.4.2.

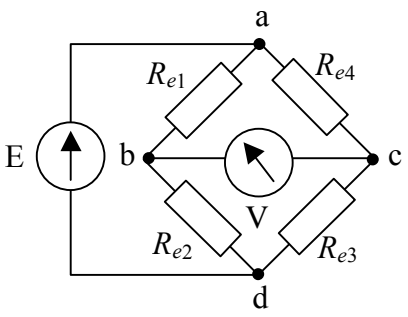


Fig. 7.4.1. Reprezentarea schematizată a punții Wheatstone

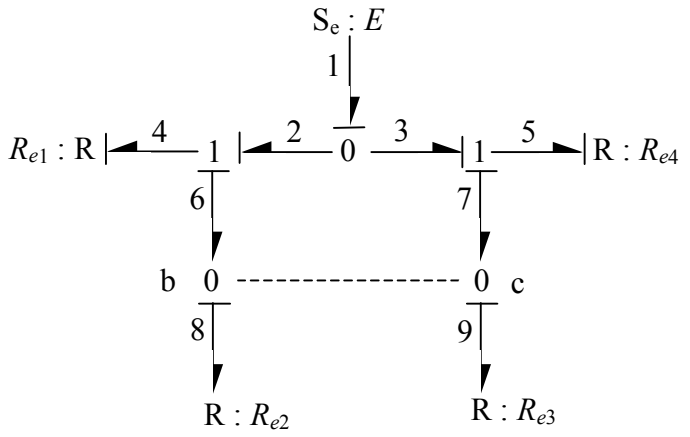


Fig. 7.4.2. Bond-graph-ul sistemului electric din fig. 7.4.1.

Scriind ecuațiile constitutive ale celor două joncțiuni 1 şi ecuațiile constitutive ale celor patru elemente disipative, se obțin următoarele două relații

$$E = R_{e1} f_4 + R_{e2} f_8 = (R_{e1} + R_{e2}) f_8 ,$$

$$E = R_{e4} f_5 + R_{e3} f_9 = (R_{e4} + R_{e3}) f_9 ,$$

în care s-a ținut cont că

$$f_8 = f_4$$

şi

$$f_9 = f_5 .$$

Când puntea este în echilibru, potențialele în b şi c sunt egale, deci are loc egalitatea

$$R_{e2} f_8 = R_{e3} f_9 .$$

Dacă în aceasta se substituie f_8 şi f_9 din cele două relații constitutive ale joncțiunilor 1 scrise mai sus, se obține

$$R_{e2} \frac{E}{R_{e1} + R_{e2}} = R_{e3} \frac{E}{R_{e4} + R_{e3}} ,$$

de unde, după simplificări, rezultă relația de legătură, între valorile celor patru rezistențe

$$R_{e4} R_{e2} = R_{e1} R_{e3} .$$

Facem observația că sistemul electric în discuție nu conține elemente acumulatoare de energie, motiv pentru care modelarea funcționării se realizează numai cu ecuații algebrice. În consecință nu se pune problema construirii unei reprezentări de tip intrare - stare - ieşire sau funcție de transfer.

7.5. Termometru

Se consideră un termometru a cărui schiță este reprezentată în fig. 7.5.1. Ne propunem să construim un model dinamic al transferului de energie termică de la mediul ambiant la fluidul din interiorul termometrului. Precizăm că nu vom lua în discuție fenomenele de dilatare/contracție ale elementelor constitutive ale dispozitivului (bulb, tub, fluid) datorate variațiilor de temperatură. Temperatura mediului (măsurată) T_1 este considerată mărime de intrare, iar temperatura fluidului (indicată) T_2 este considerată mărime de ieşire.

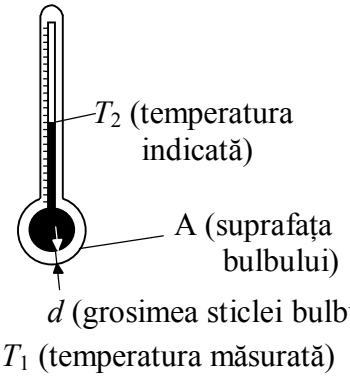


Fig. 7.5.1. Reprezentarea schematizată a unui termometru

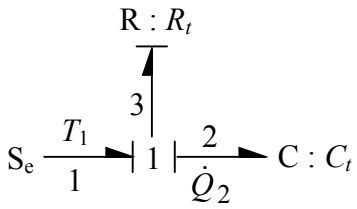


Fig. 7.5.2. Bond-graph-ul termometrului din fig. 7.5.1.

Modelul bond-graph, reprezentat în fig. 7.5.2, conține o sursă de efort adică o sursă de temperatură de valoare T_1 care este temperatura mediului, un element disipativ având parametrul $k_R = R_t$ care reprezintă rezistența termică a peretelui bulbului şi un element capacitiv având capacitatea termică $k_C = C_t$ reprezentând capacitatea termică a fluidului din termometru. Dacă se notează cu A suprafața bulbului, cu λ conductivitatea termică a sticlei din care este confecționat bulbul şi cu d grosimea peretelui acestuia, atunci rezistența termică a peretelui este:

$$R_t = d/\lambda A\,.$$

Notând cu m masa fluidului din termometru şi cu c căldura specifică a acestuia, rezultă pentru capacitatea termică expresia:

$$C_t = mc\,.$$

Ecuația diferențială dedusă din bond-graph-ul sistemului este:

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_1}{R_t} - \frac{1}{R_t C_t} Q_2\,.$$

Deoarece sistemul este liniar, se poate deriva relația constitutivă a elementului capacitiv

$$T_2 = C_t Q_2\,,$$

obținându-se

$$\dot{T}_2 = C_t \dot{Q}_2$$

care apoi se înlocuieşte în ecuația diferențială ce capătă forma:

$$\dot{T}_2 = -\frac{T_2}{R_t C_t} + \frac{T_1}{R_t C_t}\,.$$

Înlocuind expresiile lui R_t şi C_t determinate anterior, se obține ecuația diferențială ce descrie funcționarea termometrului

$$\dot{T}_2 = -\frac{\lambda A}{mcd} T_2 + \frac{\lambda A}{mcd} T_1 .$$

Deoarece ecuația caracteristică atașată are rădăcina reală şi negativă, se poate afirma că pentru o temperatură constantă T_{1s} aplicată drept mărime de intrare, va exista un regim staționar caracterizat prin valoarea constantă a ieşirii:

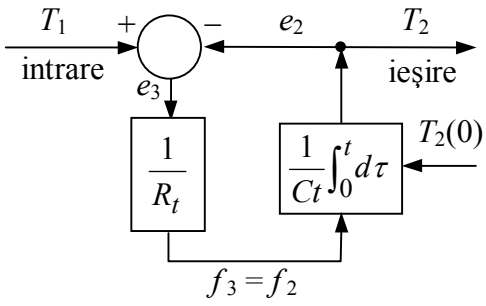


Fig. 7.5.3. Schema bloc a termometrului reprezentat în fig. 7.5.1

$$T_{2s} = T_{1s} .$$

Această egalitate arată că temperatura indicată de termometru după expirarea regimului tranzitoriu este tocmai temperatura mediului.

Funcția de transfer este

$$G(s) = \frac{1}{\frac{mcd}{\lambda A} s + 1} .$$

Schema bloc care modelează funcționarea termometrului este reprezentată în fig. 7.5.3.

7.6. Manipulator cu două grade de libertate

Se consideră un manipulator format din două bare articulate OA şi AB situate în plan vertical aşa cum se arată în fig. 7.6.1.

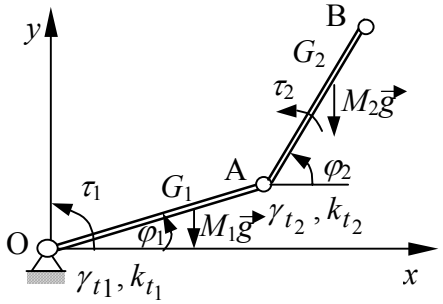


Fig. 7.6.1. Reprezentare schematizată a unui manipulator cu două grade de libertate

Bara OA are lungimea $2l_1$, masa M_1, momentul de inerție mecanic J_1 în raport cu punctul O şi este articulată în punctul fix O. Ea este rotită de un motor care dezvoltă un cuplu $\tau_1(t)$ şi este aşezat în extremitatea O. Bara AB are lungimea $2l_2$, masa M_2, momentul de inerție mecanic J_2 în raport cu punctul A şi este articulată de prima bară în punctul A unde există un motor de acționare care dezvoltă cuplul $\tau_2(t)$. În articulațiile O şi A există câte un element elastic cu amortizor având constanta elastică la torsiune k_{t_1} şi coeficientul de amortizare γ_{t_1} pentru elementul din punctul O şi respectiv constanta elastică la torsiune k_{t_2} şi coeficientul de amortizare γ_{t_2} pentru elementul din punctul A. Acest sistem mecanic are două grade de libertate. În construcția modelului, cuplurile $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ vor fi considerate mărimi de intrare, iar deplasările unghiulare $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ drept mărimi de ieşire.

Dacă considerăm un reper fix xOy (fig. 7.6.1), atunci coordonatele centrelor de masă G_1 şi G_2 ale barelor sunt:

$$x_1 = l_1 \cos\varphi_1 ,$$

$$y_1 = l_1 \sin\varphi_1 ,$$

respectiv

$$x_2 = 2l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 ,$$

$$y_2 = 2l_1 \sin\varphi_1 + 2l_2 \sin\varphi_2 .$$

Dacă se derivează aceste expresii în raport cu timpul, se obțin următoarele patru relații de legătură între viteze:

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 ,$$

$$\dot{y}_1 = l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 ,$$

respectiv

$$\dot{x}_2 = -2l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 ,$$

$$\dot{y}_2 = 2l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 .$$

După cum rezultă din forma celor patru relații anterioare, pentru a modela legăturile dintre cele șase viteze ($\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$), bond-graph-ul sistemului trebuie să conțină șase transformatoare modulate de deplasare. De asemenea acesta va conține patru elemente inerțiale pentru masele în mișcare după cele două direcții ale reperului și două elemente inerțiale pentru momentele de inerție ale brațelor. Greutățile vor fi modelate prin surse de efort care absorb putere. Bond-graph-ul manipulatorului este reprezentat în fig. 7.6.2, în care cu J_1' și J_2' se notează momentele de inerție ale barelor în raport cu centrele lor de masă.

Deoarece elementele I_1, I_2, C_3 și C_4 sunt în cauzalitate integrală, din bond-graph pot fi obținute patru ecuații diferențiale care au forma:

$$\dot{p}_1 = \tau_1 - \tau_2 + \dot{p}_{13} l_1 \sin\varphi_1 + \dot{p}_{16} 2l_1 \sin\varphi_1 - \dot{p}_{25} 2l_1 \cos\varphi_1 - \dot{p}_{28} l_1 \cos\varphi_1 -$$

$$- M_1 g l_1 \cos\varphi_1 - M_2 g 2l_1 \cos\varphi_1 - k_{t_1} q_3 - \gamma_{t_1} \dot{q}_3 + k_{t_2} q_4 + \gamma_{t_2} \dot{q}_4 ,$$

$$\dot{p}_2 = \tau_2 + \dot{p}_{16} l_2 \sin\varphi_2 - \dot{p}_{25} l_2 \cos\varphi_2 - M_2 g l_2 \cos\varphi_2 - k_{t_2} q_4 - \gamma_{t_2} \dot{q}_4 ,$$

$$\dot{q}_3 = \frac{p_1}{J_1'} ,$$

$$\dot{q}_4 = \frac{p_2}{J_2'} - \frac{p_1}{J_1'} .$$

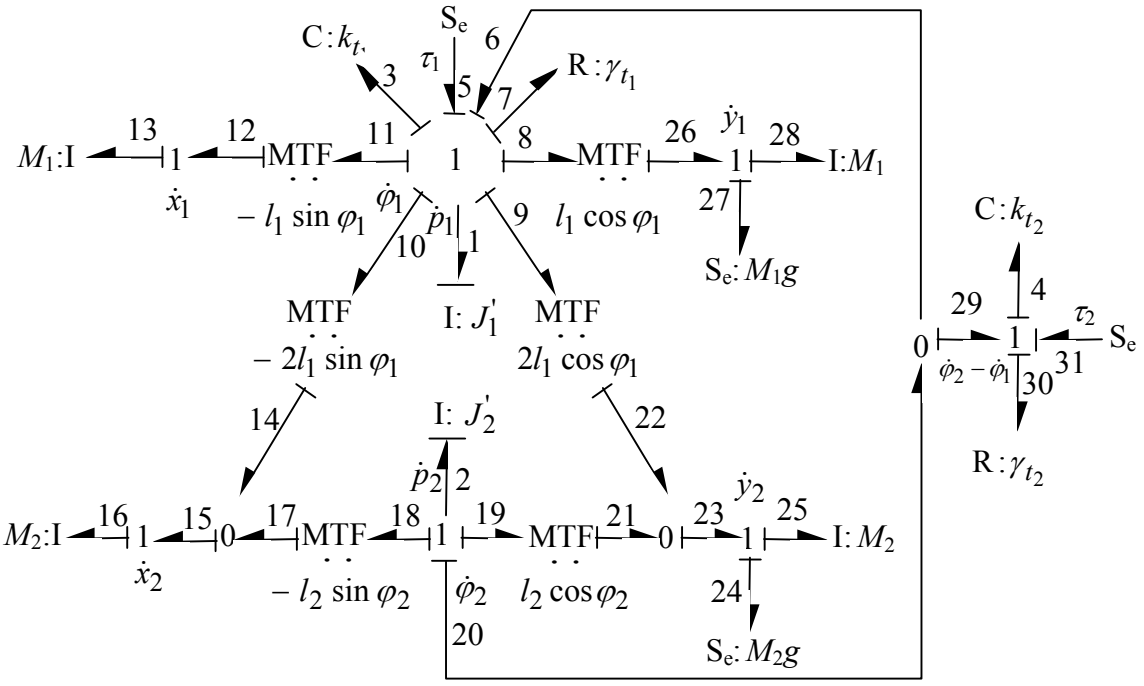


Fig. 7.6.2. Bond-graph-ul manipulatorului reprezentat în fig. 7.6.1.

Aceste ecuații conțin nouă funcții necunoscute (p_1, p_2, $q_3=\varphi_1$, q_4, p_{13}, p_{16}, p_{25}, p_{28} şi φ_2) şi deci mai sunt necesare încă cinci ecuații pentru a putea pune problema determinării tuturor funcțiilor necunoscute. Aceste ecuații sunt obținute din cele patru relații de legătură între viteze care sunt scrise sub forma arătată în continuare, a patru ecuații algebrice:

$$\frac{p_{13}}{M_1} = -l_1 \frac{p_1}{J_1'} \sin\varphi_1 ,$$

$$\frac{p_{28}}{M_1} = l_1 \frac{p_1}{J_1'} \cos\varphi_1 ,$$

$$\frac{p_{16}}{M_2} = -2l_1 \frac{p_1}{J_1'} \sin\varphi_1 - \frac{p_2}{J_2'} \sin\varphi_2 ,$$

$$\frac{p_{25}}{M_2} = 2l_1 \frac{p_1}{J_1'} \cos\varphi_1 + l_2 \frac{p_2}{J_2'} \cos\varphi_2$$

şi din următoarea ecuație dedusă din relația constitutivă a elementului I_2

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{p_2}{J_2'}.$$

Cele patru ecuații algebrice anterior deduse se derivează în raport cu timpul şi se obțin următoarele patru ecuații diferențiale:

$$\dot{p}_{13} = -M_1 l_1 \frac{\dot{p}_1}{J_1'} \sin\varphi_1 - M_1 l_1 \frac{p_1^2}{J_1'^2} \cos\varphi_1 ,$$

$$\dot{p}_{28} = M_1 l_1 \frac{\dot{p}_1}{J_1'} \cos\varphi_1 - M_1 l_1 \frac{p_1^2}{J_1'^2} \sin\varphi_1 ,$$

$$\dot{p}_{16} = -M_2 2l_1 \frac{\dot{p}_1}{J_1'} \sin\varphi_1 - M_2 2l_1 \frac{p_1^2}{J_1'^2} \cos\varphi_1 - M_2 l_2 \frac{\dot{p}_2}{J_2'} \sin\varphi_2 - M_2 l_2 \frac{p_2^2}{J_2'^2} \cos\varphi_2 ,$$

$$\dot{p}_{25} = M_2 2l_1 \frac{\dot{p}_1}{J_1'} \cos\varphi_1 - M_2 2l_1 \frac{p_1^2}{J_1'^2} \sin\varphi_1 + M_2 l_2 \frac{\dot{p}_2}{J_2'} \cos\varphi_2 - M_2 l_2 \frac{p_2^2}{J_2'^2} \sin\varphi_2 .$$

Din acest moment se poate proceda în două moduri conform celor discutate în paragraful 2.6.3:

a) Se înlocuiesc derivatele $\dot{p}_{13}, \dot{p}_{28}, \dot{p}_{16}, \dot{p}_{25}$ din ecuațiile de mai sus în primele două ecuații diferențiale deduse din bond-graph, obținându-se, în final, un sistem de cinci ecuații diferențiale în necunoscutele $p_1, p_2, q_3 = \varphi_1, q_4$ şi φ_2 care trebuie adus la forma explicită.

b) Se consideră sistemul de 9 ecuații diferențiale format din primele patru ecuații diferențiale, din ecuația constitutivă a elementului I_2 precum şi din cele patru ecuații diferențiale obținute prin derivarea ecuațiilor algebrice. Necunoscutele acestui sistem sunt $p_1, p_2, q_3 = \varphi_1, q_4, \varphi_2, p_{13}, p_{28}, p_{16}$ şi p_{25}. Sistemul trebuie apoi adus la forma explicită.

Pe baza bond-graph-ului se poate obține schema bloc a sistemului mecanic care este reprezentată în fig. 7.6.3.

Manipulatorul reprezentat în fig. 7.6.1 poate fi modelat folosind ecuațiile lui Lagrange care vor fi obținute în continuare. Ca parametri de poziție independenți sunt alese unghiurile φ_1 şi φ_2.

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale celor două bare

$$E = E_1 + E_2 ,$$

unde

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{2}{3} M_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 ,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} M_2 V_A^2 + M_2 \vec{V}_A \left(\vec{\omega}_2 \times A\vec{G}_2 \right) + J_2 \dot{\varphi}_2^2 =$$

$$= 2M_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{2}{3} M_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2M_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) .$$

Energia cinetică totală a manipulatorului are expresia:

$$E = \left(\frac{2M_1}{3} + 2M_2 \right) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{2M_2}{3} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2M_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$$

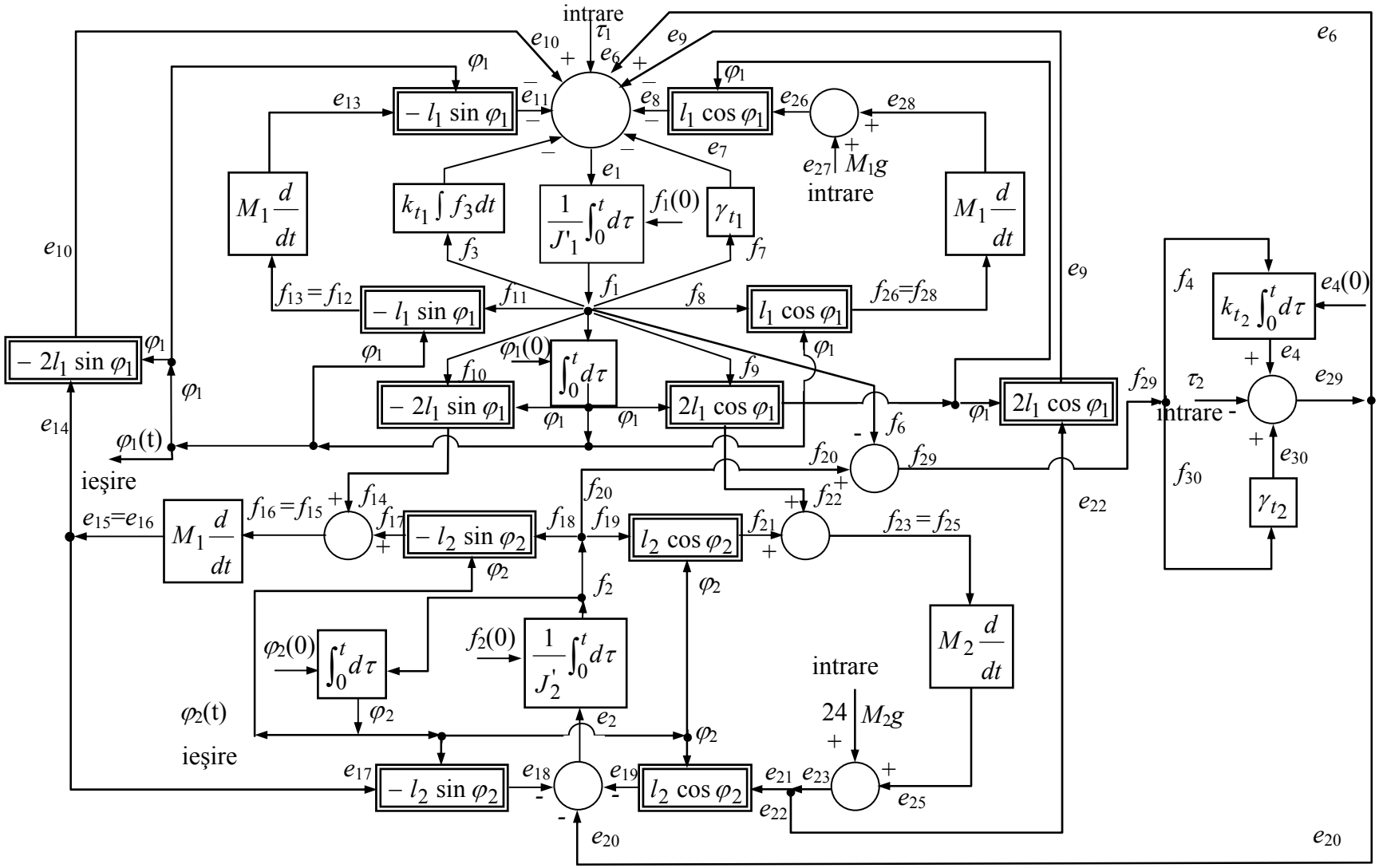


Fig. 7.6.3. Schema bloc a manipulatorului reprezentat în fig. 7.6.1.

Ecuațiile lui Lagrange se obțin cu formulele:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_k}=Q_k, k=1,...,p,$$

în care q_k $(k=1,...,p)$ semnifică coordonatele generalizate care, în acest caz, sunt în număr de două $q_1=\varphi_1$ şi $q_2=\varphi_2$, iar Q_k sunt forțele generalizate care au expresia:

$$Q_k=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i\frac{\partial \vec{r}_{G_i}}{\partial q_k}+\vec{m}_{G_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\vec{k}\right),\ k=1,...,p,$$

unde $\vec{F}_i$ şi $\vec{m}_{G_i}$ sunt forța şi momentul rezultant în polul G_i (i=1,...,n; n este numărul de corpuri), $\vec{r}_{G_i}$ este vectorul de poziție al centrului de masă G_i al corpului i, $\varphi_i\vec{k}$ este unghiul orientat de rotație proprie al corpului i, iar $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii celor trei axe.

În urma calculelor se obține:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}=\left(\frac{4}{3}M_1+4M_2\right)l_1^2\dot{\varphi}_1+2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}=\frac{4}{3}M_2l_2^2\dot{\varphi}_2+2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=\left(\frac{4}{3}M_1+4M_2\right)l_1^2\ddot{\varphi}_1+2M_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)-$$

$$-2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=\frac{4}{3}M_2l_2^2\ddot{\varphi}_2+2M_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)-$$

$$-2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}=2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_2}=-2M_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

Asupra barelor OA şi OB acționează câte un sistem de solicitări având vectorul rezultant şi vectorul moment rezultant în centrul de masă al fiecăreia, de forma:

$$\begin{cases}\vec{F}_1=-M_1g\vec{j},\\ \vec{m}_{G_1}=\tau_1\vec{k}-\tau_2\vec{k}-k_{t_1}\varphi_1\vec{k}-\gamma_{t_1}\dot{\varphi}_1\vec{k}+k_{t_2}(\varphi_2-\varphi_1)\vec{k}+\gamma_{t_2}(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)\vec{k};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{F}_2=-M_2g\vec{j},\\ \vec{m}_{G_2}=\tau_2\vec{k}-k_{t_2}(\varphi_2-\varphi_1)\vec{k}+\gamma_{t_2}(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)\vec{k};\end{cases}$$

Vectorii de poziție ai centrelor de masă G_i şi expresiile unghiurilor orientate $\vec{\varphi}_i$ sunt:

$$\vec{r}_{G_1} = l_1 \cos\varphi_1 \vec{i} + l_1 \sin\varphi_1 \vec{j} ,$$

$$\vec{r}_{G_2} = \left(2l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)\vec{i} + \left(2l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2\right)\vec{j} ,$$

$$\vec{\varphi}_1 = \varphi_1 \vec{k} ,$$

$$\vec{\varphi}_2 = \varphi_2 \vec{k}.$$

Din relațiile de mai sus se obține:

$$\frac{\partial \vec{r}_{G_1}}{\partial \varphi_1} = -l_1 \sin\varphi_1 \vec{i} + l_1 \cos\varphi_1 \vec{j} ,$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{G_2}}{\partial \varphi_1} = -2l_1 \sin\varphi_1 \vec{i} + 2l_1 \cos\varphi_1 \vec{j} ,$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial \varphi_1} = \vec{k} ,$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \varphi_1} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{G_1}}{\partial \varphi_2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{G_2}}{\partial \varphi_2} = -l_2 \sin\varphi_2 \vec{i} + l_2 \cos\varphi_2 \vec{j} ,$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial \varphi_2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \varphi_2} = \vec{k}.$$

Cele două forțe generalizate se pot acum calcula şi rezultă de forma:

$$Q_1 = -M_1 g l_1 \cos\varphi_1 - M_2 g 2l_1 \cos\varphi_1 + \tau_1 - \tau_2 + k_{t_1}\varphi_1 -$$
$$-\gamma_{t_1}\dot{\varphi}_1 + k_{t_2}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + \gamma_{t_2}\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right),$$

$$Q_2 = -M_2 g l_2 \cos\varphi_2 + \tau_2 - k_{t_2}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - \gamma_{t_2}\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right).$$

Se pot scrie acum ecuațiile lui Lagrange care descriu dinamica manipulatorului. Ele sunt:

$$\left(\frac{4}{3}M_1 + 4M_2\right)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + 2M_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - 2M_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) =$$
$$= -M_1 g l_1 \cos\varphi_1 - M_2 g 2l_1 \cos\varphi_1 + \tau_1 - \tau_2 + k_{t_1}\varphi_1 - \gamma_{t_1}\dot{\varphi}_1 + k_{t_2}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + \gamma_{t_2}\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right),$$

$$\frac{4}{3}M_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + 2M_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2M_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) =$$
$$= -M_2 g l_2 \cos\varphi_2 + \tau_2 - k_{t_2}(\varphi_2 - \varphi_1) - \gamma_{t_2}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1).$$

Sistemul se obține în urma unor calcule destul de complicate şi este de ordinul doi. Pentru a fi integrat numeric el trebuie transformat într-un sistem de ordinul întâi cu patru ecuații şi apoi trebuie adus la forma explicită.

Modelarea dinamicii sistemului prin metoda ecuațiilor lui Lagrange evidențiază avantajele metodei bond-graph prin aceea că volumul de muncă necesar pentru a determina ecuațiile de stare este mult mai redus, iar sistemul obținut este de ordinul întâi aşa cum este necesar pentru integrarea numerică. Pe de altă parte, desenarea bond-graph-ului necesită o foarte profundă înțelegere a fenomenelor fizice care au loc în sistem, fapt mai puțin necesar pentru a scrie ecuațiile lui Lagrange dar foarte important pentru activitatea inginerească. Un alt aspect care nu trebuie neglijat este că ecuațiile obținute din bond-graph pot fi aduse, după unele transformări, la forma ecuațiilor lui Lagrange ceea ce, în cazul unor ecuații foarte complicate, constituie un mod eficient de verificare a exactității calculelor. Nu este de neglijat nici volumul mai mare de informații pe care îl furnizează ecuațiile obținute pe baza bond-graph-ului.

7.7. Absorbitor dinamic cu amortizare vâscoasă

În fig. 7.7.1 este prezentat un absorbitor dinamic cu element amortizor ce este ataşat unui sistem primar neamortizat. Sistemul oscilant primar este alcătuit dintr-o masă *m* şi un arc având constanta elastică k_e. Sistemul oscilant ataşat (absorbitorul) este format dintr-un arc având constanta elastică k_{e_a}, un amortizor având constanta de amortizare γ_a şi o masă m_a. Masa primară *m* este supusă acțiunii unei forțe perturbatoare presupusă de forma:

$$F(t) = F_0 \sin\omega t\ .$$

Acest sistem vibrant are două grade de libertate. În construcția modelului, se alege drept mărime de intrare forța *F*(*t*), iar drept mărime de ieşire deplasarea masei *m*. Bond-graph-ul sistemului este reprezentat în fig. 7.7.2.

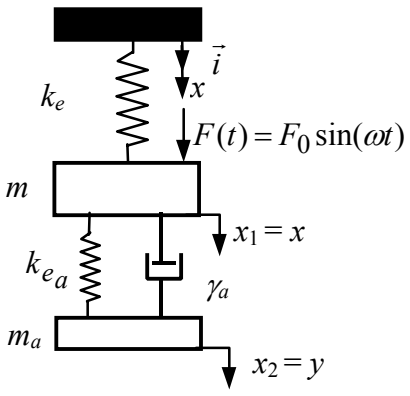


Fig. 7.7.1. Schema unui amortizor dinamic cu

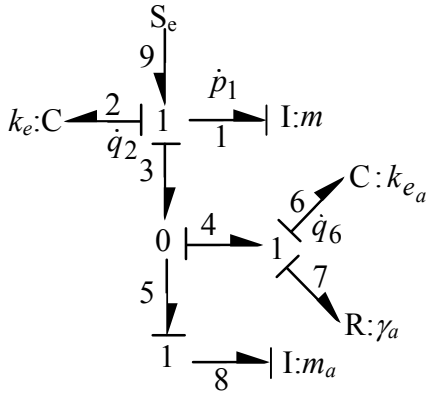


Fig. 7.7.2. Bond-graph-ul sistemului reprezentat

amortizare vâscoasă în fig.7.7.1

Pe baza lui se deduc următoarele patru ecuații de stare, în număr egal cu cel al elementelor I şi C aflate în cauzalitate integrală:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\gamma_a}{m} p_1 + \frac{\gamma_a}{m_a} p_8 - k_e q_2 - k_{e_a} q_6 + F_0 \sin(\omega t),$$

$$\dot{p}_8 = \frac{\gamma_a}{m} p_1 - \frac{\gamma_a}{m_a} p_8 + k_{e_a} q_6,$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{m} p_1,$$

$$\dot{q}_6 = \frac{1}{m} p_1 - \frac{1}{m} p_8.$$

Acest sistem se poate scrie sub forma matriceală (2.4.3) sau (2.5.2) cu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_8 \\ q_2 \\ q_6 \end{bmatrix}, \; u = F_0 \sin(\omega t), \; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_a}{m} & +\frac{\gamma_a}{m} & -k_e & -k_{e_a} \\ \frac{\gamma_a}{m} & -\frac{\gamma_a}{m_a} & 0 & k_{e_a} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{m_a} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dacă se alege ca mărime de ieşire deplasarea $q_2 = x_1$ a masei m, atunci se poate scrie ecuația de ieşire de tipul (2.4.4) sau (2.5.3) cu matricea **D** nulă şi :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al matricei **A** este:

$$s^4 + \gamma_a \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_a} \right) s^3 + \left(\frac{k_e}{m} + \frac{k_{e_a}}{m} + \frac{k_{e_a}}{m_a} \right) s^2 + \frac{k_e \gamma_a}{m m_a} s + \frac{k_e k_{e_a}}{m m_a} = 0,$$

şi conform criteriului Hurwitz rezultă că toate autovalorile lui **A** au partea reală negativă. Drept urmare, în baza celor discutate în secțiunea 2.4. (Capitolul 2), aplicarea mărimii de intrare de tip sinusoidal $u(t)$ va conduce la apariția unui regim permanent de funcționare pentru care mărimea de ieşire are o exprimare analitică de forma (2.4.55).

Astfel funcția de transfer calculată conform (2.4.31) sau (2.5.8) este:

$$G(s)=\frac{\frac{1}{m}s^2+\frac{\gamma_a}{mm_a}s+\frac{k_{e_a}}{mm_a}}{s^4+\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_a}\right)\gamma_a s^3+\left(\frac{k_e}{m}+\frac{k_{e_a}}{m}+\frac{k_{e_a}}{m_a}\right)s^2+\frac{k_e\gamma_a}{mm_a}s+\frac{k_e k_{e_a}}{mm_a}},$$

conducând la:

$$|G(j\omega)|=\frac{\sqrt{\left(k_{e_a}-m_a\omega\right)^2+\gamma_a\omega^2}}{\sqrt{\left[mm_a\omega^4-\left(k_e m_a+k_{e_a}m_a+k_{e_a}m\right)\omega^2+k_e k_{e_a}\right]^2+\left[\left(k_e-(m+m_a)\omega^2\right)\gamma_a\omega\right]^2}},$$

care are semnificația unui factor de amortizare al modulului mărimii de ieşire față de modulul mărimii de intrare în regim permanent sinusoidal. Deoarece mărimea de ieşire considerată este o deplasare şi mărimea de intrare este o forță, semnificația fizică a acestui factor de amplificare poate fi pusă în evidență luând în considerație forța elastică corespunzătoare deplasării.

Se poate calcula astfel mărimea denumită transmisibilitate

$$T=\frac{k_e|G(j\omega)F_0|}{F_0}=k_e|G(j\omega)|,$$

care este utilizată în studierea comportării absorbitorilor dinamici pentru o anumită plajă de valori ale pulsației forței perturbatoare.

Schema bloc rezultată pe baza bond-graph-ului din fig. 7.7.2 este reprezentată în fig. 7.7.3.

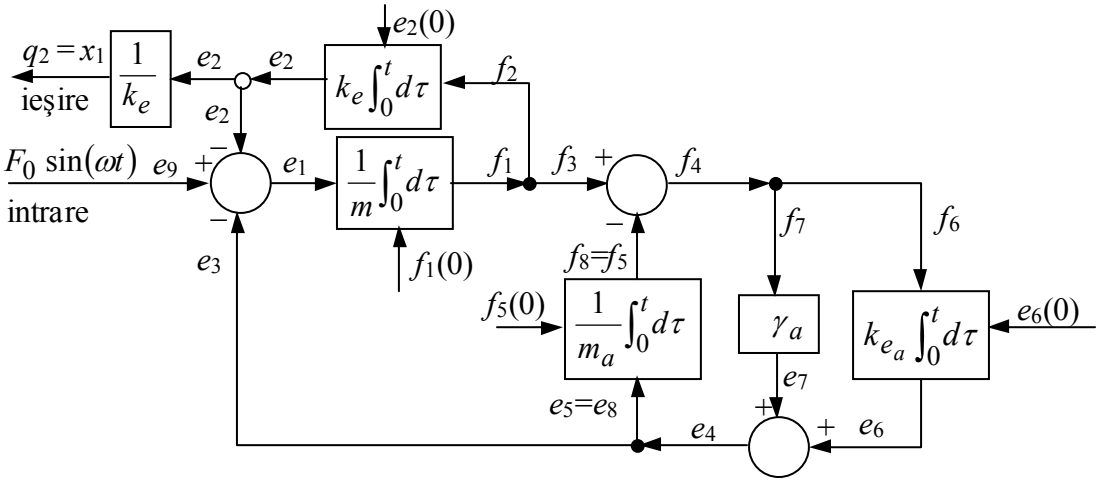


Fig. 7.7.3. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 7.7.1

Pentru modelarea absorbitorului dinamic cu amortizare vâscoasă se poate utiliza şi metoda ecuațiilor lui Lagrange. După cum s-a menționat în secțiunea 7.6, acestea au forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right)=Q_k,\quad k=1,...,n,$$

în care E_c este energia cinetică a sistemului, q_k ($k=1,...,n$) sunt coordonatele generalizate iar Q_k sunt forțele generalizate cu

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad k = 1,...,n,$$

în care $\vec{F}_i$ este forța rezultantă ce acționează asupra punctului material *i* iar $\vec{r}_i$ este vectorul de poziție al aceluiaşi punct. În cazul sistemului din fig. 7.7.1, avem două coordonate generalizate

$$q_1 = x \text{ şi } q_2 = y.$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_a \dot{y}^2}{2},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \; \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y},$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_1} = \frac{\partial E_c}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_c}{\partial q_2} = \frac{\partial E_c}{\partial y} = 0.$$

Forța rezultantă care acționează asupra punctului material de masă *m* este:

$$\vec{F}_1 = -k_e x\vec{i} + k_{e_a}(y - x)\vec{i} + \gamma_a(\dot{y} - \dot{x})\vec{i} + F_0 \sin(\omega_0 t)\vec{i},$$

iar vectorul de poziție al aceluiaşi punct este

$$\vec{r}_1 = x\vec{i},$$

unde $\vec{i}$ este versorul axei verticale care are sensul pozitiv în jos. Rezultă că:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} = \vec{i}.$$

Forța rezultantă care acționează asupra punctului material de masă *m* este:

$$\vec{F}_2 = -k_{e_a}(y - x)\vec{i} - \gamma_a(\dot{y} - \dot{x})\vec{i},$$

iar vectorul de poziție al său este

$$\vec{r}_2 = y\vec{i}.$$

Rezultă că:

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} = \vec{i}.$$

Ecuațiile lui Lagrange sunt:

$$m\ddot{x} = -k_e x + k_{e_a}(y - x) + \gamma_a(\dot{y} - \dot{x}) + F_0 \sin(\omega_0 t),$$

$$m\ddot{y} = -k_{e_a}(y - x) - \gamma_a(\dot{y} - \dot{x}),$$

care pot fi aduse la forma:

$$\begin{cases} m\ddot{x}+\gamma_a(\dot{x}-\dot{y})+(k_e+k_{e_a})x-k_{e_a}y=F_0\sin(\omega_0 t), \\ m_a\ddot{y}-\gamma_a(\dot{x}-\dot{y})-k_{e_a}(x-y)=0. \end{cases}$$

Sistemul se poate pune sub forma matriceală cu utilizare frecventă în mecanică

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{F},$$

unde

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} \gamma_a & -\gamma_a \\ -\gamma_a & \gamma_a \end{bmatrix},\quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_e+k_{e_a} & -k_{ea} \\ -k_{ea} & k_{ea} \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} F_0\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.8. Sistem de reglare

În fig. 7.8.1 este reprezentat un sistem simplu de reglare a turației constând dintr-un motor hidraulic comandat de o electrovalvă care, la rândul ei, este comandată electric în funcție de semnalul furnizat de un tahometru montat pe axul motorului. Motorul roteşte un volant (termen generic desemnând o structură mecanică în mişcare de rotație) având momentul de inerție mecanic J în raport cu axa de rotație.

Scopul sistemului de reglare este de a controla turația volantului prin impunerea unei anumite valori conform unui program de prescriere (referință) formulat cu ajutorul tensiunii $u_R(t)$.

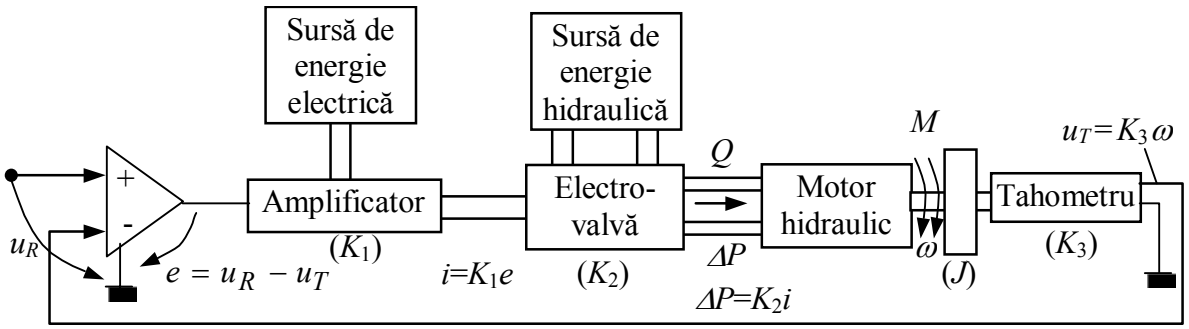


Fig. 7.8.1. Sistem de reglare cu sursă controlată

Tahometrul, rotit cu viteza unghiulară ω, furnizează o tensiune u_T proporțională cu această viteză

$$u_T=K_3\omega,$$

unde K_3 este o constantă a echipamentului. Această tensiune este comparată cu tensiunea de referință u_R iar diferența lor, notată e, este dată de

$$e=u_R-u_T.$$

Semnalul *e*, uzual denumit eroare în terminologia specifică sistemelor de reglare, este amplificat de un amplificator care furnizează un curent proporțional

$$i = K_1 e$$

unde K_1 reprezintă constanta de proporționalitate. Dacă *e* este nulă, atunci înseamnă că turația volantului este cea prescrisă, iar dacă *e* este nenulă înseamnă că între turația reală a volantului şi cea dorită există o diferență care trebuie corectată.

În continuare curentul *i* acționează o electrovalvă care furnizează motorului hidraulic o variație de presiune ΔP proporțională cu *i*:

$$\Delta P = K_2 i\,,$$

unde K_2 reprezintă o constantă de proporționalitate.

Această presiune conduce la modificarea turației motorului până la valoarea prescrisă care va face ca tensiunea u_T să fie egală cu tensiunea u_R, adică $e = 0$. Se realizează astfel menținerea funcționării într-un anumit regim al motorului hidraulic.

În construirea modelului vom considera drept mărime de intrare tensiunea u_R şi drept mărime de ieşire viteza unghiulară ω a volantului.

Bond-graph-ul sistemului este reprezentat în fig. 7.8.2, în care electrovalva este modelată ca o sursă controlată de presiune, iar motorul hidraulic ca un transformator.

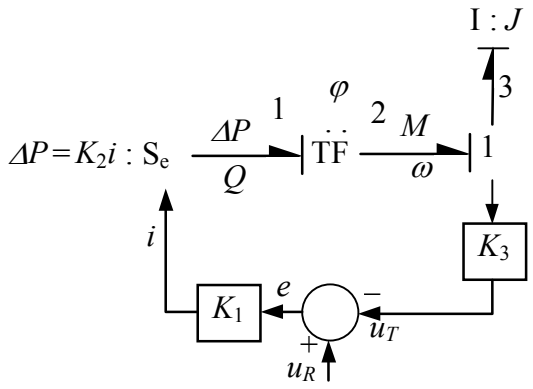


Fig. 7.8.2. Bond-graph-ul sistemului reprezentat în fig. 7.8.1.

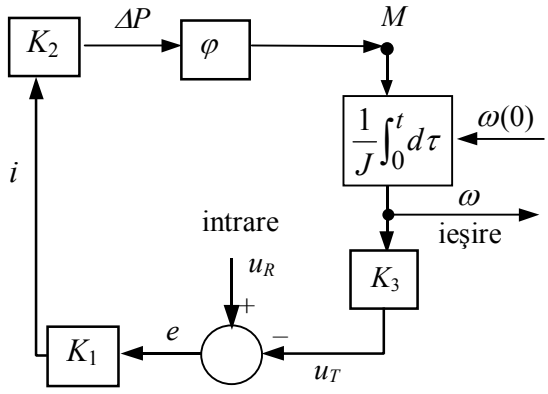


Fig. 7.8.3. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 7.8.1.

Cu φ s-a notat parametrul transformatorului ale cărui ecuații constitutive sunt:

$$M = \varphi \Delta P,$$

$$Q = \varphi \omega.$$

Ecuația rezultată din bond-graph-ul sistemului este

$$\dot{p} = -\frac{\varphi K_1 K_2 K_3}{J} p + \varphi K_1 K_2 u_R\,,$$

unde *p* este momentul cinetic al volantului dat de relația

$$p = J\omega.$$

În regim staționar pentru o valoare constantă u_{Rs} rezultă:

$$p_S = \frac{J}{K_3} u_{Rs},$$

sau, echivalent,

$$\omega_S = \frac{u_{Rs}}{K_3}.$$

Schema bloc a sistemului de reglare din fig. 7.8.1 este reprezentată în fig. 7.8.3. Dacă se impune determinarea debitului Q furnizat de electrovalvă, atunci schema bloc poate fi expandată incluzând şi modelarea transferului $\omega \to Q$ prin elementul TF al bond-graph-ului.

7.9. Motor de curent continuu cu excitaţie separată

Se consideră un motor de curent continuu cu excitație separată care pune în mişcare de rotație un volant având momentul de inerție mecanic J, aşa cum se poate vedea în fig. 7.9.1. De asemenea se presupune că în axul motor acționează un moment rezistent de valoare M_r cunoscută, care modelează diverse pierderi energetice.

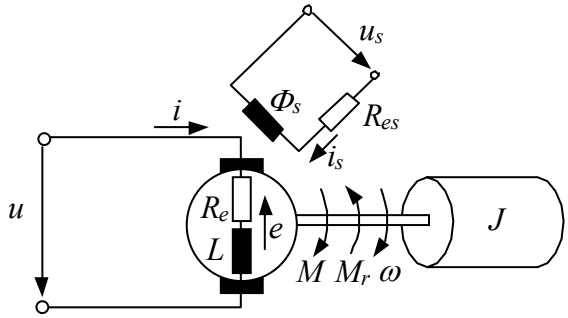


Fig. 7.9.1. Motorul de curent continuu cu excitație separată

Rotorul motorului este alimentat cu o sursă de tensiune continuă u şi este modelat global printr-o rezistență electrică de valoare R_e înseriată cu o inductanță de valoare L. Existența curentului de intensitate i prin spirele rotorului (bobină) în condițiile generării unui câmp magnetic de către statorul excitat separat determină deplasarea spirelor, deci rotația rotorului. Circuitul statoric se compune din bobine cu miez care creează fluxul magnetic Φ_s şi sunt caracterizate global printr-o rezistență electrică de valoare R_{es}. Circuitul statoric este alimentat separat de la o sursă de tensiune constantă u_s. În construcția modelului matematic, se consideră drept mărime de intrare tensiunea pe înfăşurarea rotorică $u(t)$ şi cuplul rezistent M_r, iar drept mărimi de ieşire curentul pe înfăşurarea rotorică i şi viteza unghiulară a rotorului ω. În această manieră de abordare a construcției modelului, circuitul statoric este luat în discuție numai pentru a putea descrie apariția fluxului Φ_s care determină mişcarea rotorului atunci când acesta este parcurs de curentul i. Din acest motiv, sursa de tensiune constantă u_s a circuitului

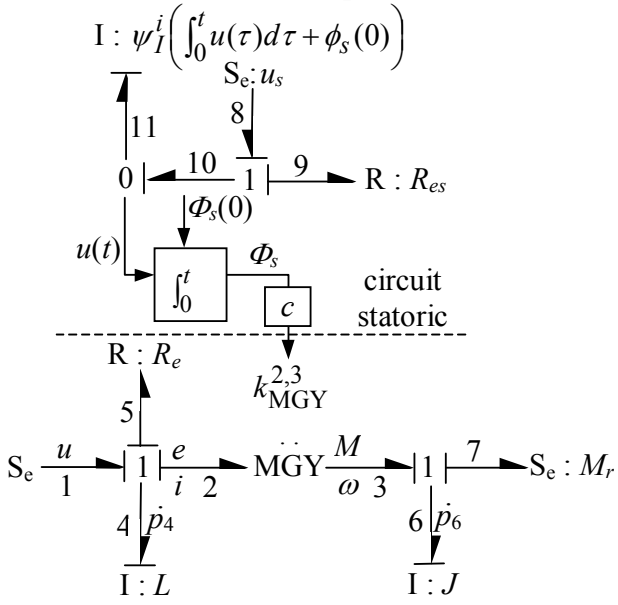


Fig. 7.9.2. Bond-graph-ul sistemului reprezentat în fig. 7.9.1

statoric nu este privită ca o mărime de intrare a modelului, participarea ei în cadrul modelului realizându-se prin intermediul fluxului constant Φ_s.

Bond-graph-ul sistemului este reprezentat în fig. 7.9.2. Acesta include şi elementele aferente circuitului statoric pentru a asigura o imagine completă a modului de funcţionare pentru întreagul echipament.

Pentru a înţelege modelul, se va considera o singură spiră în câmp magnetic uniform de inducţie B. Spira este dreptunghiulară şi are dimensiunile l_1 şi l_2 aşa cum se arată în fig. 7.9.3. Dacă stabilim sensul curentului ca în desen, asupra fiecărei porţiuni de spiră de lungime l_2 va acţiona o forţă F (fig. 7.9.3) de mărime

$$F = Bl_2 i,$$

adică spira va fi acţionată de un cuplu de mărime

$$M = 2F\frac{l_1}{2}\sin\varphi,$$

care se poate scrie în funcţie de i sub forma

$$M = Bl_1 l_2 i\sin\varphi,$$

sau

$$M = BAi\sin\varphi,$$

unde A este aria spirei.

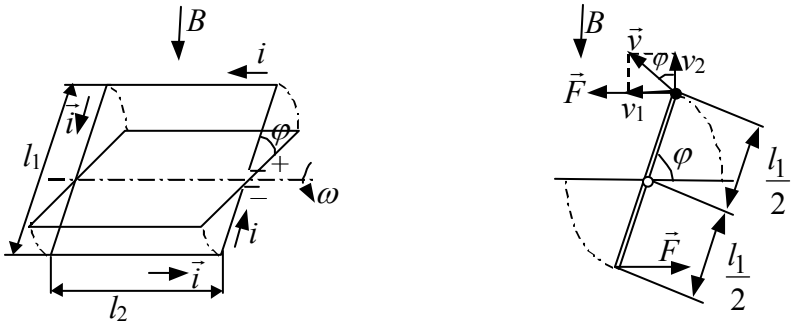


Fig. 7.9.3. Reprezentarea schematizată a unei spire dreptunghiulare care se roteşte în câmp magnetic

Pe de altă parte, deplasarea aceloraşi porţiuni de spiră în câmpul magnetic uniform de intensitate B se va face pe direcţia forţei F cu viteza v_1 (fig. 7.9.3) care determină inducerea unei tensiuni e de mărime

$$e = 2Bl_2 v_1.$$

Scriind legătura între viteza unghiulară şi viteza liniară

$$v = \omega\frac{l_1}{2}$$

şi ţinând cont că

$$v_1 = v\sin\varphi,$$

se obţine

$$e = Bl_1 l_2 \sin\varphi\omega ,$$

adică

$$e = BA\,\omega \sin\varphi .$$

Rezultă că, în cazul rotirii unei spire în câmp magnetic uniform, se pot scrie două ecuații de legătură între variabilele puterii mecanice şi ale puterii electrice de forma

$$M = B\,A\,i \sin\varphi ,$$

$$e = B\,A\,\omega \sin\varphi$$

care, după înmulțirea termenilor corespunzători, conduc la relația de conservare a puterii

$$M(t)\omega(t) = e(t)\,i(t) .$$

Deoarece cele două relații anterioare leagă variabilele de tip *e* de variabilele de tip *f* şi deoarece se conservă puterea, rezultă că fenomenul rotirii unei spire în câmp magnetic se poate modela ca un girator controlat (modulat) având parametrul $k_{MGY} = B\,A \sin\varphi$ (care se modifică în timp) semnificând fluxul magnetic aferent suprafeței spirei.

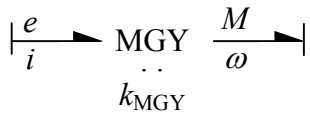


Fig. 7.9.4. Bond-graph-ul asociat comportării spirei rotite în câmp magnetic

Reprezentarea de tip bond-graph a comportării spirei care se roteşte în câmp magnetic este dată în fig. 7.9.4.

Pe baza celor de mai sus, în bond-graph-ul din fig. 7.9.2 există un girator controlat care modelează tocmai fenomenul descris anterior, exprimând legătura dintre variabilele puterii mecanice din axul motor (M şi ω) şi variabilele puterii electrice din rotor (e şi i). Parametrul k_{MGY} al giratorului include intensitatea B a câmpului magnetic care este dependentă de curentul i_s al excitației. Se observă că mărimea cauză este i şi mărimea efect este M.

Un aspect demn de remarcat este reversibilitatea fenomenului rotirii unei spire în câmp magnetic, sugerată de modelarea cu ajutorul giratorului, în sensul că mărimea cauză poate fi ω, iar mărimea de ieşire e. Astfel, dacă se roteşte spira cu o viteză unghiulară ω, atunci porțiunile de lungime l_2 se vor deplasa pe o direcție perpendiculară pe direcția câmpului magnetic cu viteza v_1 dată de

$$v_1 = \omega \frac{l_1}{2} \sin\varphi ,$$

fapt care conduce la apariția unei tensiuni electrice în spiră de mărime

$$e = 2l_2 B\omega \frac{l_1}{2} \sin\varphi ,$$

sau

$$e = B\,A\,\omega \sin\varphi .$$

Odată cu tensiunea e, în conductor apare un curent electric de intensitate i care determină, la rândul lui, apariția câte unei forțe de mărime

$$F = B\,l_2 i ,$$

care acționează asupra fiecărei porțiuni de lungime l_2. Aceste două forțe generează un cuplu de mărime

$$M = F\, l_1 \sin\varphi ,$$

care, după substituirea lui F, se scrie

$$M = B\, l_1 l_2 \sin\varphi ,$$

sau

$$M = B\, A\, i \sin\varphi .$$

Se ajunge astfel la aceeaşi relație de conservare a puterii

$$M(t)\omega(t) = e(t)\, i(t) ,$$

care este valabilă când sistemul realizat cu o singură spiră funcționează fie ca motor fie ca generator. În oricare dintre situații modelul bond-graph este un girator modulat având parametrul

$$k_{MGY} = B\, A \sin\varphi ,$$

ceea ce dovedeşte perfecta reversibilitate a celor două variante.

În baza studiului simplificat efectuat cu ajutorul spirei, putem acum să revenim la modelarea funcționării motorului cu bond-graph-ul din fig. 7.9.2. În cazul general al motorului a cărui construcție prezintă n spire, efectul unghiului φ, vizibil la o singură spiră, dispare prin funcția de mediere realizată spațial de cele n spire identice care formează unghiuri echidistante. Din acest motiv, parametrul giratorului din bond-graph-ul asociat motorului (fig. 7.9.2) are valoarea

$$k_{MGY}^{2,3} = c\, \Phi_s ,$$

unde Φ_s este fluxul magnetic generat de circuitul statoric iar c este o constantă.

Ecuațiile de intrare-stare-ieşire deduse din bond-graph-ul reprezentat în fig. 7.9.2. sunt

$$\dot{p}_4 = -\frac{R_e}{L} p_4 - \frac{k_{MGY}^{2,3}}{J} p_6 + u ,$$

$$\dot{p}_6 = \frac{k_{MGY}^{2,3}}{L} p_4 - M_r ,$$

$$i = \frac{p_4}{L} ,$$

$$\omega = \frac{p_6}{J} ,$$

în cazul când mărimile de ieşire sunt intensitatea i a curentului din stator şi viteza unghiulară ω a volantului.

Sub forma matriceală (2.5.2) şi (2.5.3), ecuațiile de mai sus se scriu

$$\begin{bmatrix}\dot{p}_4\\ \dot{p}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_e}{L} & -\dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{J}\\ \dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_4\\ p_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ M_r\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}i\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_4\\ p_6\end{bmatrix},$$

în care

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}p_4\\ p_6\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\ Mr\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}i\\ \omega\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\mathrm{Re}}{L} & -\dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{J}\\ \dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{L} & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{J}\end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a matricei **A** este:

$$s^2+\frac{R_e}{L}s+\frac{\left(k_{MGY}^{2,3}\right)^2}{LJ}=0\,.$$

ale cărei rădăcini au partea reală negativă. Astfel, prin aplicarea unor valori constante u_{st} şi M_{st} drept mărimi de intrare, sistemul va evolua către un regim staționar caracterizat prin următoarele valori constante ale variabilelor de stare:

$$p_{4_{st}}=\frac{L}{k_{\mathrm{MGY}}^{2,3}}M_{r_{st}},$$

$$p_{6_{st}}=\frac{J}{k_{MGY}^{2,3}}u_{st}-\frac{J\cdot R_e}{\left(k_{MGY}^{2,3}\right)^2}M_{r_{st}}$$

şi, respectiv, de ieşire:

$$i_{st}=\frac{M_{r_{st}}}{k_{MGY}^{2,3}},$$

$$\omega_{st}=\frac{1}{k_{MGY}^{2,3}}u_{st}-\frac{R_e}{\left(k_{MGY}^{2,3}\right)^2}M_{r_{st}}\,.$$

Matricea de transfer este conform (2.5.8)

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}G_{11}(s) & G_{12}(s)\\ G_{21}(s) & G_{22}(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+\dfrac{R_e}{L}s+\dfrac{\left(k_{MGY}^{2,3}\right)^2}{LJ}}\begin{bmatrix}\dfrac{s}{L} & \dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{LJ}\\ \dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{LJ} & -\dfrac{1}{J}\left(s+\dfrac{R_e}{L}\right)\end{bmatrix},$$

unde funcţiile de transfer $G_{ij}(s)$ $(i,j=1,2)$ explicitează legătura dintre mărimile de intrare $u_j(t)$ $(j=1,2)$ şi mărimile de ieşire $y_i(t)$ $(i=1,2)$.

Deoarece sistemul este liniar, ecuaţiile de stare se pot scrie în variabilele *i* şi ω pe baza relaţiilor $p_4 = Li,\ p_6 = J\omega$ şi a derivatelor acestora $\dot{p}_4 = L\dfrac{di}{dt},\ \dot{p}_6 = J\dot{\omega}$. Sistemul de ecuaţii de stare este, în această situaţie, de forma

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R_e}{L}i - \frac{k_{MGY}^{2,3}}{L}\omega + \frac{1}{L}u,$$

$$\dot{\omega} = \frac{k_{MGY}^{2,3}}{J}i - \frac{1}{J}M_r.$$

Sub forma matriceală (2.5.2) şi (2.5.3), acest sistem se scrie

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

unde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ M_r \end{bmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_e}{L} & -\dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{L} \\ \dfrac{k_{MGY}^{2,3}}{J} & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{J} \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cu aceste noi matrice, calculul matricei de transfer conform (2.5.8) va conduce la aceeaşi exprimare analitică ca şi în cazul reprezentării de stare anterioare. Acest fapt era de aşteptat deoarece modelul transferului de la variabilele de intrare la variabilele de ieşire este unic, indiferent de modul de alegere a variabilelor de stare.

Schema bloc a sistemului din fig. 7.9.1. este reprezentată în fig. 7.9.5. La fel ca şi în descrierea bond-graph, schema bloc considerată include şi informaţiile referitoare la funcţionarea circuitului statoric.

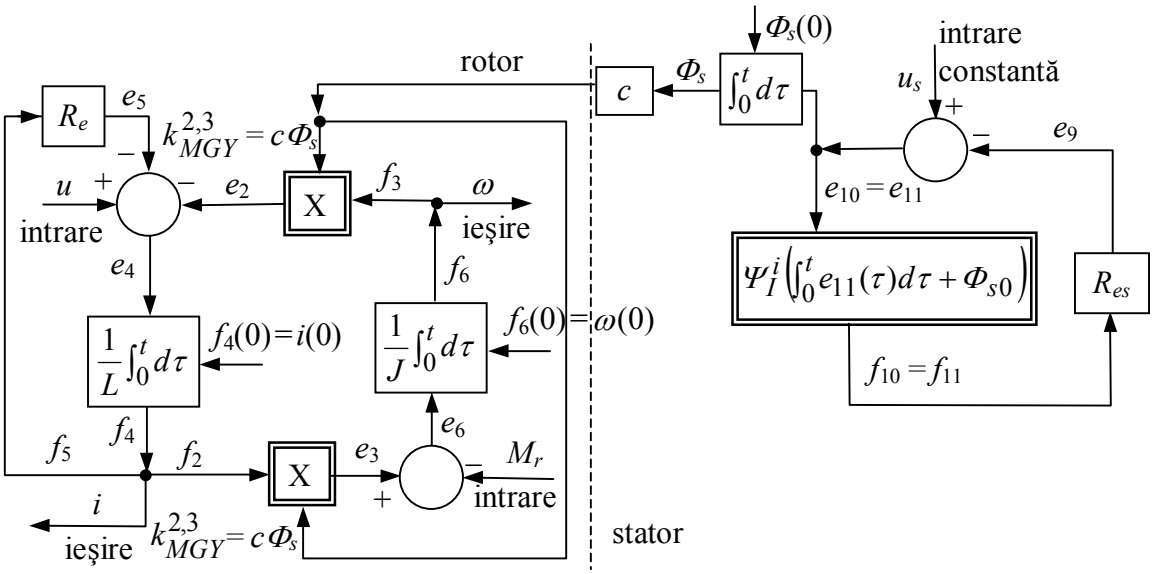


Fig. 7.9.5. Schema bloc a sistemului reprezentat în fig. 7.9.1.

7.10. Convertor de putere rezonant

Se consideră convertorul de putere rezonant (Kassakian *et al.*, 1991) având schema electrică din fig. 7.10.1. (cu valorile concrete L = 197 μH , C_e = 100nF). Două surse identice de tensiune $u_1(t)$ (în situația concretă avută în vedere $u_1(t) = 14$ V) sunt considerate drept *variabile de intrare* şi sunt utilizate pentru a furniza puterea necesară pentru sarcina din diagonala punții alcătuite din diodele D_3, D_4, D_5, D_6. Această sarcină este modelată drept o sursă ideală de tensiune $u_2(t)$ care absoarbe putere de la convertor (cazul concret referindu-se la o baterie cu $u_2(t) = 2$ V care se încarcă cu ajutorul convertorului). Curentul absorbit de această sarcină, $i_2(t)$, va fi considerat drept *variabilă de ieşire* pentru modelul pe care intenționăm să-l construim. Tranzistoarele T_1 şi T_2 funcționează în regim de comutație, fiind comandate de semnalele q_1 şi q_2, de forma unor impulsuri dreptunghiulare de amplitudine constantă şi durată variabilă. Durata acestor impulsuri se alege de aşa manieră încât să asigure evoluția curentului $i_2(t)$ necesar pentru sarcină, motiv pentru care circuitul din fig. 7.10.1 se încadrează în clasa convertoarelor cu impulsuri modulate în durată (*eng*. pulse–width modulation, abreviat PWM).

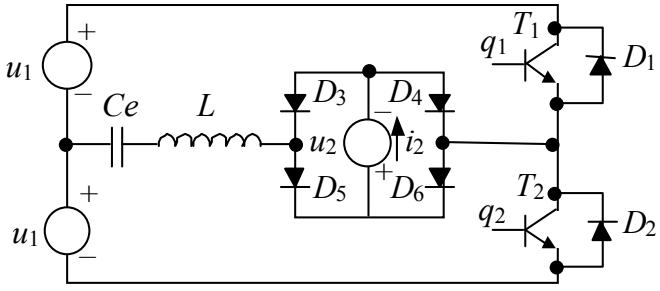


Fig. 7.10.1. Schema electrică a convertorului de putere rezonant

Modelând comutatoarele ca surse ideale de putere nulă (vezi paragraful 6.4.2) şi aplicând regulile de construcţie ale bond-graph-ului acauzal pentru sisteme de natură electrică (vezi subparagraful 5.2.1.1) rezultă reprezentarea din fig. 7.10.2.

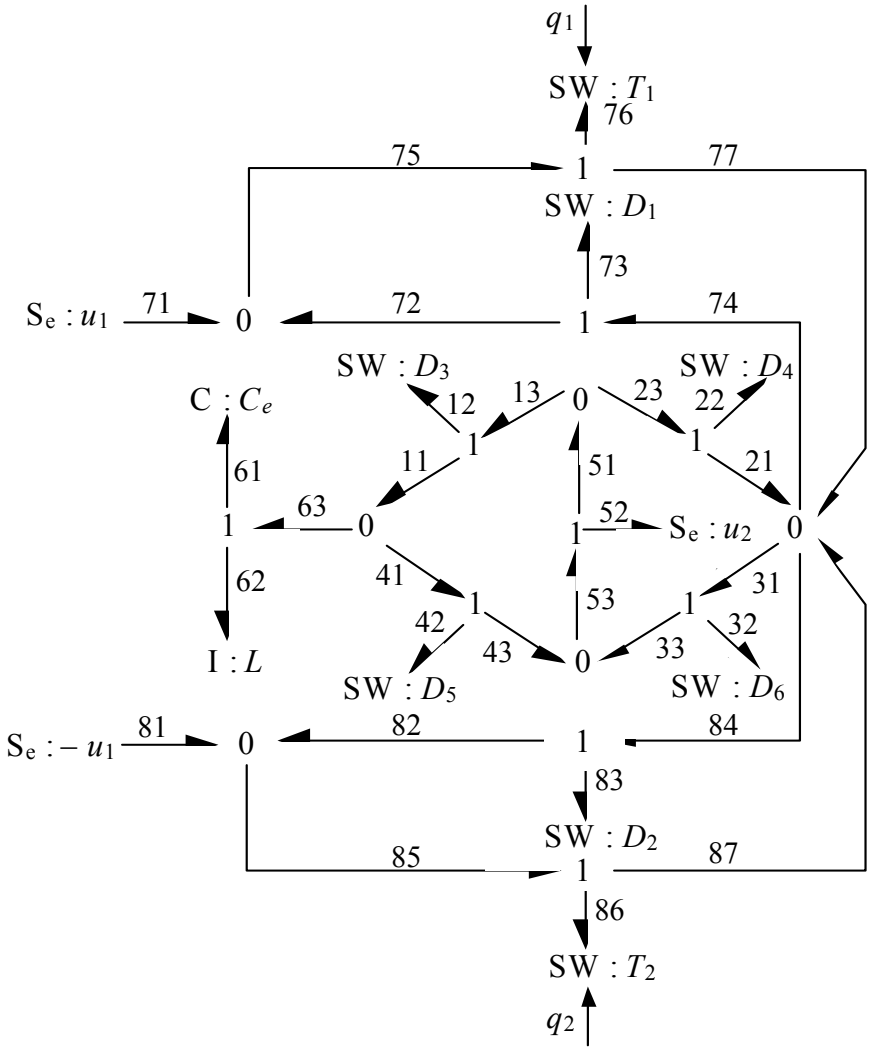


Fig. 7.10.2. Bond-graph-ul acauzal asociat convertorului de putere rezonant din fig. 7.10.1

Atragem atenţia asupra faptului că numerotarea bondurilor nu s-a realizat în succesiunea obişnuită, ci s-a preferat utilizarea grupurilor de câte două cifre de forma 1X, 2X, etc. Avantajele acestui procedeu constau în facilităţile de manipulare create pentru etapele ulterioare.

Din funcţionarea circuitului electric din fig. 7.10.1, se constată că pot exista numai următoarele patru configuraţii ale comutatoarelor, astfel încât să se poată asigura curent prin sarcina din diagonala punţii cu diode. Aceste configuraţii valide presupun conducţia a câte unei diode din două braţe opuse ale punţii, precum şi conducţia unuia din dispozitivele semiconductoare T_1, D_1, T_2 sau D_2, după cum urmează:

a) T_1, D_6, D_3 sunt în conducţie (adică respectivele comutatoare sunt închise) şi restul dispozitivelor semiconductoare sunt blocate. Asignarea cauzalităţii în bond-graph-ul acauzal din fig. 7.10.2, împreună cu aplicarea regulilor specifice pentru comutare (prezentate în paragraful 6.4.2) conduc la bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.3 (a).

Ulterior, efectuând toate simplificările posibile, se obține bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.4.(a).

b) D_1, D_4, D_5 sunt în conducție (adică respectivele comutatoare sunt închise) şi restul dispozitivelor semiconductoare sunt blocate. Asignarea cauzalității în bond-graph-ul acauzal din fig. 7.10.2, împreună cu aplicarea regulilor specifice pentru comutare (prezentate în paragraful 6.4.2) conduc la bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.3 (b). Ulterior, efectuând toate simplificările posibile, se obține bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.4.(b).

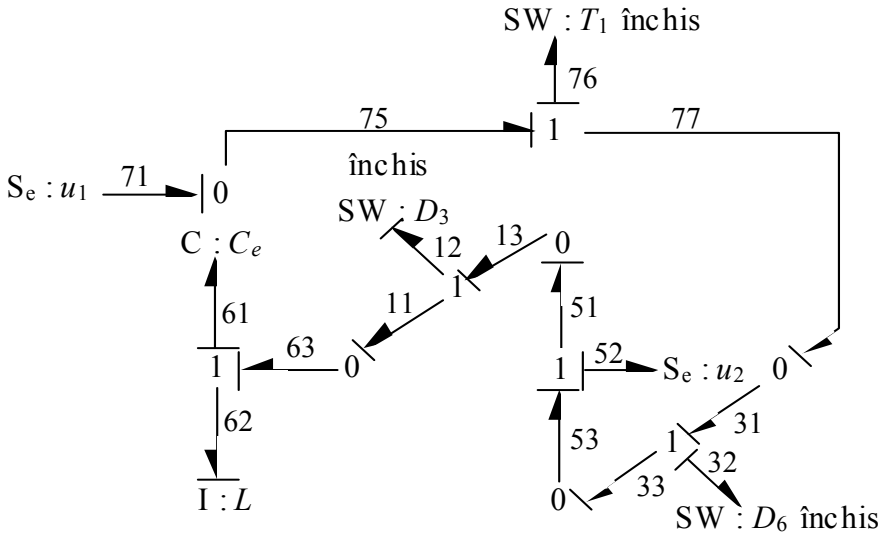
c) T_2, D_5, D_4, sunt în conducție (adică respectivele comutatoare sunt închise) şi restul dispozitivelor semiconductoare sunt blocate. Asignarea cauzalității în bond-graph-ul acauzal din fig. 7.10.2, împreună cu aplicarea regulilor specifice pentru comutare (prezentate în paragraful 6.4.2) conduc la bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.3 (c). Ulterior, efectuând toate simplificările posibile, se obține bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.4.(c).

d) D_2, D_6, D_3 sunt în conducție (adică respectivele comutatoare sunt închise) şi restul dispozitivelor semiconductoare sunt blocate. Asignarea cauzalității în bond-graph-ul acauzal din fig. 7.10.2, împreună cu aplicarea regulilor specifice pentru comutare (prezentate în paragraful 6.4.2) conduc la bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.3 (d). Ulterior, efectuând toate simplificările posibile, se obține bond-graph-ul cauzal din fig. 7.10.4.(d).

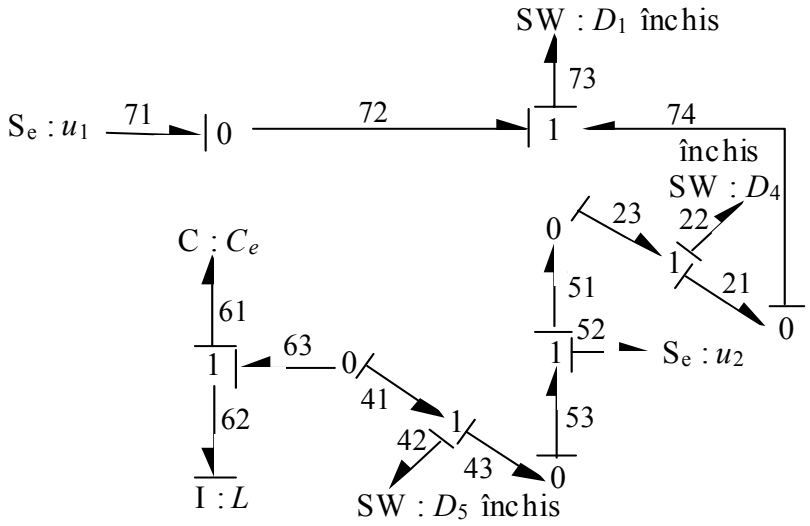
Utilizând bond-graph-urile cauzale din fig. 7.10.4, putem construi un model intrare-stare-ieşire, variant în timp, corespunzător celor patru situații diferite, identificate anterior în funcționarea comutatoarelor. Deoarece în toate aceste bond-graph-uri cauzale, bond-urile 61, 62, 63 îşi păstrează aceeaşi configurație, vom obține descrierea locală unică:

$$\dot{e}_{61}(t) = (1/C_e) f_{62}(t),$$
$$\dot{f}_{62}(t) = -(1/L) e_{61}(t) + (1/L) e_{63}(t),$$
$$f_{63}(t) = f_{62}(t),$$

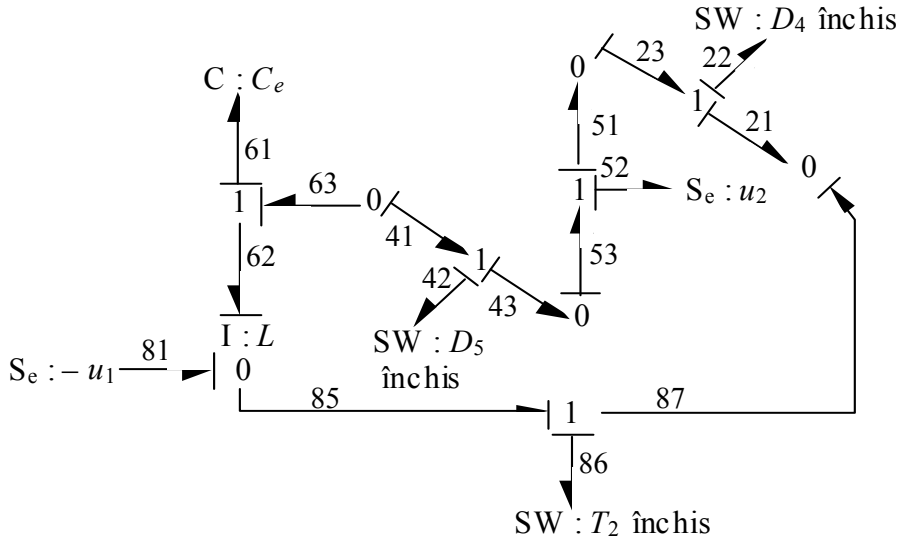
în care $e_{63}(t)$ joacă rolul unui semnal de intrare local (ce va trebui exprimat în funcție de variabilele de intrare ale întregului sistem, $u_1(t)$ şi $u_2(t)$), iar $f_{63}(t)$ joacă rolul unui semnal de ieşire local (ce trebuie să conducă la variabila de ieşire a întregului sistem, $i_2(t) = f_{52}(t)$).


SW : T_1 închis
76
75
1
77
închis
$S_e : u_1$
71
0
SW : D_3
C : C_e
12
13
0
1
61
11
51
1
63
0
1
52
$S_e : u_2$
0
62
53
1
31
32
I : L
0
33
SW : D_6 închis

(a)


SW : D_1 închis
73
$S_e : u_1$
71
0
72
1
74
închis
SW : D_4
C : C_e
0
23
22
1
61
51
21
0
1
63
0
52
$S_e : u_2$
41
62
1
53
42
43
0
I : L
SW : D_5 închis

(b)


SW : D_4 închis
C : C_e
0
23
22
1
61
51
21
0
1
63
0
52
$S_e : u_2$
41
62
1
53
42
43
0
I : L
SW : D_5
$S_e : -u_1$
81
0
închis
85
1
87
86
SW : T_2 închis

(c)

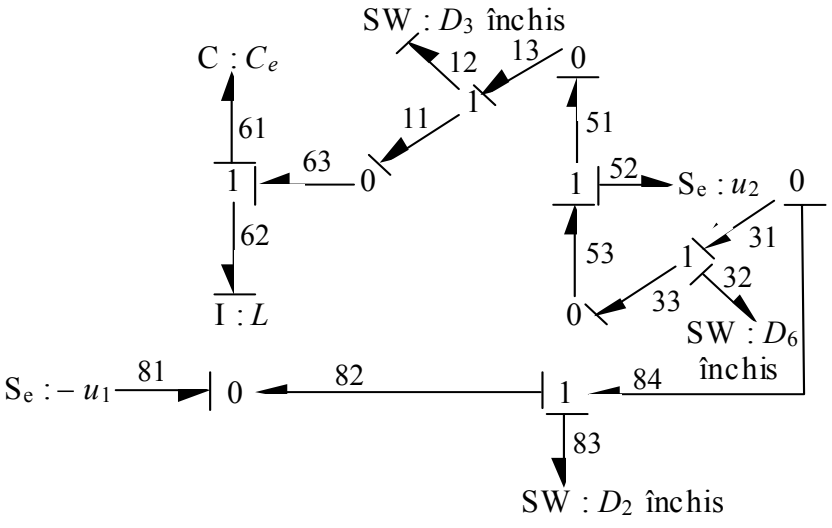


Fig. 7.10.3. Bond-graph-urile cauzale care se obțin din bond-graph-ul acauzal din fig. 7.10.2 prin asignarea cauzalității şi prin aplicarea regulilor specifice pentru comutatoare, în situația când dispozitivele aflate în conducție sunt: **(a)** T_1, D_6, D_3, **(b)** D_1, D_4, D_5, **(c)** T_2, D_5, D_4, **(d)** D_2, D_6, D_3

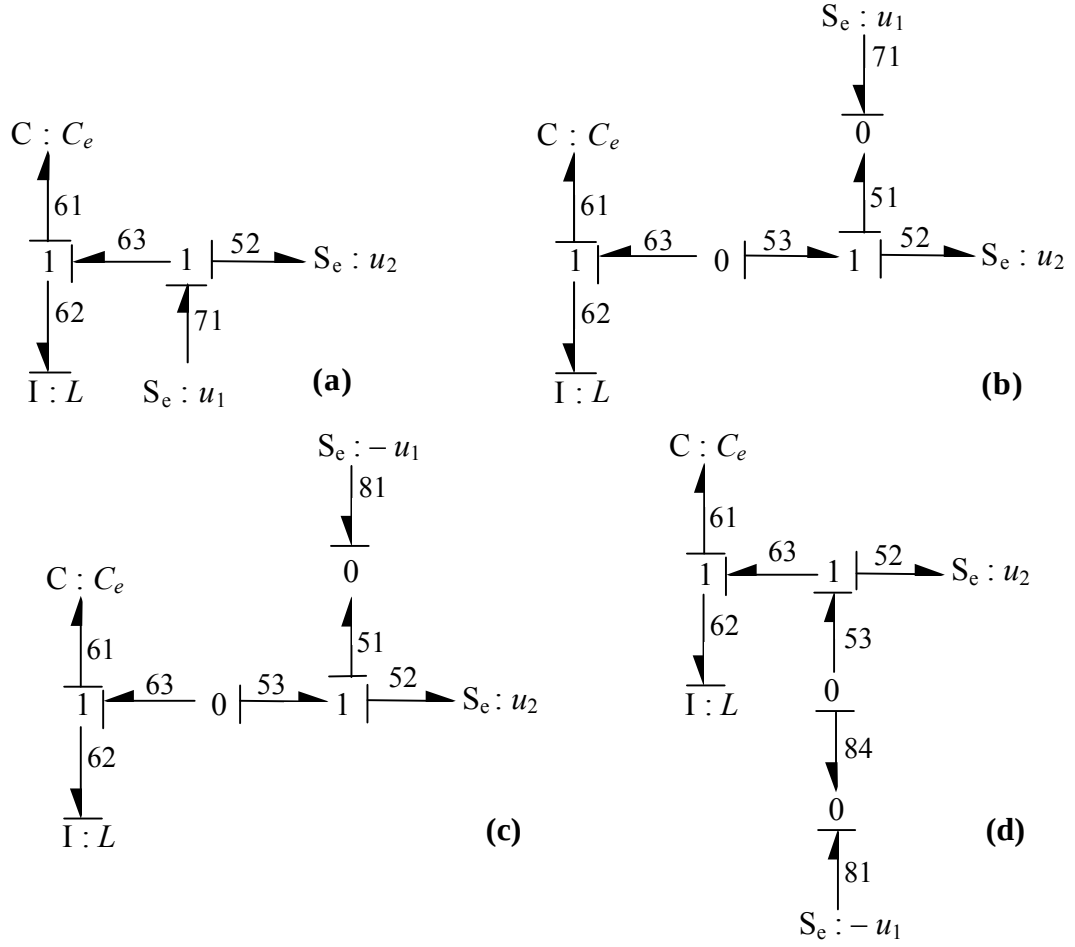


Fig. 7.10.4. Forma simplificată a bond-graph-urilor cauzale, în situația când dispozitivele aflate în conducție sunt: **(a)** T_1, D_6, D_3, **(b)** D_1, D_4, D_5, **(c)** T_2, D_5, D_4, **(d)** D_2, D_6, D_3.

Astfel, în baza bond-graph-urilor din fig. 7.10.4 putem scrie:

a) Pentru fig. 7.10.4 (a), $e_{63}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ şi $f_{52}(t) = f_{63}(t)$.

b) Pentru fig. 7.10.4 (b), $e_{63}(t) = u_1(t) + u_2(t)$ şi $f_{52}(t) = -f_{63}(t)$.

c) Pentru fig. 7.10.4 (c), $e_{63}(t) = -u_1(t) + u_2(t)$ şi $f_{52}(t) = -f_{63}(t)$.

d) Pentru fig. 7.10.4 (d), $e_{63}(t) = -u_1(t) - u_2(t)$ şi $f_{52}(t) = f_{63}(t)$.

Subliniem faptul că în fig. 7.10.3 şi 7.10.4 apar joncțiuni J0 în care sunt conectate numai două bonduri, ambele având orientarea fie către joncțiune, fie către exteriorul ei. În astfel de situații nu putem opera simplificări, semnificația fiind că variabilele *f* pe cele două bonduri sunt egale în modul şi de semne contrare.

Deținem, aşadar, toate informațiile pentru construirea reprezentării de stare variante în timp, de forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{61}(t) \\ \dot{f}_{62}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} e_{61}(t) \\ f_{62}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

$$i_2(t) = f_{52}(t) = \mathbf{c}^T \begin{bmatrix} e_{61}(t) \\ f_{62}(t) \end{bmatrix},$$

în care matricea **A** are o exprimare unică

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_e} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

iar **B** şi $\mathbf{c}^T$ au exprimări diferite, după cum urmează:

a) pentru T_1, D_6, D_3 în conducție:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix};$$

b) pentru D_1, D_4, D_5 în conducție:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix};$$

c) pentru T_2, D_5, D_4 în conducție:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix};$$

d) pentru D_2, D_6, D_3 în conducție:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În final, facem precizarea că modelul s-ar fi putut construi şi în condiţiile când nu am fi făcut apel la cunoştinţe de electronică spre a identifica cele patru configuraţii valide ale comutatoarelor.

Evident, într-o atare situaţie, ar fi fost necesar să exploatăm toate configuraţiile posibile ale comutatoarelor, pe baza principiilor discutate în paragraful 6.4.2, adică aşa cum s-a procedat la sfârşitul Exemplului 6.4.2.

Detalii cu privire la utilizarea modelului obţinut mai sus pentru simularea funcţionării convertorului rezonant pot fi găsite în (Păstrăvanu, 1997).

8. Utilizarea modelelor în simularea numerică

Simularea numerică constituie unul din instrumentele fundamentale ce stau la baza metodelor moderne de analiză asistată de calculator a comportării sistemelor. Simularea utilizează modelele matematice de tip intrare-stare-ieşire sau intrare-ieşire pentru a determina răspunsul (mărimea efect, sau de ieşire - scalară sau vectorială) corespunzător unui anumit stimul (mărime cauză, sau de intrare - scalară sau vectorială), vizând realizarea următoarelor obiective:

- Validarea unui model matematic despre care se afirmă că descrie comportarea unui anumit sistem fizico-tehnic; în scopul validării, rezultatele simulării sunt confruntate cu rezultatele experimentelor efectuate pe sistemul real.
- Studierea comportării unui sistem fizico-tehnic al cărui model matematic a fost validat în prealabil, fără a efectua experimente fizice pe obiectul real.

În contextul acestei lucrări în care modelele încorporează numai sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare, se va face apel numai la resurse software specifice rezolvării numerice a acestui gen de probleme. Informaţiile de ordin practic şi ilustrarea prin exemple sunt axate pe exploatarea facilităţilor software existente în mediul MATLAB-SIMULINK, versiunea 1996. În versiunile mai recente, deşi se aduc unele îmbunătăţiri, principiile generale de organizare şi utilizare rămân neschimbate, dar, pentru detalii, se recomandă consultarea documentaţiei aferente.

Pentru a asigura o relativă autonomie în lectură a textului de faţă, am considerat oportun ca anterior prezentării unor resurse software de tipul celor menţionate, să furnizăm şi o serie de informaţii teoretice, privind elementele de bază ale analizei numerice, ce permit exploatarea eficientă a respectivelor resurse software. În această idee, au fost tratate atât problemele esenţiale ale calculului în virgulă mobilă, cât şi principiile ce fundamentează integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale. Ilustrarea practică prin exemple este în exclusivitate orientată către mediul MATLAB-SIMULINK, recurgând inclusiv la prezentarea unor texte sursă de program, cu scopul de a furniza cât mai multe detalii asupra modului concret de aplicare.

Separat, este discutată construirea automată a modelelor în mediul MATLAB, folosind software-ul dedicat KALIBOND (Jörgl, *et al*., 1987), care, pornind de la un bond-graph acauzal, introdus de utilizator, realizează o descriere intrare-stare-ieşire.

Capitolul curent este organizat pe secţiuni, astfel:

8.1. Elemente fundamentale ale calculului în virgulă flotantă.
8.2. Simularea bazată pe integrarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale.
8.3. Utilizarea mediului MATLAB în simularea sistemelor descrise prin reprezentări intrare-stare-ieşire.
8.4. Utilizarea mediului SIMULINK în simularea sistemelor descrise prin scheme bloc.
8.5. Construirea automată a modelelor în mediul MATLAB folosind software-ul KALIBOND.

8.1. Elemente fundamentale ale calculului în virgulă flotantă

Implementarea aplicațiilor de calcul numeric (deci, în particular, şi a aplicațiilor destinate simulării dinamicii unor sisteme fizice) este dependentă într-o manieră esențială de modul de reprezentare a numerelor (în special, a celor neîntregi) şi de modul de efectuare a calculelor, în condițiile în care orice echipament de calcul (maşină de calcul, sau calculator) pune la dispoziție doar un număr finit de cifre. Pentru a ne referi la aceste aspecte legate de finititudinea reprezentărilor numerice cu care se operează într-un anumit calculator, se foloseşte terminologia de "aritmetica în virgulă flotantă (sau mobilă)" specifică maşinii respective (care este dictată, în principal, de hardware-ul calculatorului, dar, uneori şi de software-ul utilizat). Aritmetica în virgulă flotantă diferă de aritmetica uzuală (standard) tocmai prin prezența aproximărilor la care trebuie să se facă apel datorită numărului finit de cifre. De acea, în rezolvarea numerică a problemelor, trebuie privită cu circumspecție utilizarea algoritmilor standard, cunoscuți din matematică (bazându-se pe calcule exacte) şi, totodată, trebuie înțeleasă necesitatea de a utiliza şi/sau concepe *algoritmi adecvați* prelucrărilor tipice aritmeticii în virgulă flotantă. Ignorarea acestor aspecte legate de adecvanța algoritmilor implementați pe parcursul elaborării de programe conduce, cel mai adesea, la produse artizanale, care, prin rezultatele eronate furnizate în majoritatea cazurilor, aduc, în fond, mari deservicii celor ce le utilizează.

8.1.1. Surse de erori în rezolvarea numerică a problemelor

Se pot distinge trei tipuri de erori care, pe parcursul rezolvării numerice a unei probleme, interacționează, afectând precizia rezultatelor (Gerald and Wheatley, 1989).

Erorile inerente sunt erori cauzate de utilizarea (în lipsa unor informații exacte) a unor informații cu caracter aproximativ, care pot proveni din cunoaşterea imprecisă a coeficienților unui model matematic, din realizarea unor măsurători cu precizie scăzută, din calcule anterioare problemei curente ce se rezolvă. Conceperea şi efectuarea unor teste sistematice permite a studia senzitivitatea rezultatelor în raport cu modificarea datelor ce pot fi afectate de erori inerente.

Erorile de trunchiere (sau *de discretizare*) sunt datorate unor metode sau algoritmi care, în rezolvarea unor probleme, înlocuiesc soluțiile analitice exacte (presupunând un număr infinit de operații) prin soluții aproximative (rezultând în urma unui număr finit de operații). Astfel de erori provin uzual din discretizarea unor probleme continue, din terminarea forțată (într-un număr finit de paşi) a proceselor iterative, sau din trunchierea unor serii infinite.

Erorile de rotunjire se datorează modului de reprezentare a datelor şi/sau modului de efectuare a calculelor cu precizie finită (adică folosind aritmetica în virgulă flotantă), conducând la operarea cu valori numerice aproximative.

Înainte de a ilustra printr-un exemplu posibilitatea apariției diferitelor tipuri de erori în simularea numerică a funcționării unui sistem fizic, atragem atenția asupra faptului că noțiunea de "aproximare" se referă la aspecte diferite în cazul celor trei clase de erori menționate anterior. Astfel, în cazul erorilor inerente, cunoaşterea unor date ce caracterizează

sistemul fizic studiat este aproximativă; în cazul erorilor de trunchiere, algoritmul de rezolvare a problemei aproximează un mod de calcul exact (de utilitate pur teoretică, neimplementabil numeric) şi, în fine, în cazul erorilor de rotunjire, aproximarea se referă la acurateţea cu care sunt reprezentate valorile numerice şi/sau se efectuează operaţiile în intimitatea unui echipament de calcul.

Exemplul 8.1.1.

Să considerăm un circuit electric real cu o topologie identică cu cea utilizată în Exemplul 2.4.1, pentru care mărimea de ieşire este tensiunea pe bobină, conform cazului (*iv*) discutat în acel exemplul. Dacă se doreşte simularea numerică a funcţionării acestui circuit real, vom face apel la descrierea intrare-stare-ieşire construită în Exemplul 2.4.1, în care parametrilor R_e, C_e şi L li se vor atribui valorile numerice concrete aferente componentelor din structura circuitului real. În principiu, drept valori numerice concrete se folosesc acele valori care sunt înscrise pe componente, dar, totodată, este binecunoscut faptul că aceste valori înscrise pot diferi de valorile adevărate (care s-ar putea obţine prin măsurări precise efectuate pe componente), diferenţele datorându-se însuşi procesului tehnologic de fabricare a componentelor. Astfel, prin utilizarea valorilor numerice înscrise pe componente (în locul valorilor numerice adevărate), rezultatele simulării vor fi afectate de *erori inerente*. Rezultatele simulării vor fi de asemenea afectate de *erori inerente*, dacă drept valori numerice concrete se vor folosi valorile obţinute prin măsurări de proastă calitate a componentelor circuitului.

Să presupunem că pentru simularea răspunsului liber se utilizează relaţia (2.4.12) pentru diverse valori ale variabilei cu semnificaţie temporală t. Dacă exponenţiala matriceală se va calcula cu formula aproximativă $e^{\mathbf{A}t} \cong \sum_{k=0}^{k=N} 1/(k!)\mathbf{A}^k t^k$ (cu număr finit de termeni), în loc de formula exactă $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{k=\infty} 1/(k!)\mathbf{A}^k t^k$ (cu o infinitate de termeni - care nu poate fi folosită practic), atunci rezultatele vor fi afectate de *erorile de trunchiere* ce se produc prin substituirea sumei acestei serii cu suma parţială de mai sus. Precizăm că erorile de trunchiere se manifestă la nivelul fiecărui element al matricei pătrate ce defineşte suma parţială respectivă, fiind cu atât mai mare cu cât numărul de termeni consideraţi în suma parţială este mai mic, adică cu cât N are valori mai scăzute. Fără a intra în nici un fel de detalii, atragem totuşi atenţia asupra faptului că utilizarea relaţiei (2.4.12) nu constituie un algoritm recomandabil pentru simularea numerică a funcţionării circuitului, dar am făcut apel la el în acest exemplu pentru a ilustra o posibilitate de apariţie a erorilor de trunchiere. Unul din motivele pentru care se evită acest algoritm îl constituie calculul matricei $\mathbf{A}^k$ pentru valori mari ale lui k, când se vor manifesta *erori de rotunjire*, deoarece, în general, prin ridicarea matricei **A** la puterea k, se constată o creştere vertiginoasă a numărului de cifre exacte corespunzătoare fiecărui element al matricei în parte. Altfel spus, la o anumită putere k^*, se va depăşi numărul finit de cifre puse la dispoziţie de aritmetica în virgulă flotantă, putere de la care încolo ($k \geq k^*$), reprezentarea elementelor matricei va fi afectată de rotunjiri .

8.1.2. Aritmetica în virgulă mobilă (flotantă)

Să notăm prin F *mulțimea numerelor care pot fi reprezentate în virgulă mobilă* pe o anumită maşină (calculator). Evident F este o submulțime a mulțimii numerelor reale, care, utilizând caracteristicile maşinii considerate, poate fi definită astfel:

$$\mathsf{F} = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x = \pm f\, b^{e} \right\}, \tag{8.1.1}$$

unde f se numeşte *mantisă*, b se numeşte *bază* şi e se numeşte *exponent*, iar simbolul $\pm$ precizează semnul numărului. Mantisa f din (8.1.1) exprimă o valoare *pozitivă*, care posedă următoarea scriere cu $p \geq 1$ cifre reprezentate în baza $b \geq 2$:

$$f = f_1 b^{-1} + \ldots + f_p b^{-p}, \tag{8.1.2}$$

unde $f_1 \in \{1, \ldots, b-1\}$ (adică nu poate lua valoarea 0), $f_2, f_3, \ldots, f_p \in \{0, \ldots, b-1\}$, iar p se numeşte *precizia* maşinii. Exponentul e din (8.1.1) este un număr întreg satisfăcând dubla mărginire $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$, cu $e_{\min} < 0$ şi, respectiv $e_{\max} > 0$.

Modul de scriere utilizat mai sus pentru mantisa f, cu prima cifră nenulă $f_1 \neq 0$, face ca reprezentarea generică din (8.1.1) să fie referită drept o *reprezentare normalizată*.

Exemplul 8.1.2.

Vom discuta modul de reprezentare în virgulă flotantă specific mediului software de calcul tehnico-ştiințific MATLAB instalat pe maşini compatibile IBM PC, deoarece acest mediu pune la dispoziția utilizatorului numeroase facilități pentru simularea numerică, de care ne vom ocupa în detaliu pe parcursul ultimelor trei secțiuni ale capitolului curent. În discuția noastră ne vom opri numai asupra reprezentării de tip "dublă precizie", întrucât toate operațiile aritmetice din MATLAB se efectuează numai cu operanzi (numere) având o astfel de reprezentare. Reprezentarea oricărui număr real se realizează pe 8 octeți, adică pe 64 de poziții binare (biți). (Un număr complex este tratat ca o pereche de numere reale, corespunzând părții reale şi, respectiv, imaginare, alocând fiecărui număr din pereche câte 64 de poziții binare).

Înainte de a ne ocupa de reprezentarea proprie software-ului MATLAB, vom studia, cu caracter pregătitor, o modalitate de reprezentare în virgulă mobilă pe 8 octeți, detaliată în prezentarea grafică din fig. 8.1.1. Considerăm că reprezentarea se realizează în baza doi (adică b=2 în exprimările (8.1.1) şi (8.1.2)), iar cei 64 de biți (numerotați de la 0 la 63) sunt întrebuințați după cum urmează:

- primul bit (bitul 0) este utilizat pentru *semnul numărului* ($\pm$) din exprimarea (8.1.1), luând valoarea 0 atunci când semnul este "+" şi, respectiv, valoarea 1 atunci când semnul este "–";
- următorii 11 biți (de la bitul 1, la bitul 11) sunt utilizați pentru *exponentul e* din exprimarea (8.1.1);
- ultimii 52 biți (de la bitul 12 la bitul 63) sunt utilizați pentru *mantisa normalizată f* din exprimările (8.1.1) şi (8.1.2).

Componente	±	Exponent				Mantisă normalizată																									
Poziții binare	0	1..3		4..7		8..11		12..15		16..19		20..23		24..27		28..31		32..35		36..39		40..43		44..47		48..51		52..55		56..59		60..63	
Octeți	0					1				2				3				4				5				6				7	

Fig. 8.1.1. Detalierea unei modalităţi de reprezentare în virgulă mobilă pe 8 octeţi, utilizând baza doi (b=2) în exprimările (8.1.1) şi (8.1.2)

În baza reprezentării din fig. 8.1.1 (care, după cum am atras deja atenţia mai sus, nu este identică cu reprezentarea utilizată în MATLAB), constatăm că exprimarea (8.1.2) are loc pentru $p = 52$, adică bitul 12 memorează cifra binară f_1, bitul 13 memorează cifra binară f_2 şi aşa mai departe până la bitul 63 care memorează cifra binară f_{52}. Totodată, observăm că valorile extreme $e_{\min} < 0$ şi, respectiv, $e_{\max} > 0$ admise pentru exponentul e din exprimarea (8.1.1) beneficiază de o scriere cu 11 poziţii binare, din care prima poziţie binară (adică bitul 1 din fig. 8.1.1) este ocupată de semnul exponentului. Astfel, pentru modulul exponentului rămân disponibile 10 poziţii binare (adică biţii 2 până la 11 din fig. 8.1.1), ceea ce înseamnă că valoarea maximă ce poate fi reprezentată este 2^{10}-1 = 1023, adică, luând în considerare şi semnul exponentului, rezultă $e_{min} = -1023$ şi, respectiv, $e_{max} = +1023$.

Pornind de la modalitatea de reprezentare în virgulă mobilă din fig. 8.1.1, putem ajunge cu uşurinţă exact la reprezentarea proprie software-ului MATLAB (ilustrată în fig. 8.1.2), dacă avem în vedere următoarele două posibilităţi de eficientizare a reprezentării din fig. 8.1.2:

1. Datorită faptului că *prima poziţie binară* a mantisei normalizate (adică cifra f_1 din (8.1.2), corespunzând bitului 12 în fig. 8.1.1) *este întotdeauna* 1, utilizarea bitului 12 pentru a memora egalitatea mereu adevărată f_1=1 nu are rost. De aceea bitul 12 din fig. 8.1.2 poate fi întrebuinţat pentru a memora cifra binară f_2 a mantisei normalizate din exprimarea (8.1.2). Continuând în aceeaşi manieră şi deplasând cu un bit toate cifrele mantisei normalizate, se ajunge ca în reprezentarea din fig. 8.1.2 bitul 13 să memoreze f_3, bitul 14 să memoreze f_4, până la bitul 63 care va memora f_{53}. Acest principiu de reprezentare pentru mantisa normalizată se numeşte "cu bit ascuns" (*eng.* hidden bit) şi precizia maşinii este astfel p=53.
2. Memorarea semnului exponentului cu ajutorul bitului 1 din fig. 8.1.1 poate fi evitată, dacă la valoarea reală (negativă sau pozitivă) a exponentului e din exprimarea (8.1.1) se adaugă o valoare pozitivă d, denumită *deplasare*, astfel încât în poziţiile binare 1,2,…,11 din fig. 8.1.2 să fie plasată întotdeauna o cantitate strict pozitivă, $c = e + d$, denumită *caracteristică*. Valoarea utilizată în mediul MATLAB pentru deplasare este d = $(1111111110)_B$ = $(3fe)_H$ = 1022. Problematica exprimării numerelor întregi în bazele 2 şi 16 este tratată în majoritatea textelor elementare de programarea şi/sau construcţia calculatoarelor, dar informaţiile fundamentale au fost rezumate şi în Anexa II a acestei cărţi, cu scopul de a asigura autonomia lecturii.

| Componente | ± | Caracteristică | | | | Mantisă normalizată cu prima poziţie binară ascunsă | | | |

- Numărul zecimal 0.5=1/2 se scrie în baza b=2, conform (8.1.1) şi (8.1.2), folosind semnul '–', mantisa f=1*2^{-1} şi exponentul e=0. În fig. 8.1.3 detaliem reprezentarea de tipul celei prezentate fig. 8.1.1 (adică fără deplasare referitoare la exponent şi fără ascunderea primei cifre binare a mantisei normalizate). Reprezentarea în mediul MATLAB înseamnă utilizarea caracteristicii $c = e + d = (1111111110)_B = (3fe)_H$ pe poziţiile binare 1,2,...,11 şi ascunderea cifrei binare f_1=1, concomitent cu deplasarea spre stânga, cu un bit, a tuturor cifrelor mantisei normalizate. Se obţine, astfel, reprezentarea MATLAB $(3fe0000000000000)_H$ din fig. 8.1.4, care este de tipul celei prezentate în fig. 8.1.2. Verificarea în MATLAB este imediată, tastând comanda de conversie **hex2num('3fe')** care va returna valoarea zecimală 0.5.

Componente	±	Exponent			Mantisă normalizată											
Poziţii binare	0	1..3	4..7	8..11	12..15	16..19	20..23	24..27	28..31	32..35	36..39	40..43	44..47	48..51	52..55	56..59	60..63
Valori binare	0	000	0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa	0		0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Octeţi	0			1	2			3		4			5		6		7

Fig. 8.1.3. Reprezentarea numărului 0.5 în virgulă mobilă pe 8 octeţi, conform detalierii din fig. 8.1.1

Componente	±	Caracteristică			Mantisă normalizată cu prima poziţie binară ascunsă											
Poziţii binare	0	1..3	4..7	8..11	12..15	16..19	20..23	24..27	28..31	32..35	36..39	40..43	44..47	48..51	52..55	56..59	60..63
Valori binare	0	011	1111	1110	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa	3		f	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Octeţi	0			1	2			3		4			5		6		7

Fig. 8.1.4. Reprezentarea numărului 0.5 în virgulă mobilă pe 8 octeţi, în mediul MATLAB, conform detalierii din fig. 8.1.2

- Numărul zecimal $-0.5 = -1/2$ diferă ca reprezentare în mediul MATLAB de $0.5 = 1/2$ numai prin poziţia binară 0 (corespunzătoare semnului), care este 1. Se obţine, astfel, reprezentarea MATLAB $(bfe0000000000000)_H$ din fig. 8.1.5, care este de tipul celei prezentate în fig. 8.1.2. Verificarea în MATLAB este imediată, tastând comanda de conversie **hex2num('bfe')** care va returna valoarea zecimală –0.5.

Componente	±	Caracteristică			Mantisă normalizată cu prima poziţie binară ascunsă											
Poziţii binare	0	1..3	4..7	8..11	12..15	16..19	20..23	24..27	28..31	32..35	36..39	40..43	44..47	48..51	52..55	56..59	60..63
Valori binare	1	011	1111	1110	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa	b		f	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Octeţi	0			1	2			3		4			5		6		7

Fig. 8.1.5. Reprezentarea numărului –0.5 în virgulă mobilă pe 8 octeţi, în mediul MATLAB, conform detalierii din fig. 8.1.2

- Numărul zecimal –6.5 se scrie în baza b = 2, conform (8.1.1) şi (8.1.2), folosind semnul '–', mantisa $f = 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 0 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4}$ şi exponentul $e = 3$. În fig. 8.1.6 detaliem reprezentarea de tipul celei prezentate fig. 8.1.1 (adică fără deplasare referitoare la exponent şi fără ascunderea primei cifre binare a mantisei normalizate). Reprezentarea în mediul MATLAB înseamnă utilizarea caracteristicii $c = e + d = (10000000001)_B = (401)_H$

pe poziţiile binare 1,2,...,11 şi ascunderea cifrei binare $f_1 = 1$, concomitent cu deplasarea spre stânga, cu un bit, a tuturor cifrelor mantisei normalizate. Se obţine, astfel, reprezentarea MATLAB $(c01a000000000000)_H$ din fig. 8.1.7, care este de tipul celei prezentate în fig. 8.1.2. Verificarea în MATLAB este imediată, tastând comanda de conversie **hex2num('c01a')** care va returna valoarea zecimală –6.5.

Componente	±	Exponent			Mantisă normalizată											
Poziţii binare	0	1…3	4…7	8…11	12…15	16…19	20…23	24…27	28…31	32…35	36…39	40…43	44…47	48…51	52…55	56…59	60…63
Valori binare	0	000	0000	0011	1101	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa		8	0	3	d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Octeţi		0		1		2		3		4		5		6		7	

Fig. 8.1.6. Reprezentarea numărului –6.5 în virgulă mobilă pe 8 octeţi, conform detalierii din fig. 8.1.1

Componente	±	Caracteristică			Mantisă normalizată cu prima poziţie binară ascunsă											
Poziţii	0	1…3	4…7	8…11	12…15	16…19	20…23	24…27	28…31	32…35	36…39	40…43	44…47	48…51	52…55	56…59	60…63
Valori binare	1	100	0000	0001	1010	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa		c	0	1	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Octeţi		0		1		2		3		4		5		6		7	

Fig. 8.1.7. Reprezentarea numărului –6.5 în virgulă mobilă pe 8 octeţi, în mediul MATLAB, conform detalierii din fig. 8.1.2

Definirea mulţimii F prin intermediul exprimării (8.1.1) conduce la constatarea deosebit de importantă că mulţimea numerelor care pot fi reprezentate în virgulă mobilă pe orice maşină conţine un *număr finit de elemente*.

Distanţa absolută între două numere în virgulă mobilă *alăturate* (deci care posedă acelaşi exponent *e*) este constantă şi egală cu b^{e-p}. Drept consecinţă, *distanţa relativă* se defineşte prin

$$b^{e-p} / \mid fb^{e} \mid = b^{-p} / f , \tag{8.1.3}$$

care creşte odată cu descreşterea mantisei. Cum din (8.1.2), pentru valoarea mantisei normalizate avem dubla inegalitate $b^{-1} \le f < 1$, rezultă că *distanţa relativă maximă* are valoarea:

$$\varepsilon_M = b^{1-p} . \tag{8.1.4}$$

Parametrul ε_M mai este cunoscut si sub denumirea de *precizia relativă a maşinii* sau *epsilonul maşină*. Pe majoritatea calculatoarelor ε_M este cel mai mic număr pozitiv reprezentabil in calculator, care, totodată, satisface pentru operarea *în virgula mobilă*, condiţia $1 + \varepsilon_M \neq 1$.

Distanţa relativă minimă are valoarea:

$$\varepsilon'_M = b^{-p} , \tag{8.1.5}$$

care, pe calculatoare cu baza *b*=2, înseamnă jumătate din valoarea distanţei relative maxime, adică $\varepsilon'_M = (1/2)\varepsilon_M$.

Cel mai mic număr pozitiv reprezentabil are valoarea:

$$\sigma = b^{e_{\min}-1}, \tag{8.1.6}$$

iar *cel mai mare număr pozitiv* reprezentabil este:

$$\lambda = b^{e_{\max}}(1 - b^{p}). \tag{8.1.7}$$

În cazul când, din calcule, rezultă o valoare mai mică în modul decât σ, maşina semnalează o *depăşire inferioară*, iar în cazul când rezultă o valoare mai mare în modul decât λ, maşina semnalează o *depăşire superioară*. În lucrări de specialitate sunt date valorile tuturor acestor parametri pentru diverse tipuri de maşini.

Procedeele recente utilizate pentru a asigura portabilitatea completă a softwareului ştiinţific constau în furnizarea constantelor maşină prin intermediul unor subprograme speciale. Există unele case de soft care, din raţiuni comerciale, furnizează versiuni de cod specifice pentru fiecare tip de maşină.

Exemplu 8.1.3.

Cunoscând modul de reprezentare în virgulă mobilă pe 8 octeţi în mediul MATLAB, ne propunem să găsim valorile constantelor pozitive ε_M, λ şi σ specifice MATLAB.

- Epsilonul maşină ε_M este $(3cb0000000000000)_H$, conform fig. 8.1.8. Această reprezentare are exponentul $e = (3cb)_H - (3fe)_H = -(33)_H = -51$. Astfel, dacă vom ţine cont şi de existenţa bitului ascuns al mantisei, scrierea de forma (8.1.1) a numărului respectiv va fi $+(1*2^{-1})*(2^{-51}) = 2^{-52} = 2.220446049250313*10^{-16}$. Într-adevăr, această valoare se va obţine prin utilizarea comenzii **hex2num('3cb0000000000000')** şi, mai mult, mediul MATLAB o furnizează la tastarea comenzii **eps**, care, după cum arată şi numele, are drept scop returnarea epsilonului maşină în aritmetica MATLAB. Totodată $\varepsilon_M = 2^{1-53}$ verifică expresia generală a valorii ε_M dată în (8.1.4), pentru cazul particular când b=2 şi p=53. Se poate constata cu uşurinţă faptul că $1+\mathbf{eps} = (3ff0000000000000)_H+(3cb0000000000000)_H = (3ff0000000000001)_H \neq 1$, iar pentru numărul **eps**/2 (adică imediat inferior lui **eps**), avem $1+\mathbf{eps}/2 = (3ff0000000000000)_H+(3ca0000000000000)_H = (3ff0000000000000)_H = 1$.

Componente	±	Caracteristică			Mantisă normalizată cu prima poziţie binară ascunsă												
Poziţii binare	0	1..3	4..7	8..11	12..15	16..19	20..23	24..27	28..31	32..35	36..39	40..43	44..47	48..51	52..55	56..59	60..63
Valori binare	0	011	1100	1011	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa	3		c	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Octeţi	0			1	2			3		4		5		6		7	

Fig. 8.1.8. Epsilonul maşină ε_M (**eps**) pentru reprezentarea în virgulă mobilă pe 8 octeţi în mediul MATLAB, conform detalierii din fig. 8.1.2

- Valoarea pozitivă cea mai mare λ care poate fi reprezentată în virgulă mobilă pe 8 octeţi în mediul MATLAB este $(7feffffffffffff)_H$, conform fig. 8.1.9. Această reprezentare corespunde valorii maxime a caracteristicii, ceea ce înseamnă că prin scăderea deplasării $d = (3fe)_H$, vom obţine valoarea maximă a exponentului $e_{\max} = (400)_H = 4*(16^2) = 1024$. Astfel, ţinând cont şi de existenţa bitului ascuns al mantisei, scrierea de forma (8.1.1) a numărului respectiv va fi $+(1*2^{-1}+\ldots+1*2^{-53})*(2^{1024}) = (1-2^{-53})*(2^{1024}) = (2^{53}-1)*(2^{971}) =$

$1.797693134862316*10^{308}$. Într-adevăr, această valoare se va obține prin utilizarea comenzii **hex2num('7fefffffffffffff')** şi, mai mult, mediul MATLAB o furnizează la tastarea comenzii **realmax**, care, după cum arată şi numele, are drept scop returnarea celui mai mare număr pozitiv reprezentabil în aritmetica MATLAB. Totodată $\lambda = (1-2^{-53})*(2^{1024})$ verifică expresia generală a valorii λ dată în (8.1.7), pentru cazul particular când $e_{max} = 1024$, $b=2$ şi $p=53$. Atragem atenția asupra faptului că orice număr cu valoare mai mare decât cea precizată mai sus (introdus de utilizator, sau rezultat din efectuarea unor calcule în mediul MATLAB) va fi reprezentat în virgulă mobilă pe 8 octeți prin $(7ff0000000000000)_H$, iar utilizatorului îi va fi afişat şirul de caractere **Inf** (ca abreviere a cuvântului englezesc "infinity"), fără nici o altă semnalizare privind depăşirea superioară a domeniului acceptat de valori pozitive.

Componente	±	Caracteristică			Mantisă normalizată cu prima poziție binară ascunsă													
Poziții binare	0	1..3	4..7	8..11	12..15	16..19	20..23	24..27	28..31	32..35	36..39	40..43	44..47	48..51	52..55	56..59	60..63	
Valori binare	0	111	1111	1110	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	
Valori hexa	7		f	e	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	
Octeți	0			1		2			3			4			5		6	7

Fig. 8.1.9. Valoarea pozitivă cea mai mare λ (**realmax**) care poate fi reprezentată în virgulă mobilă pe 8 octeți în mediul MATLAB, conform detalierii din fig. 8.1.2

- Valoarea pozitivă cea mai mică σ ce poate fi reprezentată în virgulă mobilă pe 8 octeți în mediul MATLAB este $(0010000000000000)_H$, conform fig. 8.1.10. Această reprezentare corespunde valorii minime a caracteristicii, ceea ce înseamnă că prin scăderea deplasării $d=(3fe)_H$, vom obține valoarea minimă a exponentului $e_{min}=-(3fd)_H = -1021$. Astfel, ținând cont şi de existența bitului ascuns al mantisei, scrierea de forma (8.1.1) a numărului respectiv va fi $+(1*2^{-1})*(2^{-1021}) = 2^{-1022} = 2.225073858507202*10^{-308}$. Într-adevăr, această valoare se va obține prin utilizarea comenzii hex2num('0010000000000000') şi, mai mult, mediul MATLAB o furnizează la tastarea comenzii **realmin**, care, după cum arată şi numele, are drept scop returnarea celui mai mic număr pozitiv reprezentabil în aritmetica MATLAB. Totodată $\sigma = 2^{-1021-1}$ verifică expresia generală a valorii σ dată în (8.1.6), pentru cazul particular când $e_{min} = -1021$ şi $b = 2$. Subliniem faptul că valoarea **realmin** este definită într-o manieră simetrică cu valoarea **realmax**, prin raportare la reprezentarea cu mantisa normalizată. Totuşi, mediul MATLAB este capabil să opereze şi cu reprezentări cu mantisa denormalizată pentru valori pozitive mai mici decât **realmin**. În astfel de cazuri, grupul primelor trei cifre hexazecimale va fi întotdeauna $(000)_H$, situația extremă la care se poate ajunge fiind $(0000000000000001)_H$ = **realmin**$*2^{-52}$ = $4.940656458412465*10^{-324}$. Pentru orice număr pozitiv mai mic decât această valoare, utilizatorului îi va fi afişată valoarea 0, fără nici o altă semnalizare privind depăşirea inferioară a domeniului acceptat de valori pozitive.

Componente	±	Caracteristică			Mantisă normalizată cu prima poziție binară ascunsă												
Poziții binare	0	1..3	4..7	8..11	12..15	16..19	20..23	24..27	28..31	32..35	36..39	40..43	44..47	48..51	52..55	56..59	60..63
Valori binare	0	000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valori hexa	0		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Octeți	0	1	2	3	4	5	6	7

Fig. 8.1.10. Valoarea pozitivă cea mai mică σ (**realmin**) ce poate fi reprezentată în virgulă mobilă pe 8 octeți în mediul MATLAB, conform detalierii din fig. 8.1.2

Din cele discutate mai sus referitor la reprezentarea în virgulă flotantă, se constată că mulțimea F are o *natură discontinuă*, astfel încât fiecare *număr* din mulțimea F reprezintă, de fapt, *un interval* de numere reale. Se poate, aşadar, defini aplicația:

$$\mathrm{fl}:[-\lambda,\lambda]\to \mathsf{F} \tag{8.1.8}$$

care asociază unui număr real cel mai apropiat număr din F şi care se numeşte *funcție de rotunjire*. Se arată [Voievodine, 1980] că *eroare relativă de rotunjire* satisface inegalitatea:

$$\left|\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right| \le \frac{1}{2}b^{1-p}. \tag{8.1.9}$$

Operațiile aritmetice definite pe mulțimea discontinuă F se numesc *operații în virgulă flotantă.* Rezultatele unor astfel de operații reprezintă *aproximații* pentru rezultatele operațiilor definite în manieră standard pe mulțimea numerelor reale. Dacă notăm prin simbolul $\oplus$ o operație în virgulă flotantă, eroarea introdusă de inexactitatea operației (ca urmare a faptului că se lucrează în mulțimea F şi nu în mulțimea numerelor reale) se poate evalua din relația:

$$\mathrm{fl}(x \oplus y) = [x(1+\varepsilon_1)] \oplus [y(1+\varepsilon_2)], \tag{8.1.10}$$

unde ε_1 şi ε_2 sunt de ordinul epsilonului maşină ε_M Cu alte cuvinte, rezultatul obținut în aritmetica virgulei flotante (membrul stâng) este identic cu rezultatul unui calcul *exact* (membrul drept) efectuat cu doi operanzi ce au valori *aproximative*, "apropiate" de valorile *exacte* ale operanzilor (considerate în membrul stâng).

Un caz aparte îl constituie *operația de scădere* când, prin reducerea cifrelor mai semnificative din reprezentarea celor două numere în virgulă flotantă, se ajunge ca cifrele mai puțin semnificative să determine precizia rezultatului. Apariția unor astfel de situații trebuie evitată cu grijă încă din faza de elaborare a algoritmilor.

În general, dacă avem de a face cu evaluarea unei expresii mai complexe, a cărei valoare exactă este *E,* atunci putem scrie:

$$\mathrm{fl}(E) = E + \varsigma, \tag{8.1.11}$$

unde $|\varsigma|$ este *eroarea absolută* comisă pentru calculul lui $\mathrm{fl}(E)$. Valoarea maximă a lui $|\varsigma|$ se numeşte *precizie absolută* sau *nivel de zgomot* în evaluarea expresiei E şi se notează uzual ε_A. Determinarea lui ε_A este o problemă destul de complicată, depinzând de forma concretă a expresiei E. Totuşi, din punct de vedere practic, drept o regulă generală, merită de reținut faptul că în evaluarea unei expresii E *nu putem obține* o precizie absolută mai mică decât:

$$\varepsilon_A^* = \varepsilon_M(1+|E|). \tag{8.1.12}$$

Această relație ne spune că precizia absolută ε_A nu poate ajunge niciodată sub valoarea epsilonului maşină ε_M (fapt care era de aşteptat) şi că, totodată, ε_A creşte liniar cu $|E|$, când $|E|$ este mare. Pe de altă parte, această ultimă constatare poate fi formulată şi în termenii preciziei relative a calculului în virgulă flotantă (pentru detalii, a se vedea (Varga şi Sima,

1982; 1997)), arătându-se că *precizia relativă* în evaluarea expresiei E este de ordinul epsilonului maşină ε_M.

Exemplul 8.1.4.

Să considerăm calculul în mediul MATLAB al expresiei $E = 10*(1/x)–5/y$ pentru $x = 6$ şi $y = 3$. Deşi un calcul exact banal ne arată că $E = 0$, evaluarea expresiei în aritmetica virgulei flotante cu reprezentare pe 8 octeţi conduce la rezultatul $\mathrm{fl}(E) = –2.220446049250313*10^{-16}$, care este tocmai valoarea cu semn schimbat a epsilonului maşină ε_M (a se vedea Exemplul 8.1.3). Totodată constatăm că se verifică relaţia generală (8.1.11) cu $E = 0$ şi $\varsigma = -\varepsilon_M$. Detaliind modul de efectuare a calculelor în mediul MATLAB, constatăm că $\mathrm{fl}(10*(1/6)) = (3\mathrm{ffaaaaaaaaaaaaa})_{\mathrm{H}}$, iar $\mathrm{fl}(5/3) = (3\mathrm{ffaaaaaaaaaaaaab})_{\mathrm{H}}$, de unde rezultă $\mathrm{fl}(10*(1/6)–5/3) = (\mathrm{bcb0000000000000})_{\mathrm{H}}$. Observăm imediat că rezultatul în MATLAB al calculului 10*(1/6) diferă, ca reprezentare, de rezultatul calculului 5/3, datorită faptului că cele două calcule nu produc valori ce pot fi scrise cu un număr finit de cifre în baza $b = 2$, ambele reprezentări fiind afectate de erori de rotunjire.

Dacă reluăm evaluarea aceleiaşi expresii pentru $x = 8$ şi $y = 4$, vom constata că rezultatul calculelor în MATLAB este 0 (adică este identic cu rezultatul calculelor exacte). Acest fapt se explică prin aceea că $\mathrm{fl}(10*(1/8)) = \mathrm{fl}(5/4) = (3\mathrm{ff4000000000000})_{\mathrm{H}}$, deoarece rezultatele ambelor calculele 10*(1/8) şi, respectiv, 5/4 produc valori ce pot fi scrise cu un număr finit de cifre binare, astfel că reprezentările lor în virgulă mobilă nu mai sunt afectate de erori de rotunjire.

8.1.3. Condiţionarea problemelor

În general, o problemă de calcul numeric poate fi prezentată sub forma calculării valorii unei funcţii $F : D \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ pentru un set de date $d \in D$ (Forsythe *et al.*, 1977), formulare care conduce la *rezultatul exact* $F(d)$ al problemei în cauză. Pe de altă parte, natura funcţiei F şi modul ei de evaluare limitează precizia cu care poate fi calculată F, deoarece, în practică, se dispune doar de o *aproximaţie* d^* a setului de date d al problemei. Astfel, cel mai bun *rezultat practic* ce se poate obţine (în locul rezultatului exact) este $F(d^*)$, pentru d^* apropiat de d (în sensul unei norme din $\mathbf{R}^m$). Dacă $F(d^*)$ este apropiat de $F(d)$ în sensul unei norme din $\mathbf{R}^n$, se spune că problema considerată pentru setul de date $d \in D$ este *bine condiţionată*. Dacă pentru o problemă corespunzând unui set de date $d \in D$, $F(d^*)$ diferă mult de $F(d)$ se spune că *problema este rău condiţionată*. Este, aşadar, de aşteptat ca *precizia soluţiei* unei probleme de calcul numeric să depindă de *condiţionarea* acelei probleme, în sensul că cu cât problema este mai rău condiţionată, cu atât numărul de cifre corecte la care se poate spera în soluţie este mai mic. De aceea, pentru o serie de probleme frecvent întâlnite în calculul numeric, au fost propuse criterii (formule) ce permit evaluarea cantitativă a condiţionării.

Exemplul 8.1.5.

Se consideră următorul sistem de două ecuaţii algebrice liniare cu două necunoscute:

$$(S):\ \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 \\ 1.0001 & 1.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 3.0005 \end{bmatrix},$$

despre care se constată imediat că are soluţia exactă $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Să considerăm o modificare a termenului liber al primei ecuaţii, astfel încât avem un nou sistem:

$$(S^*):\ \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 \\ 1.0001 & 1.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 3.0005 \end{bmatrix},$$

ale cărei soluţii exacte sunt $y_1 = 10003$, $y_2 = -9999$.

În spiritul notaţiilor şi conceptelor generale introduse în paragraful curent, să presupunem că datele *exacte d* sunt termenii liberi ai lui (*S*), iar datele *aproximative d** de care dispunem sunt termenii liberi ai lui (*S**). Evident *d* şi *d** (cu organizarea vectorială de mai sus) sunt apropiate în sensul oricărei norme din $\mathbf{R}^2$. Totodată însă, rezultatele *exacte* ale celor două probleme sunt vectorul $[1\ \ 2]^T$ (având semnificaţia de $F(d)$) şi vectorul $[10003\ \ -9999]^T$ (având semnificaţia de $F(d^*)$), despre care nu se mai poate afirma că ar fi apropiaţi în sensul unei norme din $\mathbf{R}^2$. Constatăm că problema găsirii soluţiei pentru sistemul (*S*) este rău condiţionată.

Abordarea riguroasă a acestei probleme se bazează pe teoria perturbaţiilor (a se vedea, de exemplu, (Voievodine, 1980)) aplicată sistemelor liniare de forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. În acest context, se arată că o perturbaţie a membrului drept, notată $\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$, atrage o perturbaţie a vectorului soluţie, notată $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$, care va satisface inegalitatea $\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\| \le \mathrm{cond}(\mathbf{A})(\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|)$, unde numărul $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\| \ge 1$ se numeşte *numărul de condiţie* al matricei nesingulare **A**. Fără a intra în detalii, precizăm că pentru sistemul (S) considerat mai sus numărul cond(**A**) este de ordinul 10^8, ceea ce înseamnă că eroarea relativă referitoare la vectorul soluţie $\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ poate ajunge de aproximativ 10^8 ori mai mare decât eroarea relativă referitoare la vectorul termenilor liberi $\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|$.

În general vorbind, problema găsirii soluţiei pentru un sistem algebric liniar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ este bine condiţionată, dacă matricea **A** are un număr de condiţie mic (în termeni practici, de ordinul zecilor, eventual sutelor, în funcţie de context).

8.1.4. Performanţele algoritmilor numerici

Alegerea unui algoritm care să permită rezolvarea numerică a unei probleme este de importanţă crucială pentru acurateţea rezultatelor. Conform (Sima şi Varga, 1986), caracterizarea algoritmilor numerici se poate realiza pe baza următoarelor proprietăţi:

a) *Generalitatea* unui algoritm înseamnă că algoritmul respectiv este aplicabil unei clase largi de probleme.

b) *Siguranţa în funcţionare* (*robusteţea*) unui algoritm presupune avertizarea utilizatorului ori de câte ori erorile introduse sunt mari, sau când iteraţiile nu avansează suficient de rapid.

c) *Stabilitatea numerică* a unui algoritm se referă la sensibilitatea rezultatelor în raport cu perturbațiile datelor de intrare. Fie funcția F^* realizată de algoritm pentru o problemă formulată *exact* prin $F : D \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Se spune că algoritmul F^* este *numeric stabil* dacă pentru orice $d \in D$ există $d^* \in D$ apropiat (în sensul unei norme în $\mathbf{R}^m$) astfel încât $F^*(d)$ (soluția calculată prin algoritmul F^* pentru d) este apropiat de $F(d^*)$ (soluția exactă a problemei cu date uşor perturbate).

Aşadar, dacă pentru rezolvarea unei *probleme bine condiționate* $F(d)$ se foloseşte un *algoritm numeric stabil* F^*, atunci există d^* apropiat de d astfel încât $F^*(d)$ este apropiat de $F(d^*)$, iar $F(d^*)$ este apropiat de $F(d)$, obținându-se, drept rezultat al prelucrării, soluția exactă a problemei cu date uşor perturbate. În aceeaşi ordine de idei, mai acordăm atenție următoarelor două aspecte: (i) un *algoritm stabil* poate rezolva o *problemă rău condiționată* cu o precizie depinzând de acuratețea datelor inițiale; (ii) un *algoritm instabil* poate conduce la rezultate eronate chiar pentru o *problemă bine condiționată*.

Pentru demonstrarea stabilității numerice a unor algoritmi se utilizează metoda analizei inverse care permite evaluarea efectului acumulării erorilor de rotunjire (Wilkinson, 1965).

d) *Precizia* unui algoritm se referă în primul rând la erorile introduse prin trunchierea unor serii infinite sau prin terminarea unor procese iterative. Uzual, prin creşterea timpului de calcul precizia de rezolvare creşte, dacă metoda este numeric stabilă. Precizia limită la care se poate ajunge depinde însă şi de modul de condiționare al problemei.

e) *Eficiența* unui algoritm se măsoară prin timpul de calcul necesar pentru rezolvarea problemei. În estimarea timpului de calcul necesar rezolvării unei probleme, printr-o operație în virgula mobilă se înțelege, în general, evaluarea unei expresii de tipul:

$$\mathrm{A(i,\,j)} = \mathrm{A(i,\,k)} + \mathrm{B} * \mathrm{A(i,\,m)}, \tag{8.1.13}$$

care presupune o multiplicare şi o adunare în virgula mobilă, precum şi calculul adreselor elementelor corespunzătoare din tablou. Numărul total de operații rezultă înmulțind numărul de operații efectuate într-o iterație cu numărul de iterații, valoare la care se adaugă numărul operațiilor efectuate pentru inițializarea datelor.

Numărul de iterații depinde de proprietățile de convergență ale algoritmului, care sunt caracterizate prin *viteza de convergență*. Se spune că şirul $\{x_k\}$ converge cu o viteză de convergență de ordinul r către x^*, dacă r este cel mai mare număr astfel încât:

$$0 \le \gamma = \lim_{k \to \infty} \frac{\left\| x_{k+1} - x^* \right\|}{\left\| x_k - x^* \right\|^r} < \infty, \tag{8.1.14}$$

valoarea lui r denumindu-se *viteza asimptotică de convergență*.

Pentru $r = 1$ şi $\gamma = 0$ se spune că şirul x_k converge superliniar la x^*.

f) Memoria folosită de algoritm.

g) Uşurința în utilizare.

Exemplul 8.1.6.

Să considerăm matricea pătrată:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{-200} & 0 \\ 0 & 10^{-200} \end{bmatrix},$$

al cărei rang este doi. Dacă pentru determinarea rangului matricei **A** utilizăm algoritmul bazat pe calculul determinantului, vom obține valoare exactă det(**A**)=10^{-400}, care ne arată că determinantul este nenul, conducând la concluzia corectă că rangul este doi. Cu toate acestea, calculul în virgulă mobilă în mediul MATLAB a determinantului va furniza valoarea aproximativă det(**A**)=0 (deoarece numărul 10^{-400} depăşeşte inferior capacitatea de reprezentare - a se vedea Exemplul 8.1.3), ceea ce conduce la concluzia eronată că rangul matricei este mai mic strict decât doi. Aşadar algoritmul de evaluare a rangului unei matrice pătrate care se bazează pe calculul determinantului nu este numeric stabil.

Un algoritm stabil numeric pentru evaluarea rangului unei matrice dreptunghiulare $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}, n \geq m$, se bazează pe calculul *valorilor singulare* ale matricei **B**, definite drept valorile proprii ale matricei $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m\times m}$ şi pe compararea celor *m* valori singulare cu o cantitate *q* dependentă de precizia maşinii. De exemplu, în cazul procedurii **rank** implementată în MATLAB, cantitatea ce serveşte drept termen de comparaţie este produsul $q = \max\{n, m\} \| \mathbf{B} \|_2 \varepsilon_M$. Fără a intra în detalii, precizăm că în cazul matricei **A** considerate în acest exemplu, ambele valori singulare sunt 10^{-200} (reprezentabile în virgulă mobilă) , care înseamnă o valoare mult mai mare decât q=2*10^{-200}*2^{-52}, demonstrând, astfel, că rangul matricei **A** este doi. Mai atragem atenţia asupra faptului că problema evaluării rangului matricei **A** este bine condiţionată, în sensul că în mulţimea matricelor pătrate de ordinul doi, **A** este situată "departe" de o matrice singulară.

Exemplul 8.1.7.

În spiritul conceptelor generale introduse la punctul e) al paragrafului curent, vom comenta proprietăţile de convergenţă ale următoarelor şiruri:

- Pentru şirul $x_k = c^{2^{-k}}$, $c \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$, cu limita $x^* = 1$, cea mai mare valoare a lui *r* pentru care avem satisfăcută condiţia (8.1.14) este $r = 1$, corespunzător căreia se obţine:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\| x_{k+1} - x^* \right\|}{\left\| x_k - x^* \right\|^r} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left\| (x_k)^{2^{-1}} - 1 \right\|}{\left\| x_k - 1 \right\|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\left\| (x_k)^{1/2} - 1 \right\|}{\left\| x_k - 1 \right\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left\| \sqrt{x_k} + 1 \right\|} = \frac{1}{2}.$$

  Se va spune că şirul *converge liniar* către 1.

- Pentru şirul $x_k = c^{2^k}$, $0 \leq c < 1$, $k \in \mathbf{N}$, cu limita $x^* = 0$, cea mai mare valoare a lui *r* pentru care avem satisfăcută condiţia (8.1.14) este $r = 2$, corespunzător căreia se obţine:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|x_{k+1}-x^*\right\|}{\left\|x_k-x^*\right\|^r}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|(x_k)^2-0\right\|}{\left\|x_k-0\right\|^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{(x_k)^2}{(x_k)^2}=1.$$

Se va spune că şirul converge *pătratic* către 0.

- Pentru şirul $x_k=1/(k^k)$, $k\in\mathbf{N}$, cu limita $x^*=0$, cea mai mare valoare a lui r pentru care avem satisfăcută condiția (8.1.14) este $r=1$, corespunzător căreia se obține:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|x_{k+1}-x^*\right\|}{\left\|x_k-x^*\right\|^r}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|1/(k+1)^{k+1}-0\right\|}{\left\|1/k^k-0\right\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{[1/(k+1)]^k[1/(k+1)]}{[1/k]^k}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{k+1}\right]^k\frac{1}{k+1}=0.$$

Se va spune că şirul converge *superliniar* către 0. Terminologia de superliniar se justifică prin aceea că valoarea limitei calculate conform (8.1.14) este $\gamma=0$, spre deosebire de situația de convergență liniară când $\gamma>0$. ▬

8.2. Simularea bazată pe integrarea numerică a sistemelor de ecuaţii diferenţiale

Simularea comportării sistemelor, modelate prin descrieri liniare sau neliniare de tipul celor întâlnite pe parcursul acestei cărți, se bazează pe rezolvarea numerică a problemei Cauchy ataşate unui *sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi*:

$$\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y},t),\quad \mathbf{y}\in\mathbf{R}^n,\quad \mathbf{f}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0, \tag{8.2.1}$$

pentru care proprietățile funcției **f** asigură existența şi unicitatea soluției pe un interval $t_0\le t\le t_f$. Prin rezolvare numerică, *nu se va determina o expresie analitică* pentru soluția în cauză **y**(*t*), ci se va intra în posesia *unei aproximări* a lui **y**(*t*), furnizată sub forma unei *secvențe de vectori numerici*:

$$\hat{\mathbf{y}}_0=\hat{\mathbf{y}}(t_0)=\mathbf{y}_0,\ \hat{\mathbf{y}}_1=\hat{\mathbf{y}}(t_1),\ \hat{\mathbf{y}}_2=\hat{\mathbf{y}}(t_2),\cdots,\hat{\mathbf{y}}_k=\hat{\mathbf{y}}(t_k),\cdots,\hat{\mathbf{y}}_N=\hat{\mathbf{y}}(t_N)\in\mathbf{R}^n, \tag{8.2.2}$$

care sunt calculați pentru un număr finit de valori ale variabilei independente (cu semnificație temporală) *t*, definind o diviziune a intervalului $[t_0,t_f]$:

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<t_N=t_f. \tag{8.2.3}$$

În cazul unui model de tip reprezentare de stare, problema Cauchy (8.2.1) se va construi din ecuația vectorială de stare (2.5.2) în cazul liniar şi, respectiv, (2.6.1) în cazul neliniar, în următoarea manieră: se va preciza o expresie analitică concretă, sau direct valori numerice pentru vectorul mărimilor de intrare $\mathbf{u}(t)\in\mathbf{R}^n$, iar vectorul de stare $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ va juca rolul funcției vectoriale necunoscute $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ din (8.2.1). Astfel, în urma rezolvării problemei Cauchy (8.2.1) vom cunoaşte evoluția în timp a mărimilor de stare, după care,

apelând la ecuația ieşirii (2.5.3) în cazul liniar şi, respectiv, (2.6.2) în cazul neliniar, se va obține dependența de timp pentru vectorul semnalelor de ieşire.

În cazul unui model de tip diagramă bloc, pentru a construi problema Cauchy (8.2.1), este mai întâi necesară elaborarea unei reprezentări intrare-stare-ieşire. Există medii software destinate simulării (cum ar fi, de exemplu, mediul SIMULINK, discutat în Secțiunea 4 a capitolului curent) care sunt capabile să construiască automat, fără intervenția utilizatorului, descrieri intrare-stare-ieşire, pornind de la descrieri de tip diagramă bloc.

Pe parcursul acestei secțiuni, vom proceda la o scurtă prezentare a caracteristicilor principalelor metode de integrare numerică ce pot fi utilizate în abordarea problemelor de simulare. Deşi nu sunt expuse cu titulatura expresă de exemple, textul furnizează ilustrări concrete ale algoritmilor discutați, sub forma unor relații de calcul cu coeficienți numerici rezultați din particularizarea formelor generale ce definesc esența metodei.

8.2.1. Aspecte generale privind precizia metodelor de integrare numerică

Indiferent de specificul concret al metodei numerice de integrare, progresul integrării se raportează la o diviziune de tipul (8.2.3) a intervalului $[t_0, t_N]$. Acest progres trebuie înțeles în sensul că punctele diviziunii (8.2.3) nu sunt definite *apriori*, ci ele sunt generate *succesiv*, pe măsură ce integrarea numerică avansează. Astfel, valoarea t_k a variabilei independente, pentru care se calculează vectorul numeric $\hat{\mathbf{y}}_k \in \mathbf{R}^n$ din secvența (8.2.2), se obține, pornind de la t_0, în următoarea *manieră incrementală*:

$$t_k = t_{k-1} + h_k, \quad h_k > 0, \quad k = 1,2,\cdots,N. \tag{8.2.4}$$

Cantitatea notată generic h_k în (8.2.4) se numeşte *pas de integrare* şi, în funcție de metoda de integrare numerică, poate avea o valoare constantă, sau poate fi modificat pe parcursul generării punctelor t_k (aspect ce va fi detaliat în paragrafele următoare ale prezentei secțiuni).

În general vorbind, nici o metodă de integrare numerică a problemei Cauchy (8.2.1) nu este capabilă să furnizeze valorile exacte $\mathbf{y}(t_k) \in \mathbf{R}^n$ ale soluției $\mathbf{y}(t)$ corespunzătoare punctelor t_k, $k = 1,2,\ldots,N$, ci doar aproximații de forma (8.2.2). Calitatea aproximării poate fi analizată cu ajutorul *erorii totale* ce afectează soluția calculată la $t = t_k$, definită prin:

$$\varepsilon_k = \left\| \mathbf{y}(t_k) - \hat{\mathbf{y}}_k \right\|, \tag{8.2.5}$$

unde notația $\| \ \|$ desemnează o normă finit dimensională.

Eroarea totală trebuie înțeleasă drept rezultatul acțiunii următoarelor două tipuri de erori (discutate, dintr-o perspectivă generală, în paragraful 8.1.1.) care se manifestă simultan în rezolvarea numerică a problemei Cauchy (8.2.1) pe un echipament de calcul: *eroarea de trunchiere* şi *eroarea de rotunjire*. Eroarea de trunchiere este eroarea ce ar rezulta atunci când în rezolvarea problemei s-ar utiliza o aritmetică cu precizie infinită. Acest tip de eroare depinde numai de metoda numerică folosită în rezolvarea problemei (8.2.1). Eroarea de rotunjire este eroarea datorată faptului că pe orice echipament de calcul se utilizează o

aritmetică cu precizie finită. Este evident că atât erorile de trunchiere, cât şi erorile de rotunjire tind să se acumuleze odată cu creşterea volumului de calcule efectuate, adică odată cu progresul integrării numerice pe intervalul $[t_0, t_N]$, în conformitate cu punctele diviziunii (8.2.4), dând naştere unui fenomen de *propagare a erorilor*.

Erorile de trunchiere (discretizare) sunt proprii fiecărei metode şi pot fi evaluate *local* (pe parcursul unui singur pas de integrare) sau *global* (pe întregul interval de integrare). Un concept fundamental în analiza preciziei unei metode îl constituie *ordinul metodei*. Ordinul unei metode se precizează cu ajutorul noţiunii de *eroare locală de discretizare* (sau de *trunchiere*), definită pentru un subinterval generic $[t_{k-1}, t_k]$ corespunzător diviziunii (8.2.3) prin:

$$\varepsilon_k^{ld} = \left\| \mathbf{y}(t_k) - \hat{\mathbf{y}}_k \right\|, \text{ cu } \hat{\mathbf{y}}_{k-1} = \hat{\mathbf{y}}(t_{k-1}) = \mathbf{y}(t_{k-1}),\ k=1,2,\ldots,N, \tag{8.2.6}$$

unde s-a presupus că în punctul t_{k-1} al diviziunii (8.2.3) dispunem de *valoarea exactă* a vectorului soluţie $\mathbf{y}(t_{k-1})$. Astfel, vom spune că o anumită metodă (sau algoritm) de integrare numerică este *de ordinul p* dacă pe subintervalul generic $[t_{k-1}, t_k]$, funcţionează majorarea:

$$\varepsilon_k^{ld} \le C h_k^{p+1}, \tag{8.2.7}$$

unde cantitatea $h_k = t_k - t_{k-1}$ notează valoarea pasului de integrare (sau discretizare) aferent acestui subinterval, iar $C > 0$ este o constantă ce depinde de valorile derivatelor funcţiei vectoriale **f** din definiţia problemei Cauchy (8.2.1). Pentru a exprima informaţia dată de inegalitatea (8.2.7) cu privire la ordinul *p* al unei metodei numerice de integrare, se mai poate folosi şi notaţia *O*, aşa-numită "o mare", care înlocuieşte inegalitatea (8.2.7) prin următoarea scriere de tip egalitate:

$$\varepsilon_k^{ld} = O(h_k^{p+1}), \tag{8.2.8}$$

unde *O* notează o funcţie care este de acelaşi ordin de mărime ca şi argumentul său, când argumentul tinde la zero.

Pentru a preciza faptul că o anumită metodă (sau algoritm) de integrare numerică este de ordin *p*, notaţia *O* poate fi utilizată şi cu referire la *eroarea globală de discretizare* (sau *trunchiere*):

$$\varepsilon^{gd} = \left\| \mathbf{y}(t_N) - \hat{\mathbf{y}}_N \right\|, \text{ cu } \hat{\mathbf{y}}_0 = \hat{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}(t_0), \tag{8.2.9}$$

care se defineşte pentru întreg intervalul de integrare $[t_0, t_N]$. În acest caz, informaţia privind ordinul *p* al metodei respective se va formaliza prin scrierea:

$$\varepsilon^{gd} = O(h^p), \tag{8.2.10}$$

unde notaţia *h* desemnează într-o manieră generică pasul de integrare (care poate fi constant, sau modificabil de la un punct al diviziunii (8.2.3), la următorul).

În practică, erorile de rotunjire datorate aritmeticii în virgulă flotantă cresc semnificativ prin micşorarea pasului de integrare, astfel încât pentru o eroare globală minimă trebuie avute în vedere deopotrivă rotunjirile şi trunchierile. Utilizarea unui pas exagerat de mic în discretizare nu asigură aşadar o eroare globală mică.

Diverşi algoritmi de integrare numerică se comportă diferit în ceea ce priveşte propagarea erorilor de rotunjire. Este de remarcat faptul că eroarea globală de rotunjire la

$t = t_N$ nu reprezintă o simplă cumulare a erorilor locale de rotunjire la fiecare pas, deoarece eroarea locală de rotunjire poate fie să crească, fie să descrească pe măsură ce se continuă calculele. În conformitate cu performanțele algoritmilor discutate în paragraful 8.1.4 al secțiunii precedente, activitatea practică legată de rezolvarea numerică a problemei Cauchy (8.2.1) trebuie să-şi concentreze atenția pe utilizarea algoritmilor numeric stabili. Evoluția calculelor în aritmetica virgulei mobile pentru un algoritm numeric stabil asigură faptul că eroarea locală de rotunjire descreşte odată cu creşterea numărului de paşi de integrare.

8.2.2. Criterii de clasificare a algoritmilor de integrare numerică

Algoritmii (sau metodele) pentru rezolvarea numerică a problemei Cauchy (8.2.1) pot fi clasificați, având în vedere două criterii generale:

A. Informația utilizată pentru efectuarea unui pas de integrare

În baza acestui criteriu general, se poate realiza următoarea clasificare:

- **Metode directe** - sunt metode care la avansarea unui pas pentru variabila independentă necesită numai rezultatul la pasul anterior, fiind denumite şi *metode într-un singur pas*. După cum valoarea acestui pas este constantă sau poate fi modificată pe parcursul integrării, metodele directe pot fi *cu pas constant* sau *cu pas adaptiv*. Metodele directe solicită un singur punct pentru inițializare, fiind metode *autostartabile*.
- **Metode indirecte** - sunt metode care la avansarea unui pas pentru variabila independentă necesită rezultatele de la un număr de paşi anteriori, fiind denumite şi *metode multi-pas*. Pentru precizie ridicată aceste metode necesită un efort de calcul mai scăzut decât metodele directe. Metodele indirecte pot opera *cu pas constant* sau *cu pas adaptiv*. Ordinul metodei poate fi selectat automat şi schimbat dinamic, realizându-se astfel algoritmi care pot lucra pe o clasă largă de probleme. Metodele multi-pas *nu sunt autostartabile*, ceea ce conduce, în implementări, la creşterea complexității codului. Startarea se realizează întotdeauna cu ajutorul unei metode directe.
- **Metode de extrapolare** - sunt metode care divizează fiecare pas de integrare într-un număr adecvat (selectat dinamic) de subpaşi, utilizați pentru a extrapola rezultatul integrării numerice cu ajutorul fracțiilor raționale.

B. Modul de definire a noii valori rezultate din efectuarea unui pas de integrare

În baza acestui criteriu general, se poate realiza următoarea clasificare:

- **Metode explicite** - sunt metode în care ecuația algebrică ce descrie efectuarea unui pas de integrare defineşte într-o *manieră explicită* noua valoare a soluției (care face obiectul calculelor din pasul curent, corespunzând momentului de timp t_{k+1}). Astfel ecuația algebrică respectivă prezintă în membrul stâng noua valoare a soluției, iar expresia din membrul drept conține referiri numai la valorile anterioare ale soluției (care au făcut obiectul calculelor din paşii precedenți, corespunzând momentelor de timp $t_k, t_{k-1}, \cdots$etc., anterioare momentului t_{k+1}).
- **Metode implicite** - sunt metode în care ecuația algebrică ce descrie efectuarea unui pas de integrare defineşte într-o *manieră implicită* noua valoare a soluției (care face obiectul calculelor din pasul curent, corespunzând momentului de timp t_{k+1}). Astfel ecuația algebrică respectivă prezintă în membrul stâng noua valoare a soluției, iar expresia din membrul drept conține şi ea referiri la noua valoare a soluției, eventual împreună cu

referiri la valorile anterioare ale soluției (care au făcut obiectul calculelor din paşii precedenți, corespunzând momentelor de timp $t_k, t_{k-1}, \cdots$etc., anterioare momentului t_{k+1}).

Prin parcurgerea paragrafelor următoare din această secțiune, dobândind cunoştințe mai ample despre procedeele de integrare numerică, cititorul va putea constata că există şi *clasificări mai detaliate*, legate de specificul abordărilor matematice, care, în general, poartă numele matematicienilor ce au fundamentat metodele respective. Evident, datorită generalității lor, criteriile A, B prezentate anterior, operează şi la nivelul unei astfel de detalieri, după cum ilustrăm mai jos:

- *Metodele de tip Euler* - sunt directe (conform A) şi explicite sau implicite (conform B)
- *Metodele de tip Taylor* (exceptând cazul particular de tip Euler) - sunt directe (conform A) şi explicite (conform B)
- *Metodele de tip Runge-Kutta* (exceptând cazul particular de tip Euler) - sunt directe (conform A) şi explicite (conform B)
- *Metodele de tip Adams* - sunt indirecte (conform A) şi explicite sau implicite (conform B)
- *Metodele de tip Gear* - sunt indirecte (conform A) şi implicite (conform B)
- *Metodele de tip Richardson* - sunt de extrapolare (conform A)

Pentru simplificarea expunerii elementelor şi principiilor ce caracterizează metodele de integrare numerică, în cele ce urmează ne vom referi la o problemă Cauchy de forma (8.2.1), care are în vedere doar *o singură ecuație diferențială de ordinul I:*

$$y' = f(y,t), \quad f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y(t_0) = y_0, \tag{8.2.11}$$

în care $y(t)$ notează o funcție scalară. Generalizarea pentru cazul unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I se realizează *mutatis mutandis*, interpretând $y(t)$ drept funcție vectorială.

8.2.3. Metode de integrare directe

Metodele directe (sau intr-un singur pas) se bazează, ca principiu general, pe dezvoltarea în serie Taylor a funcției $y(t)$ ce reprezintă soluția problemei Cauchy (8.2.11). Astfel, dezvoltând $y(t)$ în serie Taylor în jurul punctului generic $t = t_k$, evaluând dezvoltarea în punctul imediat următor $t = t_{k+1}$ al diviziunii (8.2.3) şi utilizând notația (derivată din relația (8.2.4)):

$$h = t_{k+1} - t_k \tag{8.2.12}$$

pentru a desemna *pasul constant* al diviziunii uniforme (8.2.3), vom obține egalitatea:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{1!} y^{(1)}(t_k) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t_k) + \ldots + + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(t_k) + \\ + \text{ termeni de ordin superior}. \tag{8.2.13}$$

Examinând egalitatea (8.2.13), constatăm că primii p+1 termeni din membrul drept reprezintă trunchierea seriei *Taylor* corespunzătoare valorii *exacte* $y(t_{k+1})$ şi să considerăm că această trunchiere furnizează valoarea *aproximativă* $\hat{y}(t_{k+1}) = \hat{y}_{k+1}$. Astfel, dacă în membrul

drept al egalității (8.2.13), în loc de $y(t_k)$ vom folosi $\hat{y}(t_k) = \hat{y}_k$ şi în loc de $y^{(i)}(t_k)$ vom folosi $f^{(i-1)}(\hat{y}(t_k), t_k)$, $i = 1,2,\cdots, p$, atunci vom intra în posesia următoarei exprimări pentru valoarea aproximativă $\hat{y}_{k+1}$:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + hT_p(\hat{y}_k, t_k; h), \tag{8.2.14}$$

în care s-a folosit notația:

$$T_p(\hat{y}_k, t_k; h) \overset{\Delta}{=} f(\hat{y}_k, t_k) + \frac{h}{2!}f^{(1)}(\hat{y}_k, t_k) + \frac{h^2}{3!}f^{(2)}(\hat{y}_k, t_k) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{(\text{p-1})}(\hat{y}_k, t_k) \tag{8.2.15}$$

Ținând cont de modul cum a fost construită aproximarea (8.2.14), putem evalua *eroarea locală de trunchiere* (sau *discretizare*) conform (8.2.6), care, pe intervalul $[t_k, t_{k+1}]$, satisface o inegalitate de forma:

$$\varepsilon_{k+1}^{ld} = |y(t_{k+1}) - \hat{y}_{k+1}| = |\text{termenii de ordin superior din (8.2.13)}| \le Ch^{p+1}, \tag{8.2.16}$$

unde $C > 0$ notează o valoare constantă ce nu depinde de pasul de integrare h. Aşadar putem afirma că algoritmul de integrare (8.2.14) este de *ordinul p*, ceea ce înseamnă că ordinul metodei este dat de cel mai mare ordin de derivare al funcției necunoscute $y(t)$ care este prezent în urma trunchierii seriei Taylor din (8.2.13).

8.2.3.1. Algoritmi de tip Taylor

Algoritmii numiți "de tip *Taylor*" rezultă direct din modalitatea generală de calcul a valorii aproximative $\hat{y}_{k+1}$ pe care o pun la dispoziție relațiile (8.2.14) şi (8.2.15), în urma particularizării impuse prin alegerea ordinului $p = 1, 2,\ldots$etc. Vom ilustra astfel de particularizări prin formulări concrete pentru două scheme sau metode Taylor:

A. Algoritmul Taylor de ordinul I (Algoritmul Euler explicit)

În acest caz $p = 1$, iar particularizarea relațiilor (8.2.14) şi (8.2.15) conduce la următorul algoritm simplu (uşor de implementat):

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + hf(\hat{y}_k, t_k). \tag{8.2.17}$$

Egalitatea de mai sus arată că modul de avansare al soluției pe un interval oarecare $[t_k, t_{k+1}]$ de lungime h foloseşte drept informație despre derivată numai pe aceea corespunzătoare extremității din stânga a intervalului de interes, adică $f(\hat{y}_k, t_k)$. Eroarea locală de trunchiere este destul de mare şi, pentru obținerea unei precizii rezonabile, pasul de integrare h trebuie să fie ales suficient de mic (în corelare cu dinamica sistemului studiat).

Observație: Conform interpretării de mai sus a termenului $hf(\hat{y}_k, t_k)$ din (8.2.17), rezultă că acest termen poate fi substituit prin $hf(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1})$, cu semnificația că informația despre derivată corespunde extremității din dreapta a intervalului de interes. Astfel, egalitatea (8.2.17) se transformă în:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + hf(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1}), \tag{8.2.18}$$

care este referită sub numele de metoda (sau algoritmul) *Euler implicit*. Caracterizarea drept "explicit" în (8.2.17) şi "implicit" în (8.2.18) se referă la modul în care este definit $\hat{y}_{k+1}$ de către cele două ecuații: în (8.2.17) $\hat{y}_{k+1}$ apare numai în membrul drept, iar în (8.2.18) $\hat{y}_{k+1}$ apare în ambii membri. După cum reiese din prezentarea generală de mai sus, forma *implicită* nu este în concordanță cu principiul metodelor de tip Taylor, dar am considerat oportună discutarea ei în acest punct al expunerii pentru a ilustra diferența dintre un algoritm explicit şi un algoritm implicit. Asupra algoritmului Euler implicit vom mai reveni cu unele comentarii importante în paragraful 8.2.6 care tratează integrarea numerică a ecuațiilor denumite "stiff".

B. Algoritmul Taylor de ordinul II.

În acest caz $p=2$, iar particularizarea relațiilor (8.2.14) şi (8.2.15) conduce la următorul algoritm:

$$\hat{y}_{k+1}=\hat{y}_k+hT_2(\hat{y}_k,t_k;h)\,, \tag{8.2.19}$$

în care termenul $T_2(\hat{y}_k,t_k;h)$ se calculează prin aplicarea regulilor de derivare a funcțiilor compuse, astfel:

$$\begin{gathered}T_2(\hat{y}_k,t_k;h)=f(\hat{y}_k,t_k)+\frac{h}{2!}\Big[f_y(\hat{y}_k,t_k)f(\hat{y}_k,t_k)+f_t(\hat{y}_k,t_k)\Big],\\ f_y=\frac{\partial f(y,t)}{\partial y},\ f_t=\frac{\partial f(y,t)}{\partial t}.\end{gathered} \tag{8.2.20}$$

Constatăm, aşadar, că utilizarea algoritmului Taylor de ordinul II necesită calculul derivatelor parțiale de ordinul I. O generalizare imediată a acestei constatări ne conduce la concluzia că, dacă ne-am propune să utilizăm algoritmi Taylor de ordin mai mare, evaluarea derivatelor parțiale ar deveni mai laborioasă. Pe de altă parte, sub raportul acurateții calculelor efectuate în virgulă mobilă, utilizarea derivatelor parțiale poate reprezenta o importantă sursă de erori, mai ales atunci când evaluarea acestor derivate parțiale se realizează numeric, ca valori ale unor rapoarte incrementale scrise direct cu ajutorul funcției *f*(*y*,*t*) (adică nefăcându-se apel la expresiile analitice ale derivatelor).

8.2.3.2. Algoritmi de tip Runge-Kutta

Recunoaşterea inconvenientelor semnalate anterior cu privire la algoritmii de tip Taylor a contribuit la orientarea preocupărilor legate de integrarea numerică în direcția dezvoltării unor metode noi, care să înlocuiască *calculul derivatelor* funcției *f* prin *evaluarea funcției* în diverse puncte. Ideea de bază constă în a substitui funcția $T_p(\hat{y}_k,t_k;h)$ definită prin (8.2.15) (care necesită calculul derivatelor) cu o altă funcție $K_p(\hat{y}_k,t_k;h)$ (care să nu necesite calculul derivatelor), astfel încât, în loc de egalitatea (8.2.14), să se poată utiliza o relație de forma:

$$\hat{y}_{k+1}=\hat{y}_k+hK_p(\hat{y}_k,t_k;h)\,. \tag{8.2.21}$$

Egalitatea (8.2.20) va permite realizarea integrării numerice pentru problema Cauchy (8.2.11) cu erori de trunchiere de acelaşi ordin de mărime ca şi în cazul algoritmilor de tip Taylor corespunzători. Astfel de algoritmi se numesc "algoritmi *Runge-Kutta*".

Ca principiu general, metoda Runge-Kutta de ordin p se bazează pe o formulă de recurență de tipul:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + \alpha_0 r_0 + \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_{p-1} r_{p-1}, \tag{8.2.22}$$

cu:

$$\begin{aligned} r_0 &= h \cdot f(\hat{y}_k, t_k), \\ r_1 &= h \cdot f(\hat{y}_k + \lambda_1^0 r_0, t_k + \mu_1 h), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{p-1} &= h \cdot f(\hat{y}_k + \lambda_{p-1}^0 r_0 + \ldots + \lambda_{p-1}^{p-2} r_{p-2}, t_k + \mu_{p-1} h), \end{aligned} \tag{8.2.23}$$

care, prin scoaterea în factor comun a lui h din toți termenii r_i, $i = 0, \cdots, p-1$, se observă că este de forma dorită (8.2.21).

Coeficienții α_i, cu $i = 0, \cdots, p-1$, din egalitatea (8.2.22), precum şi coeficienții $\lambda_i^0, \cdots, \lambda_i^{i-1}, \mu_i$, cu $i = 1, \cdots, p-1$ din egalitățile (8.2.23) se obțin prin identificare, impunând condiția ca egalitățile (8.2.21) şi (8.2.14) să coincidă. Funcția f (având argumente de diverse forme) în expresiile $r_i, i = 1, \cdots, p-1$, din (8.2.23) va trebui dezvoltată în serie Taylor în jurul punctului $(\hat{y}_k, t_k)$ cu scopul de a pune în evidență acele derivate care există (prin natura metodei) în algoritmul de tip Taylor şi, ulterior, de a compara coeficienții ce ponderează derivatele respective.

Tragem concluzia imediată că odată ce au fost determinați coeficienții egalității (8.2.22), prin efectuarea *calculelor exacte* cu ajutorul unui algoritm Taylor de ordin p de forma (8.2.14) şi, respectiv, a unui algoritm Runge-Kutta de ordin p de forma (8.2.21) se va ajunge la aceeaşi valoare $\hat{y}_{k+1}$. Altfel spus, *eroarea locală de trunchiere* (sau de *discretizare*) în cazul algoritmului Runge-Kutta de ordinul p va satisface, pe intervalul $[t_k, t_{k+1}]$, o inegalitate de tipul $\varepsilon_{k+1}^{ld} \le Ch^{p+1}$, adică de aceeaşi factură cu (8.2.16) ce a fost stabilită pentru algoritmul Taylor de ordinul p. După cum am precizat deja mai sus, *avantajele* algoritmilor Runge-Kutta decurg din faptul că *erorile de rotunjire* datorate operațiilor în virgulă mobilă sunt diminuate în raport cu metodele Taylor, întrucât se evită evaluarea derivatelor funcției $f(y,t)$.

Prin particularizarea ordinului p în egalitatea de principiu (8.2.21) şi prin determinarea coeficienților din (8.2.22) şi (8.2.23), se poate intra în posesia formulării concrete pentru diverse scheme sau metode Runge-Kutta, dintre care vom considera, drept ilustrative, următoarele:

A. Algoritmul Runge-Kutta de ordinul I.

Pentru cazul $p = 1$ şi $\alpha_0 = 1$, rezultă chiar egalitatea (8.2.17), adică algoritmul Taylor de ordinul I (sau Euler explicit).

B. Algoritmi de tip Runge-Kutta de ordinul II.

Pentru cazul $p = 2$, coeficienții $\alpha_0 = 1 - \alpha_1$, $\alpha_1 \neq 0$ oarecare în (8.2.22) şi, respectiv, coeficienții $\mu_1 = \lambda_1^0 = 1/(2\alpha_1)$ în (8.2.23), rezultă:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + (1 - \alpha_1) r_0 + \alpha_1 r_1, \tag{8.2.24}$$

cu:

$$r_0 = hf(\hat{y}_k, t_k),$$
$$r_1 = hf\left(\hat{y}_k + \frac{1}{2\alpha_1} hf(\hat{y}_k, t_k), t_k + \frac{1}{2\alpha_1} h\right). \tag{8.2.25}$$

În funcție de valorile lui α_1, se pot obține diverse variante ale algoritmului Runge-Kutta de ordinul II:

B.1. Algoritmul Heun (algoritmul trapezoidal modificat)

Selectând valoarea $\alpha_1 = 1/2$, ceea ce înseamnă coeficienții $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$ în (8.2.22) şi, respectiv, $\mu_1 = \lambda_1^0 = 1$ în (8.2.23), algoritmul Runge-Kutta de ordinul II (8.2.24) cu (8.2.25) este dat de formula:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2} r_1 = \hat{y}_k + \frac{h}{2} f(\hat{y}_k, t_k) + \frac{h}{2} f\big(\hat{y}_k + hf(\hat{y}_k, t_k), t_k + h\big). \tag{8.2.26}$$

B.2. Algoritmul Euler-Cauchy modificat

Selectând valoarea $\alpha_1 = 1$, ceea ce înseamnă coeficienții $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ în (8.2.22) şi, respectiv, $\mu_1 = \lambda_1^0 = 1/2$ în (8.2.23), algoritmul Runge-Kutta de ordinul II (8.2.24) cu (8.2.25) este dat de formula:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + r_1 = \hat{y}_k + hf\left(\hat{y}_k + \frac{h}{2} f(\hat{y}_k, t_k), t_k + \frac{h}{2}\right). \tag{8.2.27}$$

C. Algoritmul Runge-Kutta de ordinul IV.

Pentru cazul $p = 4$, coeficienții $\alpha_0 = 1/6, \alpha_1 = 1/3, \alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 1/6$ în (8.2.22) şi, respectiv, coeficienții $\mu_1 = 1/2,\ \mu_2 = 1/2,\ \mu_3 = 1,\ \lambda_1^0 = 1/2,\ \lambda_2^0 = 0,\ \lambda_2^1 = 1/2,\ \lambda_3^0 = 0,\ \lambda_3^1 = 0,$ $\lambda_3^2 = 1$ în (8.2.23), rezultă *forma standard* a algoritmului Runge-Kutta de ordinul IV (atributul "standard" referindu-se la maniera de selectare a valorilor arbitrare ce apar în procesul de identificare a coeficienților):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} &= \hat{y}_k + \frac{1}{6} r_0 + \frac{1}{3} r_1 + \frac{1}{3} r_2 + \frac{1}{6} r_3 = \\ &= \hat{y}_k + h\left(\frac{1}{6} q_0 + \frac{1}{3} q_1 + \frac{1}{3} q_2 + \frac{1}{6} q_3\right), \end{aligned} \tag{8.2.28}$$

cu:

$$\begin{aligned} r_0 &= hf(\hat{y}_k, t_k), \\ r_1 &= hf\left(\hat{y}_k + \frac{1}{2} r_0, t_k + \frac{1}{2} h\right), \\ r_2 &= hf\left(\hat{y}_k + \frac{1}{2} r_1, t_k + \frac{1}{2} h\right), \\ r_3 &= hf\big(\hat{y}_k + r_2, t_k + h\big). \end{aligned} \tag{8.2.29-a}$$

sau, echivalent:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= f(\hat{y}_k, t_k),\\
q_1 &= f\left(\hat{y}_k + \frac{h}{2}q_0, t_k + \frac{1}{2}h\right),\\
q_2 &= f\left(\hat{y}_k + \frac{h}{2}q_1, t_k + \frac{1}{2}h\right),\\
q_3 &= f\left(\hat{y}_k + hq_2, t_k + h\right).
\end{aligned}
\qquad \text{(8.2.29-b)}
$$

Pentru forma standard a algoritmului Runge-Kutta de ordinul IV se poate da următoarea interpretare de factură geometrică: vom începe prin a comenta semnificația geometrică a egalităților (8.2.29-b). În extremitatea din stânga a intervalului $[t_k, t_{k+1}]$, adică pentru momentul de timp $t = t_k$, cu ajutorul egalității (8.2.11), se realizează o *primă evaluare a pantei*, notată q_0, pentru soluția aproximativă $\hat{y}(t)$, corespunzând punctului (P_0) de abscisă t_k şi ordonată $\hat{y}_k = \hat{y}(t_k)$. Din punctul (P_0), avansăm cu o jumătate de pas (h/2) pe axa timpului (abscisă) până la $t = t_k + h/2$ şi, totodată, ne deplasăm cu panta q_0, ajungând astfel în punctul (P_1), de abscisă $t_k + h/2$ şi ordonată $\hat{y}_k + (h/2)q_0$, unde, folosind egalitatea (8.2.11), se realizează o *a doua evaluare a pantei*, notată q_1. Tot din punctul (P_0), avansăm cu o jumătate de pas (h/2) pe axa timpului (abscisă) tot până la $t = t_k + h/2$ şi, totodată, ne deplasăm cu panta q_1, ajungând astfel într-un nou punct (P_2), tot de abscisă $t_k + h/2$, dar de ordonată $\hat{y}_k + (h/2)q_1$, unde, folosind egalitatea (8.2.11), se realizează o *a treia evaluare a pantei*, notată q_2. Pornind tot din punctul (P_0), avansăm de această dată cu întregul pas h pe axa timpului (abscisă) până la $t = t_k + h$ şi, totodată, ne deplasăm cu panta q_2, ajungând astfel în punctul (P_3), de abscisă $t_k + h$ şi de ordonată $\hat{y}_k + hq_2$, unde, folosind egalitatea (8.2.11), se realizează o *a patra evaluare a pantei*, notată q_3. În final, egalitatea (8.2.28) trebuie înțeleasă ca o deplasare pornind din punctul (P_0), cu pasul h pe abscisă şi corespunzător unei pante ce este calculată drept valoare medie ponderată $K_4(\hat{y}_k, t_k; h)_3 = (1/6)q_0 + (1/3)q_1 + (1/3)q_2 + (1/6)q_3$ a cantităților furnizate de (8.2.29-b). Facem observația importantă că o atare interpretare geometrică este capabilă să aprofundeze sensul scrierii generale din egalitatea (8.2.21), punând în evidență *rolul de pantă* pe care îl joacă funcția $K_p(\hat{y}_k, t_k; h)$ în progresul integrării numerice de la punctul $(t_k, \hat{y}_k)$, la punctul $(t_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$.

Algoritmul Runge-Kutta de ordinul IV în forma standard (8.2.28) cu (8.2.29), este cotat drept cea mai populară metodă de integrare numerică cu pas constant.

Drept *comentarii generale* privind metodele Runge-Kutta cu pas constant, merită de subliniat faptul că acestea sunt uşor de implementat şi, în condițiile unui pas de integrare suficient de mic în raport cu dinamica sistemului studiat prin simulare, precizia soluției aproximative care se obține este bună. Pe de altă parte, prelucrările în virgulă mobilă cu un pas de integrare prea mic pot conduce la aproximări grosiere datorită propagării erorilor de rotunjire. Mai mult, un pas prea mic înseamnă şi un efort de calcul substanțial. În general vorbind, precizia rezultatelor este mai bună atunci când se foloseşte un algoritm de ordin p mai ridicat, dar, totodată, un atare algoritm necesită (pentru progresul integrării cu un singur

pas) mai multe evaluări ale funcției $f(y,t)$, aferente calculării termenilor $r_i, i = 0,\cdots, p-1$, din formula de bază (8.2.22). În plus, valorile $r_i, i = 0,\cdots, p-1$, ce trebuie determinate pentru fiecare pas de integrare, nu mai sunt folosite în nici o altă etapă ulterioară a calculelor.

8.2.3.3. Metode directe cu pas adaptiv

Neajunsurile ce se manifestă în utilizarea metodelor de integrare numerică cu pas constant (care au fost comentate la finele subparagrafelor 8.2.3.1 şi 8.2.3.2) au condus, într-o manieră naturală, la ideea adaptării valorii pasului pe măsură ce integrarea avansează.

Metodele de ajustare automată a pasului de integrare sunt, în general, bazate pe *estimarea erorii locale*. Ca exemplu orientativ pentru modul de realizare a unei astfel de estimări, să considerăm un algoritm Runge-Kutta de ordinul *p*, care operează concomitent cu *două valori distincte pentru pasul de integrare*, de pildă *h* şi, respectiv, 2*h*. Să presupunem că eroarea locală pe intervalul generic $[t_k, t_{k+1}]$, $t_{k+1} = t_k + h$, are forma:

$$y(t_{k+1}) - \hat{y}_{k+1} = Ch^{p+1} + O(h^{p+2}), \tag{8.2.30}$$

unde coeficientul *C* depinde de soluția problemei Cauchy (8.2.11) şi trebuie privit drept o *valoare necunoscută*.

Dacă aplicăm algoritmul de integrare pentru *doi paşi* de lungime *h* fiecare, corespunzător intervalului $[t_k, t_{k+2}]$, $t_{k+2} = t_k + 2h$, se poate considera (cu bună aproximație) că erorile rezultate la fiecare pas *h* în parte (adică pentru $[t_k, t_{k+1}]$ şi, respectiv, $[t_{k+1}, t_{k+2}]$) se sumează, astfel încât putem scrie:

$$y(t_{k+2}) - \hat{y}_{k+2} = 2Ch^{p+1} + O(h^{p+2}). \tag{8.2.31}$$

Dacă aplicăm din nou algoritmul de integrare, dar, de această dată, pentru *un singur pas* de lungime dublă 2*h*, corespunzător aceluiaşi interval $[t_k, t_{k+2}]$, $t_{k+2} = t_k + 2h$, vom găsi eroarea locală aferentă algoritmului cu pas dublu:

$$y(t_{k+2}) - \tilde{y}_{k+2} = 2Ch^{p+1}2^p + O(h^{p+2}), \tag{8.2.32}$$

unde $\tilde{y}_{k+2}$ notează valoarea aproximativă a soluției $\tilde{y}(t)$ calculată la momentul de timp t_{k+2} cu ajutorul algoritmului cu pas de integrare 2*h*.

Scăzând, membru cu membru, egalitatea (8.2.31) din egalitatea (8.2.32) şi, apoi, folosind noua egalitate astfel obținută, împreună cu (8.2.31), pentru a elimina constanta necunoscută *C*, ajungem la relația:

$$y(t_{k+2}) - \hat{y}_{k+2} = \frac{\hat{y}_{k+2} - \tilde{y}_{k+2}}{2^p - 1} + O(h^{p+2}). \tag{8.2.33}$$

Pentru valori suficient de mici ale pasului de integrare *h*, putem admite că termenul $O(h^{p+2})$ este neglijabil. Această constatare conduce la concluzia că *valoarea numerică* $(\hat{y}_{k+2} - \tilde{y}_{k+2})/(2^p - 1)$ calculată în membrul drept al egalității (8.2.33) poate servi drept un estimator al erorii $y(t_{k+2}) - \hat{y}_{k+2}$ din membrul stâng al lui (8.2.33). Mai mult chiar, se observă că însăşi valoarea numerică $|\hat{y}_{k+2} - \tilde{y}_{k+2}|$ poate fi utilizată drept o estimare pentru

modulul erorii, deoarece $|(\hat{y}_{k+2}-\tilde{y}_{k+2})/(2^p-1)| \le |\hat{y}_{k+2}-\tilde{y}_{k+2}|$. Ideea fundamentală care stă la baza exploatării unui atare estimator constă în a *compara* estimarea pentru modulul erorii cu o anumită valoare pozitivă ce exprimă toleranța admisă pentru eroarea locală (valoare care, frecvent, este precizată de către utilizator). Dacă estimarea modulului erorii depăşeşte toleranța respectivă, atunci pasul de integrare va trebui micşorat (de exemplu, dar nu obligatoriu, prin înjumătățire). Dimpotrivă, dacă estimarea modulului erorii este sensibil mai mică decât toleranța respectivă, atunci pasul de integrare va putea fi mărit (de exemplu, dar nu obligatoriu, prin dublare). În acest mod, integrarea numerică poate progresa cu o precizie impusă, fără ca utilizatorul să fie obligat a-şi asigura acuratețea rezultatelor prin întrebuințarea unui pas de integrare constant, de valoare mică, ci doar alegând o valoare adecvată pentru toleranța acceptată în estimarea erorii.

Principiul de estimare a erorii prezentat mai sus are dezavantajul că necesită a efectua evaluările de funcții (8.2.23) specifice metodei Rung-Kutta atât pentru valoarea *h*, cât şi pentru valoarea 2*h* a pasului de integrare, ceea ce atrage după sine creşterea volumului de calcule. În acest sens, o soluție mult mai profitabilă pentru adaptarea pasului de integrare s-a dovedit a fi utilizarea *a două metode* Runge-Kutta, *de ordine diferite*, *p* şi, respectiv, *p*+1, folosind *aceeaşi valoare h* pentru pas, de aşa manieră încât metoda de ordin *p*+1 să poată face uz de *toate evaluările de funcții* de tipul (8.2.23) care sunt puse la dispoziție de metoda de ordin *p*. Bazându-se, aşadar, pe calcularea unor funcții de utilitate comună ambelor metode, o atare strategie de adaptare a pasului de integrare face posibilă reducerea semnificativă a numărului de operații solicitate de algoritm.

În conformitate cu aceste principii generale, au fost concepuți şi implementați algoritmi Runge-Kutta cu pas adaptiv, care, cel mai frecvent, combină: (i) metoda de ordin II cu cea de ordin III (algoritm cunoscut şi sub numele de Runge-Kutta-Moler), (ii) metoda de ordin IV cu cea de ordin V (algoritm cunoscut şi sub numele de Runge-Kutta-Fehlberg), (iii) metoda de ordin V cu cea de ordin VI (algoritm cunoscut şi sub numele de Runge-Kutta-Verner).

Aşa cum se va arăta, metodele Runge-Kutta cu adaptare automată a pasului de integrare nu sunt adecvate pentru rezolvarea ecuațiilor de tip "stiff".

8.2.4. Metode de integrare indirecte

Metodele *indirecte* (sau *multi-pas*) se bazează, ca principiu general, pe faptul că funcția $y(t)$ ce reprezintă soluția problemei Cauchy (8.2.11) poate fi aproximată oricât de bine în orice interval închis *printr-un polinom de grad suficient de înalt,* conform teoremei de aproximare a lui Weierstrass. Din acest motiv, în unele texte, metodele de integrare indirecte mai sunt referite şi sub denumirea de metode de integrare *bazate pe aproximări polinomiale*. Astfel, în termenii generici ai unor puncte consecutive $t_{k-p+1} < \cdots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1}$, $p \in \mathbf{N}$, aparținând diviziunii (8.2.3), se presupune că soluția exactă $y(t)$ poate fi aproximată printr-un polinom de gradul p:

$$\hat{y}(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_p t^p,\ t \in [t_{k-p+1}, t_{k+1}], \tag{8.2.34}$$

unde coeficienții $c_i, i = 0,1,\ldots,p$, asigură egalitatea dintre soluția aproximativă $\hat{y}(t)$ şi soluția exactă $y(t)$ în punctele diviziunii (8.2.3), adică $\hat{y}(t_{k-i+1}) = y(t_{k-i+1}),\ i = 0,\cdots,p$.

Altfel spus, polinomul (8.2.34) poate fi privit drept un polinom de interpolare care aproximează soluția exactă a problemei Cauchy (8.2.11).

Dacă o metodă de integrare multi-pas se bazează pe o aproximare polinomială de forma (8.2.34) (adică de grad p) a soluției exacte a problemei Cauchy (8.2.11), atunci vom spune despre acea metodă că este *de ordinul* $p+1$.

8.2.4.1. Algoritmi indirecţi cu pas constant

Să considerăm o diviziune (8.2.3) uniformă, ale cărei puncte satisfac condiția:

$$t_{k+1} - t_k = h, k = 0,1,\cdots, N-1. \tag{8.2.35}$$

Exprimarea generală a unui algoritm de integrare indirect cu pas constant este dată de relația:

$$\begin{aligned}&\hat{y}_{k+1} = a_1\hat{y}_k + a_2\hat{y}_{k-1} + \ldots + a_m\hat{y}_{k+1-m} + \\ &h\left[b_0 f(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1}) + b_1 f(\hat{y}_k, t_k) + \ldots + b_m f(\hat{y}_{k+1-m}, t_{k+1-m})\right],\quad m-1 \le k \le N-1,\end{aligned} \tag{8.2.36}$$

unde coeficienții $a_1, \cdots, a_m, b_0, b_1, \cdots, b_m$, sunt aleşi de aşa manieră încât valoarea $\hat{y}_{k+1}$ calculată cu ajutorul lui (8.2.36) să coincidă cu valoarea $\hat{y}(t_{k+1})$ calculată cu ajutorul lui (8.2.34), în condițiile când pentru fiecare din funcțiile $f(\hat{y}_{k+1-i}, t_{k+1-i}), i = 0,1,\cdots, m$ ce apar în (8.2.36) se consideră satisfăcută egalitatea:

$$f(\hat{y}_{k+1-i}, t_{k+1-i}) = \left.\frac{d\hat{y}}{dt}\right|_{t=t_{k+1-i}} = \left.(c_1 + 2c_2 t + \cdots + pc_p t^{p-1})\right|_{t=t_{k+1-i}}, i = 0,1,\cdots, m. \tag{8.2.37}$$

Dacă $b_0 = 0$ în (8.2.36), atunci metoda se numeşte *explicită*, deoarece termenul $\hat{y}_{k+1}$ apare numai în membrul stâng, iar relația (8.2.36) poate defini valoarea acestuia într-o manieră explicită. Dacă $b_0 \neq 0$ în (8.2.36), atunci metoda se numeşte *implicită*, deoarece termenul $\hat{y}_{k+1}$ apare atât în membrul stâng cât şi în membrul drept, iar relația (8.2.36) poate defini valoarea acestuia numai într-o manieră implicită.

8.2.4.2. Algoritmi de tip Adams

O clasă importantă de *algoritmi expliciți* cu largă utilizare în practică o constituie algoritmii *Adams-Bashforth*, ale căror forme concrete pot fi obținute drept cazuri particulare ale exprimării generale (8.2.36), pentru $m = p+1, p \ge 1, a_1 = 1, a_2 = \ldots = a_m = 0, b_0 = 0$, adică:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\left[b_1 f(\hat{y}_k, t_k) + \ldots + b_{p+1} f(\hat{y}_{k-p}, t_{k-p})\right],\quad p \le k \le N-1. \tag{8.2.38}$$

Algoritmii Adams-Bashforth se mai numesc şi algoritmi de tip *Adams predictor*, deoarece, conform (8.2.38), calculul lui $\hat{y}_{k+1}$ are semnificația de *predicție* a unei valori necunoscute, ce se evaluează pe baza a p+1 valori cunoscute $\hat{y}_{k-p} = \hat{y}(t_{k-p}), \cdots, \hat{y}_k = \hat{y}(t_k)$.

O clasă importantă de *algoritmi impliciți* cu largă utilizare în practică o constituie algoritmii *Adams-Moulton*, ale căror forme concrete pot fi obținute drept cazuri particulare ale exprimării generale (8.2.36), pentru $m = p,\ p \ge 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \ldots = a_m = 0$, adică:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\left[b_0 f(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1}) + b_1 f(\hat{y}_k, t_k) + \ldots + b_p f(\hat{y}_{k+1-p}, t_{k+1-p})\right],\quad p-1 \le k \le N-1. \tag{8.2.39}$$

Algoritmii Adams-Moulton se mai numesc şi algoritmi de tip *Adams corector*, deoarece, conform (8.2.39), calculul lui $\hat{y}_{k+1}$ (care apare în membrul stâng al lui (8.2.39)) are semnificaţia de *corecţie* a valorii deja cunoscute (în urma aplicării unui procedeu oarecare) $\hat{y}_{k+1} = \hat{y}(t_{k+1})$ (care apare, cu aceeaşi notaţie generică, şi în membrul drept al lui (8.2.39)). Pe lângă această valoare cunoscută, în membrul drept al lui (8.2.39) mai apar p valori cunoscute $\hat{y}_{k+1-p} = \hat{y}(t_{k+1-p}), \cdots, \hat{y}_k = \hat{y}(t_k)$, ce sunt întrebuinţate pentru realizarea corecţiei. Uzual, valoarea $\hat{y}_{k+1} = \hat{y}(t_{k+1})$ este, mai întâi, *predictată* cu ajutorul unui algoritm de forma (8.2.38) şi, ulterior (după ce s-a intrat în posesia predicţiei), este *corectată* cu ajutorul uni algoritm de forma (8.2.39). Cu alte cuvinte, o metodă de tip Adams corector se utilizează în conjuncţie cu o metodă de tip Adams predictor, motiv pentru *care ansamblul celor două metode* este referit drept metodă (sau algoritm) de tip *Adams predictor-corector*.

Fără a intra în detalii şi demonstraţii, precizăm faptul că în construcţia concretă a unei formule de integrare multi-pas de tipul (8.2.36), pentru care se determină valorile numerice ale coeficienţilor, aplicarea efectivă a *aproximării prin interpolare polinomială* se referă la funcţia $f(y(t),t)$ din membrul drept al ecuaţiei diferenţiale ce defineşte problema Cauchy (8.2.11) şi nu la soluţia $y(t)$ (aşa cum am considerat anterior, la nivel strict teoretic, pentru a contura şi justifica ideea fundamentală ce caracterizează metodele indirecte). Astfel, ca principiu general, prin utilizarea polinomului de interpolare Lagrange de gradul p, notat $g_p(t)$, pentru funcţia $f(y(t),t)$, se calculează aproximativ integrala:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(y(t),t\big)dt \cong \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_p(t)dt\,, \tag{8.2.40}$$

care, privită prin prisma relaţiei exacte de mai jos (ce decurge direct din ecuaţia diferenţială formulată în (8.2.11)):

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(y(t),t\big)dt\,, \tag{8.2.41}$$

conduce la scrierea:

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_p(t)dt\,, \tag{8.2.42}$$

cu utilizare imediată în integrarea numerică aferentă problemei Cauchy (8.2.11).

În cazul algoritmilor *Adams-Bashforth*, polinomul de interpolare Lagrange de grad p, $g_p(t)$, se foloseşte în următoarele p+1 puncte echidistante $t_{k-p} < \cdots < t_k$, (în care f este cunoscută) astfel încât, prin explicitarea integralei din (8.2.42) se va obţine formula de integrare numerică (8.2.38), cu valori concrete determinate pentru coeficienţi.

În cazul algoritmilor *Adams-Moulton*, polinomul de interpolare Lagrange de grad p, $g_p(t)$, se foloseşte în următoarele p+1 puncte echidistante $t_{k+1-p} < \cdots < t_{k+1}$, astfel încât, prin explicitarea integralei din (8.2.42) se va obţine formula de integrare numerică (8.2.39), cu valori concrete determinate pentru coeficienţi.

De asemenea, mai precizăm faptul (care poate fi demonstrat teoretic) că *eroarea locală de trunchiere* (sau *discretizare*) pentru un algoritm de integrare multi-pas de tip Adams-Bashforth (8.2.38) sau Adams-Moulton (8.2.39), bazat pe un polinom de interpolare de gradul p, este:

$$\varepsilon_{k+1}^{ld} = O(h^{p+2}). \tag{8.2.43}$$

Această constatare confirmă afirmația (de factură generală) din finalul părții introductive a paragrafului curent, referitoare la ordinul metodelor numerice de integrare multi-pas.

Din examinarea exprimărilor generale (8.2.38) şi (8.2.39) ale algoritmilor indirecți de tip Adams-Bashforth şi, respectiv, Adam-Moulton, constatăm că metodele în cauză nu pot fi startate bazându-ne numai pe condiția inițială a problemei Cauchy (8.2.11) - aşa cum permit metodele directe studiate în paragraful anterior. De aceea, se spune că *metodele indirecte nu sunt autostartabile*. Astfel, o metodă multi-pas (explicită sau implicită) de ordinul $p+1$ necesită cunoaşterea valorilor $\hat{y}_j = \hat{y}(t_j)$, $j=0,\cdots,p$, $p\geq 1$, corespunzătoare primelor $p+1$ puncte ale diviziunii (8.2.3).

A. Algoritmi Adams-Bashforth (Adams explicit, sau Adams predictor)

Conform celor discutate anterior, algoritmul Adams-Bashforth de ordin p+1, $p\geq 1$, este descris de egalitatea (8.2.38), în care coeficienții $b_1,\cdots,b_{p+1}$ se determină în urma explicitării integralei $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g_p(t)dt$ din (8.2.42). Astfel rezultă următoarele metode cu utilizare frecventă în practica integrării numerice:

A1. Algoritmul Adams-Bashforth (Adams predictor) de ordinul II

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\left[\frac{3}{2}f(\hat{y}_k,t_k) - \frac{1}{2}f(\hat{y}_{k-1},t_{k-1})\right],\ 1\leq k\leq N-1. \tag{8.2.44}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.38) pentru $p=1$ şi, conform (8.2.43), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^3)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0 = \hat{y}(t_0)$, $\hat{y}_1 = \hat{y}(t_1)$.

A2. Algoritmul Adams-Bashforth (Adams predictor) de ordinul III

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\cdot\left[\frac{23}{12}f(\hat{y}_k,t_k) - \frac{16}{12}f(\hat{y}_{k-1},t_{k-1}) + \frac{5}{12}f(\hat{y}_{k-2},t_{k-2})\right],\ 2\leq k\leq N-1. \tag{8.2.45}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.38) pentru $p=2$ şi, conform (8.2.43), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^4)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0 = \hat{y}(t_0)$, $\hat{y}_1 = \hat{y}(t_1)$, $\hat{y}_2 = \hat{y}(t_2)$.

A3. Algoritmul Adams-Bashforth (Adams predictor) de ordinul IV

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h\cdot\Bigg[&\frac{55}{24}f(\hat{y}_k,t_k) - \frac{59}{24}f(\hat{y}_{k-1},t_{k-1}) + \\ &+\frac{37}{24}f(\hat{y}_{k-2},t_{k-2}) - \frac{9}{24}f(\hat{y}_{k-3},t_{k-3})\Bigg],\ 3\leq k\leq N-1.\end{aligned} \tag{8.2.46}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.38) pentru $p=3$ şi, conform (8.2.43), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^5)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0 = \hat{y}(t_0)$, $\hat{y}_1 = \hat{y}(t_1)$, $\hat{y}_2 = \hat{y}(t_2)$, $\hat{y}_3 = \hat{y}(t_3)$.

B. Algoritmi Adams-Moulton (Adams implicit, sau Adams corector)

Conform celor discutate anterior, algoritmul Adams-Moulton de ordin p+1, $p\geq 1$, este descris de egalitatea (8.2.39), în care coeficienții $b_0,\cdots,b_p$ se determină în urma explicitării integralei $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g_p(t)dt$ din (8.2.42). Astfel rezultă următoarele metode cu utilizare frecventă în practica integrării numerice:

B1. Algoritmul Adams-Moulton (Adams corector) de ordinul II

$$\hat{y}_{k+1}=\hat{y}_k+h\left[\frac{1}{2}f(\hat{y}_{k+1},t_{k+1})+\frac{1}{2}f(\hat{y}_k,t_k)\right],\ \ 0\leq k\leq N-1. \tag{8.2.47}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.39) pentru p=1 şi, conform (8.2.43), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^3)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0=\hat{y}(t_0),\hat{y}_1=\hat{y}(t_1)$.

B2. Algoritmul Adams-Moulton (Adams corector) de ordinul III

$$\hat{y}_{k+1}=\hat{y}_k+h\left[\frac{5}{12}f(\hat{y}_{k+1},t_{k+1})+\frac{8}{12}f(\hat{y}_k,t_k)-\frac{1}{12}f(\hat{y}_{k-1},t_{k-1})\right],\ \ 1\leq k\leq N-1. \tag{8.2.48}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.39) pentru p=2 şi, conform (8.2.43), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^4)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0=\hat{y}(t_0),\hat{y}_1=\hat{y}(t_1),\hat{y}_2=\hat{y}(t_2)$.

B3. Algoritmul Adams-Moulton (Adams corector) de ordinul IV

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+1}=\hat{y}_k+h\Big[&\frac{9}{24}f(\hat{y}_{k+1},t_{k+1})+\frac{19}{24}f(\hat{y}_k,t_k)-\\&-\frac{5}{24}f(\hat{y}_{k-1},t_{k-1})+\frac{1}{24}f(\hat{y}_{k-2},t_{k-2})\Big],\ \ 3\leq k\leq N-1.\end{aligned} \tag{8.2.49}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.39) pentru p=3 şi, conform (8.2.43), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^5)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0=\hat{y}(t_0),\hat{y}_1=\hat{y}(t_1),\hat{y}_2=\hat{y}(t_2),\hat{y}_3=\hat{y}(t_3)$.

Aşa cum am precizat în abordarea generală de mai sus, algoritmii Adams-Moulton sunt utilizați practic drept *metode corectoare*, în sensul că, dacă ne aflăm în posesia unei valori $\hat{y}_{k+1}^{\text{pred}}=\hat{y}^{\text{pred}}(t_{k+1})$ calculată printr-un procedeu oarecare în punctul t_{k+1} (de exemplu, printr–o metodă de tip predictor), atunci formula de integrare (8.2.39) va furniza o valoare nouă $\hat{y}_{k+1}^{\text{cor}}$, corespunzând aceluiaşi punct t_{k+1}:

$$\hat{y}_{k+1}^{\text{cor}}=\hat{y}_k+h\left[b_0f(\hat{y}_{k+1}^{\text{pred}},t_{k+1})+b_1f(\hat{y}_k,t_k)+\ldots+b_pf(\hat{y}_{k+1-p},t_{k+1-p})\right]. \tag{8.2.50}$$

Cu alte cuvinte, dacă definim funcția $F:D\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ prin:

$$F(\hat{y}_{k+1})=\hat{y}_k+h\left(\sum_{i=1}^{p}b_if(\hat{y}_{k+1-i},t_{k+1-i})\right)+hb_0f(\hat{y}_{k+1},t_{k+1}), \tag{8.2.51}$$

atunci egalitatea (8.2.50) poate fi rescrisă sub forma:

$$\hat{y}_{k+1}^{\text{cor}} = F(\hat{y}_{k+1}^{\text{pred}}). \tag{8.2.52}$$

Pe de altă parte, utilizând funcția F definită prin (8.2.51), formula de integrare (8.2.39), privită ca ecuație algebrică ce definește implicit valoarea $\hat{y}_{k+1}$, se exprimă echivalent astfel:

$$\hat{y}_{k+1} = F(\hat{y}_{k+1}), \tag{8.2.53}$$

ceea ce ne arată că $\hat{y}_{k+1}$ este un *punct fix* al aplicației F. Presupunând că valoarea punctului fix $\hat{y}_{k+1}$ nu este cunoscută, dacă $F : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o aplicație *contractantă* (care satisface proprietatea $\exists q \in (0,1) : \forall \alpha, \beta \in D : \| F(\alpha) - F(\beta) \| \leq q \| \alpha - \beta \|$), atunci valoarea respectivă poate fi calculată numeric, cu o precizie oricât de bună, printr-o succesiune de iterații de forma:

$$\hat{y}_{k+1}^{(j+1)} = F(\hat{y}_{k+1}^{(j)}), j = 0,1,2,....., \hat{y}_{k+1}^{(0)} \in D \text{ arbitrar ales}, \tag{8.2.54}$$

deoarece $\hat{y}_{k+1}$ reprezintă limita şirului definit prin (8.2.54). Fără a intra în detalii, precizăm că, în general, se poate asigura proprietatea de contracție a aplicației F din (8.2.52) prin corelarea pasului de integrare h cu valorile funcției $f(y(t),t)$ (ce definește membrul drept al ecuației diferențiale din (8.2.11)). De exemplu, o astfel de corelare se poate realiza prin raportarea lui h la o constantă $L>0$ ce garantează satisfacerea inegalității Lipschitz de către funcția $f(y(t),t)$.

Reformularea unui algoritm Adams implicit de tipul (8.2.39) prin intermediul şirului (8.2.54) pune în evidență rolul mecanismului iterativ, capabil (cel puțin la nivel teoretic) de a furniza o aproximare de calitate pentru valoarea necunoscută $\hat{y}_{k+1}$. Numărul de iterații necesare pentru realizarea unei atare aproximări depinde de valoarea primului termen al şirului (8.2.54), adică cu cât alegerea lui $\hat{y}_{k+1}^{(0)}$ se face mai aproape de $\hat{y}_{k+1}$ (necunoscut), cu atât precizia dorită în cunoaşterea lui $\hat{y}_{k+1}$ se obține intr-un număr de iterații mai redus. În acest context, putem privi egalitatea (8.2.52) drept prima iterație a procesului (8.2.54), adică $\hat{y}_{k+1}^{(0)} = \hat{y}_{k+1}^{\text{pred}}$, ceea ce justifică utilitatea întrebuințării unui algoritm Adams explicit de tipul (8.2.38) pentru a furniza predicția $\hat{y}_{k+1}^{\text{pred}}$. Combinațiile dintre un algoritm Adams explicit (cu rolul de a inițializa procesul iterativ (8.2.54), adică de a predicta o valoare) şi un algoritm Adams implicit (cu rolul de a derula procesul iterativ (8.2.54), adică de a corecta valoarea predictată) definesc clasa algoritmilor *Adams predictor-corector*, de care ne ocupăm, pe scurt, în cele ce urmează.

C. Algoritmi Adams predictor-corector

O schemă (metodă, algoritm) Adams predictor-corector constă (pentru fiecare pas de integrare) în secvențierea etapelor prezentate mai jos:

1. (P) Se utilizează *predictorul* (8.2.38) pentru a calcula valoarea $\hat{y}_{k+1}^{\text{pred}}$. Se setează $j = 0$ şi se efectuează atribuirea $\hat{y}_{k+1}^{(j)} = \hat{y}_{k+1}^{\text{pred}}$.
2. (E) Se evaluează $f\left(\hat{y}_{k+1}^{(j)}, t_{k+1}\right)$.

3. (C) Se utilizează *corectorul* (8.2.39) pentru a efectua o iterație de forma (8.2.54) din care rezultă valoarea $\hat{y}_{k+1}^{(j+1)}$.
4. Dacă $\left|\hat{y}_{k+1}^{(j+1)} - \hat{y}_{k+1}^{(j)}\right| >$ toleranța impusă, atunci se incrementează j ($j = j + 1$) şi se reia etapa 2 (E); altfel se efectuează atribuirea $\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^{(j+1)}$.

Ca o remarcă de principiu, de sorginte practică, se poate afirma că pentru un predictor destul de precis, este suficientă efectuarea unei singure iterații (8.2.54) a corectorului, pentru a obține acuratețea corespunzătoare toleranței impuse.

Uzual, metodele Adams predictor-corector se construiesc folosind predictorul şi corectorul de acelaşi ordin (fără însă ca această strategie să fie obligatorie). Astfel se pot obține:

C1. Algoritmul Adams predictor-corector de ordinul II
Exploatează predictorul de ordinul II (8.2.44) şi corectorul de ordinul II (8.2.47).

C2. Algoritmul Adams predictor-corector de ordinul III
Exploatează predictorul de ordinul III (8.2.45) şi corectorul de ordinul III (8.2.48).

C3. Algoritmul Adams predictor-corector de ordinul IV
Exploatează predictorul de ordinul IV (8.2.46) şi corectorul de ordinul IV (8.2.49).

Metoda Adams predictor-corector de ordinul IV pare să fie cea mai populară, atât în sensul implementărilor ad–hoc realizate de diverşi utilizatori, cât şi a softwareului profesionist, proiectat şi livrat de firme specializate

Observație: Unele texte iau în discuție şi existența unui algoritm Adams predictor-corector de ordinul I, compus din ecuația (8.2.17) - algoritmul Euler explicit şi ecuația (8.2.18) - algoritmul Euler implicit. Într-adevăr, asocierea celor două ecuații furnizează un algoritm de tip predictor-corector, cu referire de sine stătătoare drept *algoritmul Euler predictor-corector*, în care (8.2.17) este predictorul, iar (8.2.18) este corectorul. Totuşi, încadrarea acestui algoritm drept un caz particular al algoritmilor de tip Adams predictor-corector (corespunzând ordinului I) nu este riguroasă, deoarece algoritmii de tip Adams sunt multi-pas, în timp ce atât (8.2.17) cât şi (8.2.18) funcționează într-un singur pas. Metoda Euler predictor-corector nu este utilizată în practică, dar numai algoritmul implicit (8.2.18) poate fi întrebuințat în integrarea numerică a ecuațiilor numite "stiff" (aspect ce va fi discutat în paragraful 8.2.6).

8.2.4.3. Algoritmi indirecţi cu pas adaptiv

Pentru cazurile analizate mai sus, pasul de integrare a fost considerat constant, ales astfel încât eroarea locală de trunchiere să rămână mărginită de o valoare maximă admisibilă şi pentru care algoritmul să se comporte stabil. Pentru sisteme mari de ecuații diferențiale, volumul de calcule creşte substanțial odată cu creşterea ordinului algoritmului. Drept consecință, există situații când este avantajos să se modifice atât ordinul algoritmului, cât şi valoarea pasului de integrare. Fără a intra în nici un fel de detalii, amintim doar că, în literatură, sunt indicate procedee de ajustare automată a pasului de integrare şi a ordinului metodei, în funcție de eroarea locală de trunchiere maximă admisă.

8.2.4.4. Metode de startare pentru algoritmi de integrare multipas

După cum am afirmat deja mai sus, algoritmii multi-pas nu pot fi startaţi automat, o metodă multi-pas (explicită sau implicită) de ordinul p+1 necesitând cunoaşterea valorilor $\hat{y}_j = \hat{y}(t_j)$, $j=0,\cdots,p$, $p \geq 1$, corespunzătoare primelor p+1 puncte ale diviziunii (8.2.3). Pentru obţinerea acestor valori, trebuie aplicat în prealabil, de p ori, un algoritm uni-pas (o metodă directă). Cel mai recomandat este algoritmul *Runge-Kutta* de ordinul IV, din cauza preciziei sale şi a modului relativ simplu de programare. Cum din cele discutate anterior în paragraful curent a reieşit că valorile uzual folosite pentru p sunt mici, rezultă că inconvenientele specifice algoritmului *Runge-Kutta* de ordinul IV (datorate dificultăţilor de a controla propagarea erorilor) sunt nesemnificative în acest context.

8.2.4.5. Stabilitatea algoritmilor de integrare multipas

În conformitate cu materialul prezentat în prima secţiune a capitolului curent, o caracteristică importantă a algoritmilor o constituie stabilitatea numerică. Stabilitatea numerică a unui algoritm de integrare garantează faptul că erorile de rotunjire şi cele de trunchiere nu sunt amplificate, ci rămân mărginite pentru *valori suficient de mici* ale pasului de integrare. Pe de altă parte, dacă pasul de integrare este *prea mic*, va fi necesar un număr foarte mare de paşi pentru a acoperi întreg intervalul de integrare, ceea ce va implica un volum mare de calcule şi, datorită acumulării erorilor, va conduce chiar la scăderea preciziei rezultatelor. De aceea, în practică este recomandabilă alegerea unui pas de integrare *cât mai mare posibil*, care să asigure *stabilitatea numerică* a algoritmului.

O comparaţie a algoritmilor Adams impliciţi cu algoritmii Adams expliciţi permite formularea unor concluzii cu privire la valorile pasului de integrare care asigură stabilitatea numerică a algoritmilor (concluzii care pot fi demonstrate teoretic):

- În rezolvarea numerică a unei probleme Cauchy de forma (8.2.1), algoritmul Adams implicit de ordinul II este stabil pentru *orice valoare* a pasului de integrare. Alegerea pasului este restricţionată doar de precizia impusă pentru soluţia numerică a problemei respective.
- În general vorbind, în rezolvarea numerică a unei probleme Cauchy de forma (8.2.1), orice algoritm Adams implicit, de ordin $p+1$, $p>1$, poate utiliza paşi de integrare *mai mari* decât algoritmul Adams explicit de acelaşi ordin.
- În rezolvarea numerică a unei probleme Cauchy de forma (8.2.1), algoritmii Adams impliciţi de ordinele III, IV, V şi VI pot utiliza paşi de integrare de circa 10 ori mai mari decât algoritmii Adams expliciţi de acelaşi ordin.

Posibilitatea asigurării unei precizii ridicate în condiţiile operării cu un pas de integrare mai mare pentru algoritmii Adams impliciţi (Adams-Moulton) face ca dezavantajele legate de rezolvarea ecuaţiei implicite (8.2.53) să fie unanim privite ca nesemnificative.

8.2.5. Metode de tip Richardson (Metode de extrapolare)

Ca principiu general, aceste metode sunt bazate pe extrapolarea de tip Richardson (Press *et al*., 1992), considerând rezultatul integrării numerice drept o funcţie analitică ajustabilă cu ajutorul pasului de integrare privit ca parametru.

Cel mai eficient algoritm din această categorie este cel elaborat de Bulirsch şi Stoer în anul 1980. Un *pas* al algoritmului (considerat generic de lungime *H*) merge de la *t* la *t* + *H*, cu *H* suficient de mare, acest pas fiind realizat din *subpaşi* de valoare

$$h_j = \left(1/n_j\right)H\,, \tag{8.2.55}$$

unde n_j notează numărul de puncte din intervalul de lungime *H* şi este dat de şirul

$$n_0 = 2,\ \ n_1 = 3,\cdots,n_j = 2n_{j-2},\ \ \ j = 2,3,\ldots\ . \tag{8.2.56}$$

Valorile intermediare obținute în punctele $t + k_j h_j$, $k_j = 0,1,\cdots,n_j$, sunt extrapolate prin fracții raționale. Se reduce h_j până când se obține precizia dorită. Pentru un pas al algoritmului $H = n_j\, h_j$ sunt necesare $(n_j + 1)$ evaluări ale funcției din membrul drept al ecuației diferențiale ce defineşte problema Cauchy (8.2.11).

Metoda este recomandabilă pentru aplicațiile unde evaluările membrului drept sunt foarte costisitoare. Eşecurile metodei sunt foarte rare (Press *et al*., 1986) şi se datorează (în majoritatea situațiilor) singularităților din fracția rațională utilizată pentru extrapolare.

8.2.6. Metode de tip Gear pentru ecuaţii stiff

Sistemele de ecuații diferențiale *stiff* (termen englezesc ce se poate traduce prin cuvântul românesc, lipsit de semnificații matematice, "înțepenit") se caracterizează prin aceea că dinamica soluțiilor (traiectoriilor) pune în evidență moduri (sau componente) cu o variație foarte rapidă, cât şi moduri (componente) cu o variație foarte lentă în raport cu variabila independentă, cu semnificație temporală, ceea ce, în limbaj geometric, s-ar traduce prin schimbări bruşte ale cosinusurilor directoare pentru dreptele tangente la curbele soluții (traiectorii).

În cazul sitemelor de ecuații diferențiale de forma (8.2.1), comportarea de tip stiff apare pentru domeniile de valori ale vectorului soluție **y** care conduc la disproporții mari (de ordinul sutelor sau miilor) între autovalorile matricei jacobian $[\partial\mathbf{f} / \partial\mathbf{y}]$. În situația particulară a sistemelor de ecuații diferențiale liniare, cu coeficienți constanți, matricea jacobian este independentă de valorile vectorului **y** (fiind chiar matricea constantă ce defineşte ecuațiile sistemului) şi prezența autovalorilor disproporționate ca magnitudine înseamnă (în limbaj tehnico-ingineresc) disproporția constantelor de timp, conducând la soluții cu comportare stiff în orice regiune din spațiul $\mathbf{R}^n$.

Majoritatea metodelor standard de integrare nu sunt potrivite pentru rezolvarea ecuațiilor stiff. De exemplu metodele Runge-Kutta cu pas adaptiv eşuează prin reducerea repetată a pasului, iar metodele multipas explicite conduc la oscilații false ale soluției calculate.

Pentru rezolvarea eficientă a ecuațiilor stiff trebuie ales un algoritm care să permită variația pasului de integrare într-o plajă largă de valori în condiții de stabilitate numerică, un astfel de algoritm fiind caracterizat ca *stiff stabil*. Se poate arăta că metodele de tip *Runge-Kutta*, *Adams-Bashforth* şi *Adams-Moulton* (cu excepția algoritmului de ordinul II) nu sunt stiff stabile.

În anul 1971, *Gear* a proiectat, implementat şi testat o metodă stiff stabilă, de tip *implicit*, cu ajustarea automată a pasului, care, în scurt timp, a fost cotată drept o realizare de referință în domeniul rezolvării numerice a ecuațiilor diferențiale. Astfel, în prezent, literatura de specialitate consemnează existența unei clase de *algoritmi de tip Gear*, cu structură

implicită, ale căror forme concrete pot fi obținute drept cazuri particulare ale formulei generale multi-pas (8.2.36), pentru $m = p + 1$ şi $b_1 = \cdots b_m = 0$:

$$\hat{y}_{k+1} = a_1\hat{y}_k + a_2\hat{y}_{k-1} + \ldots + a_{p+1}\hat{y}_{k-p} + hb_0 f(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1}), \quad p \le k \le N-1. \tag{8.2.57}$$

Fără a intra în detalii, precizăm faptul (care poate fi demonstrat teoretic) că *eroarea locală de trunchiere* (sau *discretizare*) pentru un algoritm de integrare de tip Gear (8.2.57) este:

$$\varepsilon_{k+1}^{ld} = O(h^{p+2}), \tag{8.2.58}$$

ceea ce arată că algoritmul respectiv este de ordin p+1.

De asemenea, se poate arăta că algoritmii de tip *Gear* sunt stiff stabili.

Algoritmul Gear de ordinul II

$$\hat{y}_{k+1} = \frac{4}{3}\hat{y}_k - \frac{1}{3}\hat{y}_{k-1} + h\left[\frac{2}{3} f(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1})\right]. \tag{8.2.59}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.57) pentru $p = 1$ şi, conform (8.2.58), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^3)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0 = \hat{y}(t_0), \hat{y}_1 = \hat{y}(t_1)$.

Algoritmul Gear de ordinul III

$$\hat{y}_{k+1} = \frac{18}{11}\hat{y}_k - \frac{9}{11}\hat{y}_{k-1} + \frac{2}{11}\hat{y}_{k-2} + h\left[\frac{6}{11} f(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1})\right]. \tag{8.2.60}$$

Constituie particularizarea egalității (8.2.57) pentru $p = 2$ şi, conform (8.2.58), eroarea locală de trunchiere (sau discretizare) este $O(h^4)$. Pentru startarea algoritmului, sunt necesare valorile $\hat{y}_0 = \hat{y}(t_0), \hat{y}_1 = \hat{y}(t_1), \hat{y}_2 = \hat{y}(t_2)$.

Algoritmii Gear au posibilitatea de a alege un pas de integrare mai mare, după ce modurile (sau componentele) foarte rapide ale soluției ajung în regim permanent. Totodată însă, această creştere a pasului de integrare poate face ca determinarea lui $\hat{y}_{k+1}$ din ecuația în formă implicită (8.2.57), folosind un proces iterativ de tipul (8.2.54), să nu mai funcționeze. Explicația constă în faptul că aplicația $F : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$F(\hat{y}_{k+1}) = a_1\hat{y}_k + a_2\hat{y}_{k-1} + \ldots + a_{p+1}\hat{y}_{k-p} + h \cdot b_0 f(\hat{y}_{k+1}, t_{k+1}), \tag{8.2.61}$$

ce defineşte termenii şirului (8.2.54) în cazul algoritmilor Gear (8.2.57) poate fi contractantă numai pentru valori mici ale pasului de integrare h, pierzând proprietatea de contracție odată cu creşterea lui h. Din acest motiv, metodele Gear fac apel la iterații Newton-Ralphson pentru determinarea lui $\hat{y}_{k+1}$ din ecuația în formă implicită (8.2.57), iterații care sunt mai laborioase decât (8.2.54), dar prezintă avantajul că aplicația F (8.2.61) nu trebuie să satisfacă proprietatea de contracție, permițând astfel creşterea pasului de integrare.

Algoritmii de tip *Gear* au fost perfecționați astfel încât să poată modifica automat atât ordinul, cât şi pasul de integrare, în condițiile asigurării preciziei dorite, cu un efort de calcul minim.

Observație: Unele texte iau în discuție şi existența unui algoritm Gear de ordinul I, furnizat de ecuația (8.2.18) care este, de fapt, algoritmul *Euler implicit*. Într-adevăr,

algoritmul (8.2.18) are structură implicită şi s-a demonstrat teoretic faptul că el este *numeric stabil* pentru orice valoare a pasului de integrare şi, totodată, *stiff stabil* (pasul de integrare putând varia oricum). Totuşi, încadrarea acestui algoritm drept un caz particular al algoritmilor de tip Gear (corespunzând ordinului I) nu este riguroasă, deoarece algoritmii de tip Gear sunt multi-pas, în timp ce (8.2.18) funcţionează într-un singur pas. Ca utilitate practică, metoda Euler implicită (8.2.18) poate fi întrebuinţată în integrarea numerică a ecuaţiilor stiff, după cum va reieşi şi din informaţiile prezentate în paragraful următor.

8.2.7. Alegerea metodei de integrare utilizată în simulare

După cum reiese din cele discutate în această secţiune, viteza şi precizia cu care se rezolvă problema Cauchy ataşată unui sistem de ecuaţii diferenţiale depind de metoda de integrare folosită, de mărimea pasului de integrare şi de toleranţa acceptată de utilizator.

Metoda *Euler implicită* este extrem de simplă, dar necesită paşi de integrare mult mai mici decât cei utilizaţi de alte metode pentru a atinge aceeaşi precizie. De aceea, uzual se foloseşte în cazul unor sisteme de complexitate redusă. Totuşi, merită de precizat faptul că utilizarea ei cu un pas constant, adecvat ales, poate reprezenta o soluţie viabilă pentru simularea sistemelor cu o comportare stiff, care, totodată, prezintă şi discontinuităţi în membrul drept al descrierii din (8.2.1).

Metodele de tip *Runge-Kutta* sunt adecvate unor clase largi de sisteme dinamice, caracterizate printr-o dinamică (liniară sau neliniară) echilibrată (fără tendinţe de comportare stiff). Pot fi utilizate şi în unele situaţii când membrul drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale (8.2.1) prezintă discontinuităţi.

Metodele de tip *Adams predictor-corector* sunt recomandate pentru simularea sistemelor care prezintă o comportare stiff uşoară sau moderată. Operează mai rapid decât metodele de tip *Runge-Kutta* atunci când evaluarea membrului drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale (8.2.1) necesită un volum mare de calcule (adică funcţia vectorială $\mathbf{f}(\mathbf{y}(t),t)$ are o expresie complicată). Nu sunt recomandate în situaţia când membrul drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale (8.2.1) prezintă discontinuităţi.

Algoritmul *Burlish-Stoer* poate înlocui, uneori cu performanţe superioare, algoritmii de tip Adams predictor-corector. Poate fi utilizat şi în unele situaţii când membrul drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale (8.2.1) prezintă discontinuităţi.

Metodele de tip *Gear* sunt singurele care pot furniza rezultate corecte în simularea sistemelor cu o pronunţată comportare stiff. Utilizarea lor nu este recomandată decât în astfel de situaţii, pentru alte tipuri de probleme dovedindu-se ineficiente.

8.3. Utilizarea mediului MATLAB în simularea sistemelor descrise prin reprezentări intrare-stare-ieşire

MATLAB (MATrix LABoratory) dezvoltat de firma MathWorks (U.S.A) este un mediu software dedicat calculelor tehnico-ştiinţifice (MATLAB, 1996). *Familia de programe*

MATLAB include pachetul de bază sau nucleul (cu denumirea comercială de MATLAB), plus o colecție de programe organizate pe diferite domenii (cu denumirea comercială de "toolbox-uri"), care extind funcționalitatea pachetului de bază. Modul interactiv de utilizare, simplitatea operării şi gama extrem de variată a aplicațiilor pentru care mediul MATLAB oferă facilități specifice fac ca acesta să se bucure de o tot mai largă popularitate în instituțiile de învățământ şi cercetare din întreaga lume.

Nucleul MATLAB incorporează un număr mare de funcții predefinite cu diverse destinații, cum ar fi:

- operații matematice de uz general (aritmetică in virgulă mobilă, calcul polinomial, funcții trigonometrice, exponențiale, logaritmice, speciale etc.);
- manipularea tablourilor şi matricelor;
- rezolvarea unor probleme de analiză numerică;
- reprezentări grafice 2D şi 3D;
- dezvoltarea de programe în limbaj MATLAB şi interfațarea acestora cu sistemul de operare gazdă.

La aceste funcții predefinite disponibile in nucleul de bază, se adaugă un număr însemnat de toolbox-uri (pachete de programe specializate), acoperind domenii specifice (procesarea semnalelor, teoria controlului, statistică, rețele neurale, calcul simbolic, procesarea imaginilor, optimizare etc.). Toolbox-urile, ca şi programele utilizatorilor, sunt fişiere sursă scrise în *limbajul de programare* propriu mediului MATLAB (uneori referit şi drept *limbaj* MATLAB).

În mediul software MATLAB, sunt disponibile mai multe funcții ce permit integrarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale, utilizând unele metode al căror suport teoretic a fost discutat în secțiunea precedentă a capitolului curent. Parte dintre aceste funcții sunt concepute pentru a simula comportarea unei entități de tip *reprezentare intrare-stare-ieşire* în cazul cel mai general, *neliniar* şi *variant în timp*, descriptibil prin ecuația vectorială de stare (2.8.3) şi ecuația vectorială a ieşirii (2.8.4).

Pe parcursul acestei secțiuni, după o scurtă trecere în revistă a caracteristicilor generale ale mediului MATLAB (care face obiectul primului paragraf), ne vom concentra atenția asupra acelor tipuri de probleme care sunt strâns legate de simularea numerică a funcționării sistemelor, şi anume: calcul matriceal (paragraful doi), reprezentări grafice ale funcțiilor (paragraful trei) , integrare numerică (paragraful patru).

Pentru a asigura o accesibilitate cât mai mare a textului acestei secțiuni, toți termenii proprii limbajului MATLAB, precum şi secvențele de program dezvoltate în acest limbaj sunt scrise cu un font diferit, spre a permite uşoara lor individualizare.

8.3.1. Caracteristici generale ale mediului

Scopul acestui paragraf constă în prezentarea succintă a unor elemente fundamentale privind utilizarea mediului MATLAB. De asemenea, cititorul va găsi în Anexa III, un rezumat al comenzilor MATLAB cu cea mai frecventă utilizare. În mod evident, informațiile furnizate de acest paragraf şi sus-amintita anexă sunt extrem de concise şi în nici un caz nu pot substitui utilizarea documentației puse la dispoziție de firma producătoare.

8.3.1.1. Lansarea în execuţie şi interfaţarea cu sistemul de operare

Nucleul MATLAB se lansează în lucru prin intermediul fişierului executabil **matlab.exe**. După lansare, odată ce s-a ajuns sub controlul nucleului MATLAB, prompterul implicit este simbolul "»". Nucleul acceptă introducerea unei comenzi MATLAB interne sau externe. *O comandă de tip intern* este o instrucţiune MATLAB tastată pe prompterul MATLAB şi care se încheie prin acţionarea tastei denumită "retur de car" (<CR> sau <Enter>). Comanda este analizată sintactic şi semantic, iar, în caz de corectitudine, este executată (regimul de funcţionare fiind cel specific unui "interpretor"). O *comandă de tip extern* este o succesiune de instrucţiuni scrise în limbaj MATLAB (format sursă) organizate sub forma unui fişier cu extensie .m. Pentru executarea unei comenzi externe, pe prompterul MATLAB se introduce numele fişierului (fără extensia .m) urmat de <CR>. Execuţia unei comenzi externe înseamnă interpretarea şi executarea linie cu linie a instrucţiunilor din fişierul respectiv de tip .m, ca şi cum fiecare instrucţiune ar fi furnizată drept o comandă internă. Execuţia unei comenzi externe poate fi realizată numai dacă fişierul sursă cu numele corespunzător şi extensie .m se află în directorul curent sau în unul din directoarele specificate în calea de căutare a MATLAB-ului.

Părăsirea nucleului se poate face cu una dintre următoarele comenzi scrise pe prompterul MATLAB: quit, Ctrl/z, sau exit.

În timpul unei sesiuni MATLAB, utilizatorul poate crea şi atribui valori unui număr de variabile aflate în memoria internă afectată nucleului, denumită "spaţiu de lucru" (în conformitate cu denumirea originală din limba engleză "Workspace"). Pentru a salva aceste valori şi a relua ulterior execuţia cu acelaşi context de lucru se pot utiliza comenzi de salvare/restaurare de forma:

» save nume_fişier<CR> - salvează variabilele în fişierul cu numele precizat,

» load nume_fişier<CR> - restaurează contextul de lucru folosind fişierul precizat.

Extensia implicită pentru aceste fişiere este .mat. Dacă numele fişierului este omis, atunci se foloseşte implicit fişierul matlab.mat.

8.3.1.2. Help "on-line"

Funcţia help permite obţinerea unor informaţii cu caracter general despre comenzile interne şi externe MATLAB. Ea poate fi apelată în mai multe forme:

» help<CR> - oferă informaţii despre elementele limbajului MATLAB şi despre fişierele .m din directorul curent,

» help nume_funcţie<CR> - oferă informaţii detaliate despre funcţia având numele precizat prin nume_funcţie.

8.3.1.3. Variabile şi spaţiul de lucru

În cadrul unei sesiuni MATLAB, deci atâta timp cât ne aflăm sub prompterul "»", putem defini variabile de tip scalar, vector sau matrice, dându-le nume diferite, pentru care se pot folosi atât litere mari (upper case), cât şi litere mici (lower case), MATLAB-ul fiind "case-sensitive". Ca în orice alt limbaj de programare, numele folosite de utilizator trebuie să difere de cuvintele rezervate ale limbajului MATLAB. Tastarea <CR> va determina desfăşurarea acţiunii corespunzătoare liniei introduse (principiul interpretorului).

Dacă linia introdusă este o atribuire de forma:

» variabilă=expresie<CR>,

atunci mediul MATLAB va răspunde prin evaluarea expresiei respective, prin afişarea numelui variabilei, a semnului "=" şi a rezultatului evaluării expresiei respective:

```
variabilă = rezultat ,
```

păstrând, totodată, în spaţiul de lucru această informaţie şi prin poziţionarea prompterului "»" pe linia următoare. Dacă linia introdusă se încheie cu caracterul ";" (două puncte), fiind de forma:

```
» variabilă = expresie;<CR> ,
```

atunci evaluarea are loc, rezultatul ei este păstrat în spaţiul de lucru, dar mediul MATLAB nu mai efectuează afişarea rezultatului, pe linia următoare apărând imediat prompterul "»".

În general vorbind, orice instrucţiune MATLAB urmată de ";" va determina *inhibarea afişării* pe ecran a rezultatului respectivei instrucţiuni. În absenţa simbolului ";" ca terminator al instrucţiunii, se va efectua afişarea rezultatului.

În acest context, mai precizăm faptul că scrierea în limbaj MATLAB este *cu format liber*, în sensul că prezenţa spaţiilor sau a liniilor albe nu este semnalată ca eroare. O altă informaţie de uz foarte general, de aceeaşi factură, o constituie scrierea unui *comentariu*, care se introduce prin caracterul "%" (procent), textul interpretat drept comentariu fiind cel cuprins între caracterul "%" şi sfârşitul liniei respective; scrierea unui comentariu pe mai multe linii presupune utilizarea caracterului "%" pe fiecare din liniile în cauză.

Dacă în linia introdusă există numai o expresie (fără operaţiunea de atribuire), adică linia are forma:

```
» expresie<CR> ,
```

atunci mediul MATLAB va răspunde prin evaluarea expresiei, prin afişarea mesajului:

```
ans = rezultat
```

şi prin poziţionarea prompterului "»" pe linia următoare. În spaţiul de lucru se va păstra informaţia referitoare la ans (care este cuvânt rezervat, prescurtare de la termenul englezesc "answer"). În general discutând, în spaţiul de lucru se va găsi sub numele de ans ultimul rezultat nenominalizat (valoare calculată pentru o expresie fără atribuire).

Considerăm important a atrage atenţia asupra faptului că modul de afişare a rezultatelor în fereastra de lucru MATLAB nu este în totalitate identic cu cel folosit mai sus, în sensul că MATLAB-ul utilizează trei linii distincte consecutive (nu una singură, ca în textul nostru). În Exemplul 8.3.1., vom ilustra cu exactitate modul de afişare a rezultatelor în fereastra de lucru MATLAB, dar în restul textului preferăm scrierea pe un singur rând, datorită aspectului grafic mai compact.

Ca urmare a introducerii comenzii who, MATLAB-ul afişează numele tuturor variabilelor existente în spaţiul de lucru dintr-o sesiune MATLAB. Cu excepţia salvărilor explicite, spaţiul de lucru se pierde odată cu părăsirea voită sau accidentală a mediului.

Prin introducerea comenzii clear, sunt şterse toate variabilele din spaţiul de lucru, cu excepţia celor pre-existente, create implicit de mediu. Pentru o ştergere selectivă a variabilelor din spaţiul de lucru, se va folosi sintaxa:

```
clear nume_variabilă_1 nume_variabilă_2 … nume_variabilă_n ,
```

în care separatorul este spaţiul (şi nu virgula).

8.3.1.4. Fişiere program

După cum am amintit deja în subparagraful 8.3.1.3, exploatarea mediului MATLAB se poate realiza folosind comenzi interne (când utilizatorul controlează progresul prelucrărilor numerice prin intervenţie linie-cu-linie), sau folosind comenzi externe (când utilizatorul

furnizează mediului, sub forma unui fişier cu extensia `.m`, o succesiune de linii scrise în conformitate cu sintaxa instrucţiunilor MATLAB, pe care mediul le interpretează secvenţial, fără ca utilizatorul să mai intervină). Fişierele cu extensia `.m` joacă practic rolul unei unităţi de program în limbajul MATLAB, motiv pentru care mai sunt referite şi cu denumirile de fişiere program, proceduri sau rutine MATLAB.

Având în vedere modul de organizare, informaţiile memorate în mediul de lucru, precum şi modul de comunicare cu alte unităţi de program, fişierele `.m` pot fi clasificate în următoarele două tipuri:

- Fişiere de tip "script" (*eng.* script file) - nu prezintă particularităţi de organizare. Sunt alcătuite dintr-o succesiune de linii MATLAB pe care mediul le interpretează în secvenţă, fiecare variabilă nou creată fiind totodată memorată în spaţiul de lucru. Acest tip de fişiere `.m` sunt deosebit de utile pentru a înlocui interacţiunea linie-cu-linie a utilizatorului în cazul unor prelucrări numerice ce necesită introducerea multor linii MATLAB.
- Fişiere de tip "funcţie" (*eng.* function file) - prezintă particularităţi de organizare, necesitând existenţa termenului `function` la începutul primei linii de cod. Respectă principiile generale, valabile şi în alte limbaje de programare, de a comunica cu unitatea apelantă prin *argumente* (sau *parametri*) de intrare şi de ieşire. Variabilele utilizate în interiorul unei proceduri de tip "funcţie" au un caracter local şi nu pot fi văzute de utilizator în spaţiul de lucru al MATLAB-ului.

O bună parte din facilităţile oferite de mediul MATLAB sunt disponibile sub forma de fişiere `.m` de tip "funcţie", permiţând accesul utilizatorului la codul sursă. Atragem atenţia asupra faptului că MATLAB-ul operează şi cu funcţii de tip "built-in", (al căror text sursă nu este accesibil utilizatorului).

8.3.1.5. Facilităţi de control logic

În mediul MATLAB există şase *operatori relaţionali* care operează atât asupra scalarilor cât şi asupra matricelor. Ne ocupăm numai de cazul scalar, cazul matriceal constituind o interpretare generalizată pe componente a celui scalar. Semnificaţiile acestor operatori relaţionali sunt:

`<` strict mai mic decât `>` strict mai mare decât `==` identic egal cu
`<=` mai mic sau egal cu `>=` mai mare sau egal cu `~=` diferit de

De asemenea există trei *operatori logici*, care, în cazul scalar, au semnificaţiile de mai jos. Utilizarea acestor operatori pentru matrice înseamnă generalizarea pe componente a cazului scalar.

`&` ŞI (operator binar) `|` SAU (operator binar) `~` NU (operator unar)

Valorii logice "adevărat" îi corespunde 1, iar valorii logice "fals" îi corespunde 0. În efectuarea operaţiilor logice, orice variabilă (scalar) *diferită de* 0 este considerată ca având valoarea logică "adevărat", adică efectuarea unei operaţiei logice cu o astfel de variabilă se face ca şi cum ar avea valoarea 1.

Cu ajutorul operatorilor relaţionali şi logici pot fi formulate şi testate diverse condiţii logice care permit *controlul execuţiei comenzilor*.

MATLAB-ul mai pune la dispoziţie şi o serie de funcţii relaţionale şi logice, pentru a căror studiere recomandăm documentaţia elaborată de firma MathWorks.

Mediul MATLAB posedă *structuri pentru controlul execuţiei comenzilor* care sunt similare celor disponibile în majoritatea limbajelor de programare, fapt ce permite dezvoltarea propriu-zisă de programe în limbajul MATLAB.

Bucla FOR

Aceasta structură de control permite repetarea unei comenzi sau a unui grup de comenzi MATLAB de un număr precizat de ori. Forma sa uzuală este:

```
for variabilă = valoare_inițială : pas : valoare_finală
      instrucțiuni
end
```

Numele utilizate au următoarele semnificații:

`for` marchează începutul buclei;
`variabilă` reprezintă variabila de contorizare a buclei;
`valoare_inițială` reprezintă valoarea atribuită inițial variabilei de contorizare;
`pas` reprezintă pasul de incrementare al variabilei de contorizare;
`valoare_finală` reprezintă valoarea finală atribuită variabilei de contorizare;
`instrucțiuni` una sau mai multe comenzi MATLAB care alcătuiesc *corpul buclei*;
`end` marchează sfârşitul buclei.

Dacă pentru prima linie a structurii de control FOR este folosită sintaxa:

```
for variabilă = valoare_1 : valoare_2 ,
```

atunci pentru `pas` (din sintaxa comentată mai sus) este considerată valoarea implicită 1. În această situație, o alegere inadecvată cu `valoare_1 > valoare_2` , face ca instrucțiunile din corpul buclei să nu se execute niciodată.

Pot exista situații în care este necesară folosirea mai multor bucle FOR imbricate. În aceste cazuri buclele trebuie să fie strict incluse una in cealaltă şi să respecte forma de scriere prezentată anterior.

Bucla WHILE

Aceasta structură de control permite repetarea unei comenzi sau a unui grup de comenzi MATLAB de un număr neprecizat de ori, până la satisfacerea unei condiții logice. Forma sa generală este:

```
while condiție
      instrucțiuni
end
```

Numele utilizate au următoarele semnificații:

`while` marchează începutul buclei;
`condiție` reprezintă o condiție logică la a cărei satisfacere se părăseşte bucla;
`instrucțiuni` una sau mai multe comenzi MATLAB care alcătuiesc *corpul buclei*;
`end` marchează sfârşitul buclei.

Condiția este formulată cu ajutorul operatorilor relaționali şi/sau logici, iar în cazul cel mai general, pot apărea chiar funcții relaționale şi/sau logice.

Dacă, prin natura sa, condiția logică nu poate fi satisfăcută (nu ia valoarea "adevărat"), niciodată, atunci comenzile din bucla WHILE se vor executa la nesfârşit, fără a se mai putea părăsi bucla în lipsa unei intervenții exterioare.

Pot exista situații în care este necesară folosirea mai multor bucle WHILE imbricate. În aceste cazuri buclele trebuie să fie strict incluse una in cealaltă şi să respecte forma generală de scriere.

Instrucțiunea IF

Această structură de control permite formularea deciziilor (multiple). Forma sa generală este:

```
if condiţie
      instrucţiuni
elseif condiţie_1
      instrucţiuni_1
elseif condiţie_2
      instrucţiuni_2
……
else
      instrucţiuni_else
end
```

Numele utilizate au următoarele semnificaţii:
`if` marchează începutul structurii;
`condiţie`, `condiţie_1`, `condiţie_2` etc. precizează condiţii logice;
`instrucţiuni`, `instrucţiuni_1`, `instrucţiuni_2` etc., precum şi `instrucţiuni_else` desemnează una sau mai multe comenzi MATLAB;
`elseif` marchează executările condiţionate prin `condiţie_1`, `condiţie_2` etc. a grupurilor de comenzi `instrucţiuni_1`, `instrucţiuni_2` etc.;
`else` marchează executarea grupului de comenzi `instrucţiuni_else`;
`end` marchează sfârşitul structurii.
Se testează `condiţie`. Dacă `condiţie` este îndeplinită, atunci se va executa grupul de comenzi `instrucţiuni`; dacă însă `condiţie` nu este îndeplinită, se va trece la a testa `condiţie_1`. Dacă `condiţie_1` este îndeplinită, atunci se va executa grupul de comenzi `instrucţiuni_1`; dacă însă `condiţie_1` nu este îndeplinită, se va trece la a testa `condiţie_2` ş.a.m.d. Dacă nici una din condiţii nu este îndeplinită, se execută grupul de comenzi `instrucţiuni_else`, plasat după cuvântul `else`.

Ce mai simplă formă pentru o structură IF este:

```
if condiţie
      instrucţiuni
end
```

şi înseamnă executarea grupului de comenzi `instrucţiuni` numai dacă `condiţie` este satisfăcută; atunci când `condiţie` nu este satisfăcută, se părăseşte structura fără a efectua nici o operaţie.

Exemplul 8.3.1.

Prin acest exemplu, ne propunem să ilustrăm diferenţa dintre un fişier de tip "script" şi unul de tip "funcţie", ambele fiind concepute cu scopul de a furniza termeni ai şirului lui Fibonacci, definit prin relaţia de recurenţă:

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \geq 1.$$

De asemenea, exemplul de faţă ilustrează şi folosirea facilităţilor de control logic existente în MATLAB.

a) Furnizăm, mai întâi, textul fişierului de tip script `fibscript.m` care calculează şi afişează termenii şirului lui Fibonacci cu valori mai mici decât 80. Aceştia sunt memoraţi într-un vector `a` (a se vedea, eventual, paragraful următor, 8.3.2, dedicat vectorilor şi matricelor).

```
% fibscrip.m
```

```
% Fisier de tip script utilizat in Exemplul 8.3.1,
% care calculează si afisează
% termenii sirului lui Fibonacci cu valori mai mici de 80.
%
a=[1 1];
n=1;
%
while a(n) + a(n+1) < 80
      a(n+2) = a(n) + a(n+1);
      n=n+1;
end
%
a
```

Introducând în MATLAB comanda (care este, de fapt, numele fişierului de tip script):

```
» fibscrip<CR>
```

vom obține răspunsul (afişat pe trei linii consecutive, constituind o reproducere exactă după ecranul utilizator):

```
a =

     1     1     2     3     5     8    13    21    34    55
```

b) Furnizăm, acum, textul fişierului de tip funcție `fibfun.m` care calculează şi afişează termenul de ordin *n* oarecare al şirului. Atragem atenția asupra posibilității ca o funcție MATLAB să se autoapeleze, posibilitate pe care am exploatat-o în implementarea de mai jos.

```
function a = fibfun(n)
%
% function a = fibfun(n)
%
% Fisier de tip functie utilizat in Exemplul 8.3.1,
% care calculează si afisează
% termenul de ordin n (oarecare) al sirului lui Fibonacci.
%
if n>2
   a = fibfun(n-1) + fibfun(n-2);
else
   a = 1;
end
```

Pentru a calcula termenul de ordin 10 al şirului, introducem comanda:

```
» x=fibfun(10),
```

la care MATLAB-ul răspunde astfel (răspunsul constituind o reproducere exactă după ecranul utilizator, unde sunt alocate trei linii consecutiv):

```
x =

    55
```

8.3.2. Vectori şi matrice

MATLAB-ul operează cu scalari, vectori şi matrice. Una din caracteristicile fundamentale ale acestui mediu (care, de fapt, a şi contribuit substanţial la larga sa utilizare) constă în numeroasele facilităţi oferite pentru lucrul cu masive (vectori şi matrice). În acest paragraf, vom trece în revistă câteva dintre aceste facilităţi la care utilizatorii fac apel cel mai frecvent.

8.3.2.1. Introducerea şi referirea masivelor

Masivele pot fi introduse în MATLAB în diferite moduri:
1. declarate sub formă de listă explicită de elemente;
2. construite cu ajutorul funcţiilor şi instrucţiunilor specifice;
3. create cu ajutorul fişierelor `.m`;
4. încărcate din fişiere externe.

Spaţiul de memorare se alocă automat, la orice nouă definire de variabilă, până la completarea spaţiului de lucru, a cărui dimensiune depinde de calculatorul folosit. Cel mai simplu mod de introducere a matricelor este cel menţionat la punctul 1, pentru care elementele matricei se introduc pe linie. *Separatorul* dintre linii este `";"` , iar întregul masiv va fi cuprins între paranteze pătrate `[...]`.

MATLAB-ul permite definirea automată a vectorilor ale căror componente sunt *egal distanţate* prin intermediul unui pas constant într-un domeniu precizat de o valoare iniţială şi una finală. Sintaxa utilizată în acest caz este dată de următoarea scriere poziţională:

```
nume_vector = valoare_iniţială:pas:valoare_finală .
```

Elementele unui masiv sunt nominalizate prin înscrierea poziţiei elementului între paranteze rotunde. Totodată putem referi submasive mai mici în cadrul unor masive mai mari, folosind simbolul `":"` (două puncte) pentru desemnarea indicelui (indicilor) ce precizează poziţia submasivului în masivul de origine. Sintaxa utilizată în acest din urmă caz este dată de următoarea scriere poziţională:

```
indice_iniţial:indice_final .
```

Această se poate rezuma numai la caracterul ":" în situaţia particulară când ne referim la toate valorile indicelui respectiv (cum ar fi, de exemplu, toate liniile sau toate coloanele dintr-o matrice).

Exemplul 8.3.2.

Vom ilustra introducerea şi referirea masivelor prin câteva situaţii concrete:
a) Pentru definirea elementelor matricei

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix},$$

se va introduce o linie MATLAB de forma:

```
» A=[1 2 3;10 20 30;100 200 300]<CR>
```

b) Pentru definirea elementelor vectorului

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 4\sin(2t) \\ -\dfrac{7}{\sqrt{2}}\cos(5t-7) \end{bmatrix},$$

unde *t* este o variabilă a cărei valoare se presupune a fi cunoscută la momentul definirii lui **x**, se va introduce o linie MATLAB de forma:

```
» x=[4*sin(2*t); -(7/sqrt(2))*cos(5*t-7)]<CR>
```

c) Presupunem că matricea **A** de la cazul a) a fost introdusă şi că se doreşte definirea elementelor unei noi matrice **B**, având pe primele trei coloane chiar matricea A, ca mai jos:

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c:c} & 4 \\ \mathbf{A} & 40 \\ & 50 \end{array}\right].$$

În acest scop, pe prompterul MATLAB se va introduce linia:

```
» B=[A [4; 40; 400]]<CR>
```

sau, utilizând operaţia de transpunere simbolizată prin `" ' "` (apostrof), linia:

```
» B=[A [4 40 400]']<CR>
```

d) Dacă se doreşte a genera un vector linie cu elemente intre 0 şi π plasate echidistant, cu un pas $\pi/4$, adică de forma:

$$\mathbf{y}=\left[0\ \ \pi/4\ \ \pi/2\ \ 3\pi/4\ \ \pi\right],$$

atunci se va introduce următoarea comandă MATLAB:

```
» y=0:pi/4:pi<CR> .
```

e) Presupunem că matricea **A** de la cazul a) a fost introdusă şi se doreşte construirea unei matrice **C** alcătuită din primele două linii ale lui **A**. Pentru aceasta se va introduce o comandă MATLAB de forma:

```
» C=A(1:2,:)<CR> ,
```

în care simbolul ":" de pe a doua poziţie dintre parantezele rotunde arată că ne referim la toate coloanele matricei **A**.

Mediul MATLAB conţine funcţii ce generează automat masive particulare, cum ar fi:

- `zeros(m,n)` - generează o matrice nulă cu *m* linii şi *n* coloane (la matricele pătrate se poate omite numărul de coloane);
- `ones(m,n)` - generează o matrice cu *m* linii şi *n* coloane, toate elementele având valoarea 1 (la matricele pătrate se poate omite numărul de coloane);
- `eye(m,n)` - generează o matrice cu *m* linii şi *n* coloane, având în colţul din stânga sus al tabloului matricea identitate de ordin $\min\{m,n\}$.

8.3.2.2. Operatori aritmetici şi funcţii pentru lucrul cu masive

Operatorii aritmetici de bază pentru lucrul cu masive sunt trecuţi în revistă mai jos. Aceşti operatori sunt utilizaţi şi în calculul cu variabile scalare, deosebirile urmând a fi comentate:

`+` adunare;
`-` scădere;
`*` înmulţire;
`/` împărţire la dreapta;

\ împărțire la stânga;
^ ridicare la putere;
' operatorul de transpunere

Dacă *a, b* sunt variabile scalare, atunci:

- operația *a/b* are semnificația standard din aritmetică, adică $a/b = a(b)^{-1}$;
- operația *a\b* are semnificația $a \backslash b = (a)^{-1} b$.
- Dacă **A**, **B** sunt matrice, atunci:
- operația **A/B** desemnează înmulțirea la dreapta a matricei **A** cu inversa la dreapta a lui **B** (sau, echivalent, este soluția ecuației **X*B=A**);
- operația **A\B** desemnează înmulțirea la stânga a matricei **B** cu inversa la stânga a lui **A** (sau, echivalent, este soluția ecuației **A*X=B**).

În afara acestor operatori există şi comenzi interne (funcții) care furnizează informații specifice masivelor. Aplicarea lor în cazul unei variabile scalare nu este semnalată drept eroare, reprezentând o particularizare trivială a operării cu masive. Amintim câteva comenzi interne care sunt frecvent utilizate în problemele de calcul matriceal şi algebră liniară:

`size` dimensiunea unui masiv;
`rank` rangul unei matrice;
`svd` valorile singulare ale unei matrice;
`norm` norma unei matrice;
`inv` inversa unei matrice pătrate;
`det` determinantul unei matrice pătrate;
`eig` valorile proprii ale unei matrice pătrate.

Exemplul 8.3.3.

Vom ilustra operarea cu masive prin câteva situații concrete:
a) Se consideră matricele pătrate nesingulare:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Introducând comenzile:

```
» X=A\B<CR>
```

şi

```
» X=inv(A)*B<CR>
```

se obține acelaşi rezultat, şi anume matricea

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix},$$

care are semnificația de soluție a sistemului **A*X=B**.

b) Se consideră matricea **A** şi vectorul **b** definite astfel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Introducând comanda:

```
» x=A\b<CR>
```
se obține vectorul:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-0.5\\0\\0.5\end{bmatrix},$$

care este o soluție în sensul celor mai mici pătrate a sistemului subdeterminat (cu 2 ecuații şi 3 necunoscute) **A*x=b**.

c) Să considerăm matricea:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\5&7&9\end{bmatrix},$$

şi dorim să calculăm inversa acesteia, pe care să o notăm cu **B**. Pentru aceasta, se introduce comanda:

```
» B=inv(A)<CR> ,
```
iar răspunsul MATLAB-ului constă în următorul mesaj (reprodus identic după fereastra de lucru):

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 4.934626e-018 ,
```
după care se furnizează elementele matricei **B** (cu valori, în modul, de ordinul lui 10^{15}). Conținutul mesajului ne atrage atenția asupra posibilității ca matricea **A** să fie singulară, fapt ce se poate verifica teoretic cu multă uşurință observând că linia a treia este suma primelor două. Verificarea se poate efectua şi numeric, solicitând calcularea rangului matricei **A**, cu ajutorul comenzii:

```
» rank(A)<CR> ,
```
care furnizează răspunsul 2. De asemenea, se poate solicita calculul autovalorilor matricei **A**, prin introducerea comenzii:

```
» eig(A)<CR> ,
```
care furnizează autovalorile `15.3898`, `-0.3898` şi `0.0000`, dovedind că matricea este singulară. La aceeaşi concluzie se ajunge şi în urma calculării valorilor singulare, cu ajutorul funcției `svd` (procedeu care stă, de fapt, la baza evaluării numerice a rangului implementat în MATLAB prin funcția `rank`).

8.3.3. Reprezentări grafice 2-D

Mediul MATLAB pune la dispoziția utilizatorului o multitudine de facilități grafice dintre care vom lua în discuție doar aspectele fundamentale privitoare la reprezentările grafice 2-D (bidimensionale) şi la controlul aferent ferestrei (ecranului) grafice, deoarece acest gen de problematică este strâns legată de simularea numerică a funcționării sistemelor descrise prin modele intrare-stare-ieşire. Astfel, studiului prin simulare i se poate adăuga un valoros suport intuitiv în sensul vizualizării dependenței de timp a dinamicii analizate.

Indiferent de tipul reprezentării grafice (2-D sau 3-D), acestea sunt desenate de către MATLAB în ecrane (sau ferestre) distincte de ecranul de lucru care găzduieşte sesiunea MATLAB, denumite "ecrane (sau ferestre) grafice MATLAB". După cum se va vedea spre sfârşitul paragrafului curent, utilizatorul are anumite drepturi de gestionare a ferestrelor grafice, în conformitate cu obiectivele urmărite.

Datorită specificului desenelor ce însoţesc şi completează experimentele de simulare, ne vom concentra atenţia numai asupra reprezentărilor 2-D realizate cu ajutorul funcţiei `plot`, care operează pentru coordonate rectangulare, cu scară liniară pentru ambele coordonate.

Dacă `y` este un vector din spaţiul de lucru MATLAB, atunci prin comanda:

```
plot(y)
```

valorile elementelor lui `y` sunt reprezentate ca funcţie de indexul elementelor (indexul elementelor plasându-se pe abscisă, iar valoarea elementelor plasându-se pe ordonată), conducând la desenarea în plan a punctelor `(i,y(i))`. Datele sunt scalate automat atât pe abscisă, cât şi pe ordonată, astfel încât reprezentarea grafică se poate realiza pentru un număr oricât de mare de elemente ale vectorului `y` şi pentru orice valori ale acestor elemente.

Dacă `x` şi `y` sunt doi vectori de aceeaşi lungime din spaţiul de lucru MATLAB, atunci prin comanda:

```
plot(x,y)
```

elementele lui `y` sunt reprezentate ca funcţie de elementele lui `x` (elementele lui `x` plasându-se pe abscisă, iar elementele lui `y` plasându-se pe ordonată), conducând la desenarea în plan a punctelor `(x(i),y(i))`. Datele sunt scalate automat atât pe abscisă, cât şi pe ordonată.

Punctele obţinute se pot reprezenta (în sensul de *puncte distincte*) cu diferite tipuri de *caractere* sau pot fi *interpolate liniar* folosind diferite moduri de trasare a *segmentelor* de interpolare. De asemenea, se pot utiliza diverse *culori* atât pentru puncte, cât şi pentru segmentele de interpolare. Pentru a beneficia de aceste facilităţi, sintaxa comenzii MATLAB va fi următoarea:

```
plot(x,y,'simbol_culoare').
```

Numele `simbol_culoare` desemnează un şir de două sau trei caractere, dintre care *primul* sau *primele două* precizează simbolul utilizat pentru reprezentarea distinctă a punctelor sau pentru interpolarea lor, iar ultimul caracter este o literă ce precizează *culoarea*, în conformitate cu informaţiile din Tabelul 8.3.1. În argumentul (parametrul) `simbol_culoare` pot lipsi fie informaţiile referitoare la simbolul plotării (caz în care se utilizează opţiunea implicită însemnând interpolarea punctelor cu linie continuă) , fie informaţiile referitoare la culoare (caz în care se utilizează opţiunea implicită însemnând culoarea galben). Dacă parametrul `simbol_culoare` lipseşte în totalitate, atunci plotarea se realizează cu opţiunile implicite care înseamnă interpolarea punctelor cu linie continuă de culoare galbenă.

Tab. 8.3.1. Caracterele folosite în construirea şirului `simbol_culoare` din sintaxa comenzii `plot`

Simbol - puncte distincte	**Simbol - puncte interpolate**	**Culoare**
`.` punct	`-` linie continuă - implicită	`r` red (roşu)
`+` plus	`--` linie întreruptă (2 caractere)	`g` green (verde)
`*` asterix	`:` linie punctată	`b` blue (albastru)
`o` cerc	`-.` linie-punct (2 caractere)	`c` cyan (bleu)
`x` semnul x		`m` magenta (violet)
		`y` yellow (galben) - implicită
		`w` white (alb)

Odată ce reprezentarea grafică a fost realizată cu ajutorul comenzii de plotare, acesteia i se mai pot adăuga unele informații suplimentare (deosebit de importante pentru înțelegerea rapidă şi corectă a desenului), folosind comenzile cu următoarele semnificații:

`title('titlu_desen')` pentru a intitula desenul;

`xlabel ('informații_despre_absisă')` pentru a eticheta axa Ox;

`ylabel ('informații_despre_ordonată')` pentru a eticheta axa Oy;

`grid` pentru a trasa o grilă punctată peste desen, cu scopul de a facilita citirea informațiilor numerice.

Să considerăm situația când în spațiul de lucru MATLAB există `n` (valoare generică) perechi de vectori `(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)`, satisfăcând condiția că în fiecare pereche cei doi vectori au aceeaşi dimensiune, dar dimensiunile pot diferi de la o pereche la alta. Dacă se doreşte ca în aceeaşi fereastră grafică să fie suprapuse toate cele `n` desene corespunzând celor `n` perechi de vectori, atunci se poate utiliza comanda de plotare cu următoarea sintaxă:

```
plot(x_1,y_1,'simbol_culoare_1',...,x_n,y_n,'simbol_culoare_n').
```

Mediul MATLAB oferă şi o serie de facilități pentru *gestionarea ferestrei grafice* de către utilizator. Dintre acestea, în continuare, ne vom ocupa de posibilitatea *divizării* (*partiționării*) ferestrei grafice în mai multe subferestre grafice, acțiune care se dovedeşte deosebit de utilă pentru studiul comparativ a două sau patru desene. Aceasta se realizează prin introducerea comenzii:

```
subplot(m,n,p),
```

care divizează ecranul grafic într-o manieră matriceală cu `m` x `n` subferestre. Parametrii `m`, `n`, `p` au următoarele semnificații:

`m` reprezintă numărul de subferestre grafice pe linie (maxim 2);

`n` reprezintă numărul de subferestre grafice pe coloană (maxim 2);

`p` reprezintă numerotarea subferestrei grafice în care se va plasa desenul (numerotarea realizându-se de la stânga la dreapta şi/sau de sus în jos) ce va fi realizat de următoarea comandă de plotare.

După introducerea unei comenzi de divizare de acest tip, trebuie introdusă o comandă de plotare cu sintaxa prezentată mai sus. De asemenea, comanda de plotare poate fi urmată de comenzi ce furnizează informații suplimentare despre grafic, cum ar fi `title`, `xlabel`, `ylabel` şi `grid`, care au fost discutate anterior.

În final, dintre celelalte comenzi cu utilizare frecventă în gestionarea ferestrei grafice mai amintim:

`clg` – şterge fereastra grafică;

`hold on` – *menținerea unui desen* în fereastra grafică cu scopul ca următoarea comandă de plotare să suprapună noul desen peste cel vechi. Această comportare se păstrează până la introducerea comenzii `hold off`.

În cazul când sunt gestionate *mai multe ferestre grafice*, referirea la una dintre ele, pe care generic o considerăm cea de a `n`-a, se face cu ajutorul comenzii `figure(n)` .

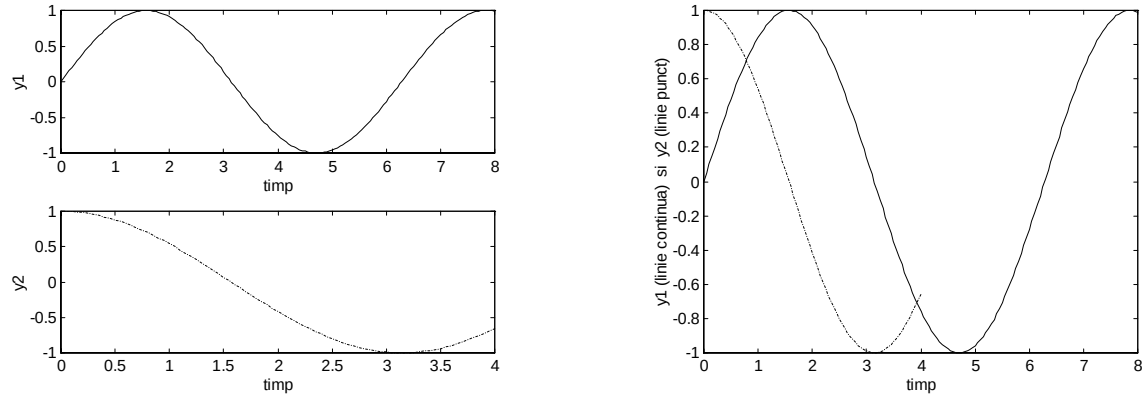
Exemplul 8.3.4.

Se consideră funcțiile $y_1(t)=\sin t$ şi $y_2(t)=\cos t$ pe care dorim să le reprezentăm grafic astfel:

1) Se deschide o primă fereastră grafică care se divizează în două subferestre aşezate una sub cealaltă. În subfereastra superioară se reprezintă $y_1(t)$, pentru $t \in [0,8]$, iar în subfereastra inferioară se reprezintă $y_2(t)$, pentru $t \in [0,4]$.
2) Se deschide o a doua fereastră grafică (care nu se divizează), unde se plotează (cu suprapunere) atât $y_1(t)$, pentru $t \in [0,8]$, cât şi $y_2(t)$, pentru $t \in [0,4]$.

Pentru realizarea acestor obiective, se poate utiliza fişierul de tip script `ex_8_3_4.m` a cărui sursă este furnizată mai jos. Cele două ferestre grafice rezultate sunt reproduse în fig. 8.3.1(a) şi, respectiv, în fig. 8.3.1(b).

```
% ex_8_3_4.m
% Fisier de tip script care ilustreaza utilizarea
% facilitatilor MATLAB destinate reprezentarilor grafice 2_D,
% in conformitate cu Exemplul 8.3.4.
%
% Se realizeaza o divizare uniforma a intervalului [0,8],
% in ale carei puncte se calculeaza y1(t).
t1=0:0.05:8;
y1=sin(t1);
% Se realizeaza o divizare uniforma a intervalului [0,4],
% in ale carei puncte se calculeaza y2(t).
t2=0:0.05:4;
y2=cos(t2);
%
% Se deschide prima fereastra grafica,
% care se divizeaza in doua subferestre;
% y1(t) se reprezinta grafic in fereastra superioara,
% y2(t) se reprezinta grafic in fereastra inferioara,
% rezultand figura 8.3.1(a).
figure(1);
subplot(2,1,1); plot(t1,y1,'w'); xlabel('timp'); ylabel('y1');
subplot(2,1,2); plot(t2,y2,'-.w'); xlabel('timp'); ylabel('y2');
%
% Se deschide a doua fereastra,
% in care se ploteaza atat y1(t) cat si y2(t),
% rezultand figura 8.3.1(b).
figure(2);
plot(t1,y1,'w',t2,y2,'-.w');
xlabel('timp'); ylabel('y1 (linie continua)  si  y2 (linie punct)');
```



(a) **(b)**

Fig. 8.3.1. Ilustrarea unor facilităţi de reprezentare grafică 2-D discutate în Exemplul 8.3.4:
(a) fereastră divizată, în care se plotează distinct graficele a două funcţii;
(b) fereastră nedivizată, în care se plotează prin suprapunere graficele aceloraşi două funcţii.

O soluţie de programare echivalentă pentru suprapunerea desenelor în a doua fereastră grafică (corespunzătoare figurii 8.3.1(b)), constă în a înlocui penultima linie a codului `ex_8_3_4.m`, adică instrucţiunea

```
plot(t1,y1,'w',t2,y2,'-.w');
```

cu următoarea secvenţă:

```
plot(t1,y1,'w');
hold on;
plot(t2,y2,'-.w');
```

Atragem atenţia asupra faptului că pentru toate plotările din acest exemplu s-a folosit *culoarea albă*, deoarece fundalul ferestrelor grafice deschise de această versiune a MATLAB-ului este *negru* şi transferarea imaginilor în textul de faţă (sub forma figurilor 8.3.1(a) şi, respectiv, 8.3.1(b)) s-a realizat cu inversarea culorilor.

8.3.4. Funcţii destinate integrării numerice

8.3.4.1. Funcţii ce utilizează descrierea de tip reprezentare intrare-stare-ieşire

În mediul software MATLAB, sunt disponibile mai multe funcţii de tip built-in, ce permit integrarea numerică a sistemelor descrise prin *reprezentări intrare-stare-ieşire*. Aceste funcţii sunt enumerate mai jos, fiecare dintre ele implementând câte un algoritm pe care practica simulării îl recomandă ca eficient pentru o anumită clasă de probleme (în spiritul celor discutate în paragraful 8.2.6. din secţiunea anterioară):

- funcţia `euler` – implementează metoda *Euler implicită*;
- funcţia `rk23` – implementează metoda *Runge–Kutta* cu pas adaptiv, de ordin 2 şi 3;
- funcţia `rk45` – implementează metoda *Runge–Kutta* cu pas adaptiv, de ordin 4 şi 5;
- funcţia `adams` – implementează metoda *Adams predictor – corector* cu pas adaptiv şi modificarea automată a ordinului;
- funcţia `gear` – implementează metoda *Gear* pentru sisteme "stiff", cu modificarea automată atât a ordinului, cât şi a pasului de integrare;

- funcţia `linsim` – implementează o schemă de integrare cu performanţe numerice deosebite în cazul sistemelor cu dinamică liniară sau cvasi-liniară.

Toate aceste funcţii prezintă o sintaxă comună pentru apelare în mediul MATLAB, de forma:

```
[t,x,y]=funcţie_de_integrare('sfun',[tiniţial tfinal],x0,options,u),   (8.3.1)
```

în care `funcţie_de_integrare` se înlocuieşte printr-unul din numele concrete (`euler`, `rk23`, `rk45`, `adams`, `gear`, `linsim`) de mai sus, în conformitate cu interesul utilizatorului.

Toate aceste funcţii sunt concepute pentru a simula comportarea unei entităţi de tip *reprezentare intrare-stare-ieşire* în cazul cel mai general, *neliniar* şi *variant în timp*, descriptibil prin ecuaţia vectorială de stare (2.8.3) şi ecuaţia vectorială a ieşirii (2.8.4). Precizarea entităţii respective se realizează în (8.3.1) prin intermediul *parametrului de intrare* de tip şir de caractere `'sfun'`, unde `sfun` este un *nume generic* (în sensul uzual de *parametru formal*) utilizat pentru o procedură (rutină) cu organizare standard, denumită "S-function", prin care utilizatorul defineşte concret ecuaţiile (2.8.3) şi (2.8.4). Structura "S-function" trebuie înţeleasă drept un caz particular de fişier tip "funcţie" (care a fost discutat în paragraful 8.3.1. al secţiunii curente), în care apar o serie de cerinţe suplimentare.

Pe de altă parte, dacă se doreşte folosirea funcţiilor MATLAB enumerate mai sus pentru integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale de forma (8.2.1), atunci utilizatorul trebuie ca ¸ în prealabil, să construiască o procedură de tip S-function (aici referită cu numele generic `sfun.m`) care să adapteze descrierea (8.2.1) la organizarea standard de tip intrare-stare-ieşire (2.8.3) şi (2.8.4) - de exemplu, considerând intrarea nulă în ecuaţia vectorială a stării (2.8.3) şi luând ieşirea identică cu starea în ecuaţia vectorială a ieşirii (2.8.4).

Ceilalţi *parametri de intrare* din secvenţa de apel (8.3.1) care este comună tuturor funcţiilor MATLAB de tip built-in amintite mai sus (`euler`, `rk23`, `rk45`, `adams`, `gear`, `linsim`) au următoarele semnificaţii:

`tiniţial` - momentul iniţial de timp al integrării (simulării) numerice, corespunzător valorii t_0 din diviziunea (8.2.3).

`tfinal` - momentul final de timp al integrării (simulării) numerice, corespunzător valorii t_f din diviziunea (8.2.3).

`x0` - vector coloană ce precizează condiţia iniţială pentru vectorul de stare corespunzător unei reprezentări de forma (2.8.3) şi (2.8.4).

`options` - un vector cu 6 parametri opţionali care permit controlul progresului integrării, având următoarele componente:

- `options(1)` - toleranţa impusă pentru efectuarea integrării numerice - implicit `1e-3`;
- `options(2)` - valoarea minimă pentru pasul de integrare - implicit `(tfinal-tiniţial)/2500`;
- `options(3)` - valoarea maximă pentru pasul de integrare - implicit `(tfinal-tiniţial)/50`;
- `options(4)` - valoare `0` sau `1`, utilizată numai de `adams` şi `gear`, valoarea `1` însemnând că funcţia îşi poate selecta automat algoritmul Adams sau algoritmul Gear, în raport cu gradul comportării de tip "stiff" a sistemului de ecuaţii diferenţiale - implicit `1`;
- `options(5)` - valoare `0`, `1`, `2` sau `3`, utilizată pentru afişarea unor informaţii intermediare privind progresul integrării numerice, concomitent cu efectuarea simulării: `0` înseamnă că afişarea este invalidată, `3` înseamnă furnizarea celor mai multe informaţii - implicit `1`;

- `options(6)` – valoare `1` sau `2`, utilizată pentru reprezentarea grafică a rezultatelor simulării într-o formă standard: `1` înseamnă validarea reprezentării grafice, `2` înseamnă invalidarea reprezentării grafice - implicit `2`;

Dacă problema ce face obiectul simulării nu prezintă dificultăți numerice pentru metoda folosită, atunci, pentru toate componentele vectorului `options` se pot folosi valorile implicite, şi în secvența de apel (8.3.1) se va introduce `[]`;

`u` – expresie matematică formulată ca şir de caractere sau tabelă de valori numerice (utilizată prin interpolare) ce defineşte dependența de timp a vectorului de intrare **u**(*t*) (generic considerat ca având *m* componente) dintr-o reprezentare de forma (2.8.3) şi (2.8.4). Tabela de interpolare se construieşte sub formă matriceală, cu organizare pe linii de forma: `timp intrare_1 … intrare_m`., fiecare linie corespunzând câte unui moment de timp.

Conform secvenței de apel (8.3.1), semnificațiile *parametrilor de ieşire* ai tuturor funcțiilor discutate (`euler, rk23, rk45, adams, gear, linsim`) sunt următoarele:

`t` – vectorul momentelor de timp în care funcția returnează valori obținute prin integrare numerică pentru starea **x**(*t*) şi ieşirea **y**(*t*) din reprezentarea de forma (2.8.3) şi (2.8.4) (corespunzând punctelor unei diviziuni de tipul (8.2.3) cu t_0 declarat prin parametrul de intrare `tinițial` şi, respectiv, t_f declarat prin parametrul de intrare `tfinal`).

`x` – valorile obținute prin integrare numerică pentru starea **x**(*t*) a reprezentării de forma (2.8.3) şi (2.8.4), organizate matriceal pe linii, fiecare linie corespunzând unui moment de timp din vectorul `t`.

`y` – valorile obținute prin integrare numerică pentru ieşirea **y**(*t*) a reprezentării de forma (2.8.3) şi (2.8.4), organizate matriceal pe linii, fiecare linie corespunzând unui moment de timp din vectorul `t`.

În continuare, detaliem modul de construire a procedurii de tip S-function `sfun` (ca *nume generic*), care poate fi utilizată de toate funcțiile MATLAB de tip built-in `euler, rk23, rk45, adams, gear, linsim`, fără nici o modificare de la o funcție la alta. Pentru aceasta, utilizatorul va crea un fişier denumit `sfun.m`, având prima linie cu sintaxa obligatorie:

```
function [sys, x0] = sfun(t,x,u,flag) ,
```

unde *parametrii de intrare* `t`, `x` şi `u` desemnează timpul curent de integrare (simulare), valoarea curentă a vectorului de stare şi, respectiv, valoarea curentă a vectorului de ieşire din descrierea (2.8.3) şi (2.8.4). În cazul unui model intrare-stare-ieşire, *continuu în timp* (adică cu o descriere în timp continuu a întregii dinamici, fără elemente discrete, cum este cel definit prin (2.8.3) şi (2.8.4)), funcția utilizator `sfun.m` va returna următoarele informații (prin intermediul *parametrilor de ieşire* `sys` şi `x0`), ca răspuns la valoarea curentă a *parametrului de intrare* `flag`:

- Dacă `flag=1` sau `flag=-1`, atunci `sys=dx/dt` (valoarea curentă a vectorului de stare derivat, sau, echivalent, a membrului drept al ecuației de stare (2.8.3)).
- Dacă `flag=3`, atunci `sys=y(t)` (valoarea curentă a vectorului de ieşire, sau, echivalent, a membrului drept al ecuației de ieşire (2.8.4)).
- Dacă `flag=0`, atunci `sys=[n,0,p,m,0,0]` şi `x0=starea_inițială`, unde:
  `n` precizează numărul variabilelor de stare.
  `p` precizează numărul variabilelor de ieşire.
  `m` precizează numărul variabilelor de intrare.
- Dacă `flag` ia orice altă valoare diferită de cele de mai sus, atunci `sys=[]`.

8.3.4.2. Funcţii ce utilizează descrierea de tip sistem de ecuaţii diferenţiale

Pentru rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale de forma (8.2.1), care nu prezintă dificultăți deosebite în sensul progresului integrării (cum ar fi, de exemplu, comportări de tip "stiff"), mediul MATLAB pune la dispoziția utilizatorului două funcții care nu necesită adaptarea descrierii (8.2.1) la organizarea standard de tip S-function. Aceste funcții sunt:

- funcția `ode23` – implementează metoda *Runge–Kutta* cu pas adaptiv, de ordin 2 şi 3;
- funcția `ode45` – implementează metoda *Runge–Kutta* cu pas adaptiv, de ordin 4 şi 5;

şi sunt identice ca procedeu de integrare numerică cu funcțiile `rk23`, respectiv `rk45`, discutate anterior (exceptând necesitatea de a structura problema sub forma unei reprezentări intrare-stare-ieşire).

Cele două funcții prezintă o sintaxă comună pentru apelare în mediul MATLAB, de forma:

```
[t,y]=funcţie_de_integrare('yprime',iniţial,tfinal,y0,tol,trace),        (8.3.2)
```

în care `funcţie_de_integrare` se înlocuieşte printr-unul din cele două nume concrete `ode23`, sau `ode45`, în conformitate cu interesul utilizatorului.

Semnificațiile *parametrilor de intrare* din secvența de apel (8.3.2) sunt următoarele:

`yprime` – este un şir de caractere ce precizează, în *manieră generică* (conform sensului uzual de *parametru formal*), numele unei proceduri (rutine) de tip "funcție" (a se vedea paragraful 8.3.1 al secțiunii curente) cu organizare standard, prin care utilizatorul defineşte concret sistemul de ecuații diferențiale (8.2.1).

Pe de altă parte, dacă se doreşte folosirea funcțiilor MATLAB enumerate mai sus pentru simularea unui sistem descris printr-o reprezentare intrare-stare-ieşire de forma (2.8.3) şi (2.8.4), atunci utilizatorul trebuie ca, în prealabil, să adapteze descrierea de tip intrare-stare-ieşire (2.8.3) şi (2.8.4) la descrierea de tip sistem de ecuații diferențiale (8.2.1) solicitată de funcția `yprime`. În acest scop, de exemplu, intrarea din ecuația vectorială a stării (2.8.3) va fi încorporată adecvat în membrul drept al sistemului de ecuații diferențiale (8.2.1), iar ecuația vectorială a ieşirii (2.8.4) nu va apărea în funcția `yprime`, ci în unitatea de program ce apelează `ode23` sau `ode45`.

`iniţial` – momentul inițial de timp al integrării (simulării) numerice, corespunzător valorii t_0 din diviziunea (8.2.3).

`tfinal` – momentul final de timp al integrării (simulării) numerice, corespunzător valorii t_f din diviziunea (8.2.3).

`y0` – vector coloană ce precizează condiția inițială pentru funcția vectorială necunoscută $\mathbf{y}(t)$ din sistemul de ecuații diferențiale (8.2.1).

`tol` – parametru opțional care precizează toleranța impusă pentru efectuarea integrării numerice - implicit `1e-3` pentru `ode23` si `1e-6` pentru `ode45`. Dacă problema ce face obiectul simulării nu prezintă dificultăți numerice pentru metoda folosită, atunci se pot folosi valorile implicite.

`trace` – parametru opțional care dacă este setat pe o valoare diferită de `0` validează afişarea unor informații intermediare privind progresul integrării numerice, concomitent cu efectuarea simulării - implicit `0` (afişarea este invalidată).

Dacă atât pentru `tol` cât si pentru `trace` se folosesc valorile implicite, atunci aceşti doi parametri pot lipsi din secvența de apel (8.3.2), paranteza din dreapta închizându-se după parametrul de intrare `x0`.

Conform secvenței de apel (8.3.2), semnificațiile *parametrilor de ieşire* ai celor două funcțiilor discutate (`ode23`, `ode45`) sunt următoarele:
`t` – vectorul momentelor de timp în care funcția returnează valori obținute prin integrare numerică pentru funcția vectorială necunoscută **y**(*t*) din sistemul de ecuații diferențiale (8.2.1) (corespunzând punctelor unei diviziuni de tipul (8.2.3) cu t_0 declarat prin parametrul de intrare `tiniţial` şi, respectiv, t_f declarat prin parametrul de intrare `tfinal`).
`y` – valorile obținute prin integrare numerică pentru funcția vectorială necunoscută **y**(*t*) din sistemul de ecuații diferențiale (8.2.1), organizate matriceal pe linii, fiecare linie corespunzând unui moment de timp din vectorul `t`.

În continuare, detaliem modul de construire a funcției cu structură standard `yprime` (ca *nume generic*), care poate fi utilizată de ambele funcții MATLAB `ode23` şi `ode45`, fără nici o modificare de la o funcție la alta. Pentru aceasta, utilizatorul va crea un fişier denumit `yprime.m`, având prima linie cu sintaxa obligatorie:

```
function ydot = yprime(t,y) ,
```

unde *parametrii de intrare* `t` şi `y` desemnează timpul curent de integrare (simulare) şi, respectiv, valoarea curentă a funcției vectoriale **y**(*t*) din sistemul de ecuații diferențiale (8.2.1). Funcția returnează valoarea membrului drept al sistemului de ecuații diferențiale (8.2.1) calculat pentru `t` şi `y`.

Exemplul 8.3.5.

Ca o aplicație de complexitate mai mare dezvoltată în mediul MATLAB, vom ilustra modul de efectuare a calculelor şi de realizare a reprezentărilor grafice (fig. 2.4.4(a), fig. 2.4.4(b)) aferente Exemplului 2.4.7 din Capitolul 2. Pentru integrarea numerică care stă la baza simulării, se optează pentru folosirea funcției MATLAB `ode45`. În acest scop, a fost proiectată şi implementată o funcție care acoperă *problematica largă* a simulării dinamicii unui sistem modelat printr-o reprezentare intrare-stare-ieşire de tipul (2.4.3), (2..4.4), activat de o intrare *constantă pe intervale*, funcție ce a fost denumită `ms_cst.m` (ca urmare a abrevierii sintagmei "**M**odel de **S**tare cu intrare **C**on**ST**antă pe intervale"). Astfel, se consideră că mărimea de intrare (scalară) *u*(*t*) care se aplică în ecuația de stare (2.4.3) are forma unei funcții scară definită pe *r* intervale de timp de lungimi arbitrare:

$$u(t)=\begin{cases} u_1, & 0\le t<t_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_j, & t_{j-1}\le t<t_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_r, & t_{r-1}\le t\le t_r. \end{cases}$$

Pentru a *individualiza specificul problemei de simulare* corespunzătoare Exemplului 2.4.7, a fost conceput un fişier de tip script, denumit `ex_2_4_7.m` (lansabil în execuție în mediul MATLAB în urma introducerii numelui său), care apelează funcția `ms_cst.m` în contextul particular al modelului concret construit pentru circuitul electric din Exemplul 2.4.7.

După cum am precizat de la începutul acestui exemplu, efectuarea integrării numerice se bazează pe funcția MATLAB `ode45`, care, ca principiu general de realizare a unei aplicații flexibile, trebuie apelată din funcția utilizator `ms_cst.m` (şi nu din procedura script `ex_2_4_7.m`). La rândul său, `ode45` necesită o funcție scrisă de utilizator, cu o structură

standard impusă, pentru a defini sistemul de ecuații diferențiale ce face obiectul integrării numerice, care, în cazul nostru concret, este denumită `xpms_cst.m` (denumirea provenind din abrevierea sintagmei "**X P**rim pentru **M**odel de **S**tare cu intrare **C**on**ST**antă pe intervale")

Apelarea funcției `ms_cst.m` dintr-o altă unitate de program MATLAB (cum ar fi, de exemplu, `ex_2_4_7.m` ce va fi prezentat mai jos), se realizează astfel:

```
[timp,udetimp,xdetimp,ydetimp]=ms_cst(A,bcol,clin,d,vect_ms,vecu_ms,x0);
```

Parametrii de intrare necesari pentru apelul funcției `ms_cst.m` au următoarele semnificații:

`A` – matrice pătrată de ordin *n*, conținând coeficienții matricei **A** (2.4.7) din ecuația de stare (2.4.3).

`bcol` - vector coloană de dimensiune *n*, conținând coeficienții vectorului **b** (2.4.8) din ecuația de stare (2.4.3).

`clin` vector linie de dimensiune *n*, conținând coeficienții vectorului $\mathbf{c}^T$ (2.4.9) din ecuația de ieşire (2.4.4).

`d` - constantă corespunzând coeficientului *d* din ecuația de ieşire (2.4.4).

`vect_ms` - vector linie cu *r* componente $[t_1 \cdots t_r]$, precizând extremitățile din dreapta ale celor *m* intervale de timp pentru care mărimea de intrare *u* ia câte o valoare constantă diferită (specificată cu ajutorul vectorului `mvecu_ms`). Momentul de timp corespunzător începutului simulării este 0. Valorile $t_1 < \cdots < t_r$ trebuie să fie în secvență strict crescătoare.

`vecu_ms` - vector linie cu *r* componente $[u_1 \cdots u_r]$, precizând valorile intrării *u* pe fiecare din cele *m* intervale de timp definite cu ajutorul vectorului `vect_ms`.

`x0` – vector coloană cu *n* componente conținând condițiile inițiale **x**(0) (2.4.6) aferente ecuației de stare (2.4.3).

Parametrii de ieşire returnați de funcția `ms_cst.m`, în urma apelului acesteia, au următoarele semnificații:

`timp` – vector linie, precizând momentele de timp la care sunt calculate valorile numerice ale stării **x**(*t*) şi ale ieşirii **y**(*t*), corespunzătoare modelului (2.4.3), (2.4.4). Momentele de timp colectate în vectorul `timp` sunt stabilite automat (din rațiuni de precizie a calculului numeric) de către funcția MATLAB `ode45`, deci dimensiunea vectorului `timp` nu poate fi cunoscută apriori.

`udetimp` – vector linie, precizând valorile intrării *u* la momentele din vectorul `timp`.

`xdetimp` – matrice cu *n* linii, ale cărei coloane precizează valorile vectorului de stare **x**(*t*) la momentele din vectorul `timp`.

`ydetimp` – vector linie, precizând valorile ieşirii **y**(*t*) la momentele din vectorul `timp`.

Subliniem faptul important că modul de construire a funcției `ms_cst.m` ilustrează tratarea corectă (din punctul de vedere al acurateței calculelor) a situațiilor când *mărimea de intrare prezintă discontinuități* în raport cu variabila temporală. De aceea, în funcția `ms_cst.m`, integrarea numerică este condusă, separat, pe fiecare interval de continuitate a mărimii de intrare, iar în punctele de discontinuitate ale mărimii de intrare, starea finală corespunzătoare intervalului precedent devine stare inițială pentru intervalul curent.

În cele ce urmează, furnizăm codul sursă MATLAB al funcției `ms_cst.m`, ce poate fi folosit drept exemplu pentru proiectarea şi implementarea unei funcții utilizator destinată integrării numerice a unui sistem de ecuații diferențiale cu ajutorul lui `ode45`.

```
function [timp,udetimp,xdetimp,ydetimp]=...
   ms_cst(A,bcol,clin,d,vect_ms,vecu_ms,x0);
```

```
%
% function [timp,udetimp,xdetimp,ydetimp]=...
% ms_cst(A,bcol,clin,d,vect_ms,vecu_ms,x0);
%
% Functie utilizator care calculeaza raspunsul
% starii si al iesirii unui sistem descris
% printr-un model liniar intrare-stare-iesire de forma:
% x'(t)=A*x(t)+bcol*u(t) - in textul lucrarii (2.4.3),
% y(t)=clin*x(t)+d*u(t) - in textul lucrarii (2.4.4),
% la o succesiune de r trepte de amplitudini u1, u2,...,ur,
% aplicate pe intervalele de timp [0,t1), [t1,t2),...,[t(r-1),tr].
%
% Pentru efectuarea integrarii numerice,
% apeleaza functia MATLAB "ode45",
% pentru care se construieste functia utilizator "xpms_cst.m".
%
% Transmiterea unor informatii catre functia utilizator "xpms_cst.m"
% se realizeaza prin variabile declarate de tip global.
%
% Intrari:  A, bcol, clin, d,
%           vect_ms=[t1 t2 .... tr],
%           vecu_ms=[u1 u2 .... ur],
%           x0.
%
% Iesiri:   timp, udetimp, xdetimp,  ydetimp.

% Variabile declarate global pentru a fi transmise
% functiei utilizator "xpms_cst.m".
global t u alfa beta j
%
t=vect_ms;
u=vecu_ms;
alfa=A;
beta=bcol;
%
% Initializarea variabilelor de lucru:
t=[0 t];
x(:,1)=x0;
%
% Initializarea variabilelor ce reprezinta parametrii de iesire:
timp=[];
udetimp=[];
xdetimp=[];
%
% Progresul integrarii numerice este asigurat pe fiecare
% interval de timp [0,t1), [t1,t2),...,[t(r-1),tr] in parte,
```

```
% contorizand numarul intervalelor.
% Determinarea numarului de intervale de timp:
nrint=length(u); % calculul lui r;
for j=1:nrint
   tini=t(j); % inceputul intervalului curent;
   tfin=t(j+1); % sfarsitul intervalului curent;
   xini=x(:,j); % conditia initiala pentru intervalul curent;
   % Apelul functiei MATLAB "ode45" pentru intervalul curent
   % (corespunzator ecuatiei de stare (2.4.3)):
   [twork,xwork]=ode45('xpms_cst',tini,tfin,xini);
   % Crearea unui vector cu toate elementele egale cu
   % valoarea intrarii pentru intervalului curent;
   % numarul de elemente este egal cu numarul de momente de timp
   % generate automat de functia "ode45":
   uwork=u(j)*ones(1,length(twork));
   % Construirea primilor trei parametri de iesire,
   % prin adaugarea informatiilor corespunzatoare
   % intervalului curent de timp:
   timp=[timp twork']; % timp;
   udetimp=[udetimp uwork]; % intrare;
   xdetimp=[xdetimp xwork']; % stare;
   % pregatirea conditiei initiale pentru urmatorul interval:
   x(:,j+1)=(xwork(length(twork),:))';
end
%
% Construirea celui de al patrulea parametru de iesire,
% (corespunzator ecuatiei iesirii (2.4.4)),
% prin utilizarea informatiilor obtinute
% pe intreaga durata a simularii:
ydetimp=clin*xdetimp+d*udetimp;
```

În apelarea funcției MATLAB `ode45`, pentru parametrul denumit `tol` (toleranța admisă în calcularea numerică a soluției) s-a folosit valoarea implicită a acestuia de 10^{-6}, motiv pentru care acest parametru nu mai figurează în secvența de apel.

Înlocuirea, în secvența de apel a lui `ode45`, a numelui `ode45` cu numele `ode23` (păstrând neschimbați parametrii de apel) ar face ca funcția utilizator `ms_cst.m` să efectueze integrarea numerică bazându-se pe funcția MATLAB `ode23`.

În continuare, prezentăm şi codul sursă MATLAB al funcției utilizator `xpms_cst.m` care defineşte membrul drept al sistemului de ecuațiilor diferențiale ce fac obiectul integrării numerice cu `ode45`. Această funcție rămâne neschimbată în cazul utilizării lui `ode23` în loc de `ode45`. Deoarece funcția utilizator `xpms_cst.m` trebuie să aibă o structură standard impusă, unele variabile din funcția utilizator `ms_cst.m` sunt transmise către rutina utilizator `xpms_cst.m` prin declararea lor de tip "global".

```
function xdot=xpms_cst(twork,xwork)
%
% function xdot=xpms_cst(twork,xwork)
%
```

```
% Functie utilizator (cu structura standard impusa)
% apelata de functia MATLAB "ode45"
% in cadrul functiei utilizator "ms_cst.m",
% pentru a defini membrul drept al sistemului de ecuatii diferentiale.

% Variabile declarate global pentru a fi primite
% de la functia utilizator "xpms_cst.m":
global t u alfa beta j;
%
% Membrul drept al sistemului de ecuatii diferentiale
% se defineste separat, pe fiecare interval de timp
% [0,t1), [t1,t2),...,[t(r-1),tr] in parte,
% deoarece difera valoarea marimii de intrare.
xdot=alfa*xwork + beta*u(j); % derivata functiei vectoriale x(t);
%
end
```

Pentru a realiza o imagine completă asupra facilităţilor oferite de mediul MATLAB pentru simularea funcţionării circuitului electric din Exemplului 2.4.7 (facilităţi ce includ nu numai efectuarea integrării numerice, ci şi reprezentarea grafică a rezultatelor), în continuare vom prezenta şi codul sursă al procedurii de tip script `ex_2_4_7.m`:

```
% ex_2_4_7.m
% fisier script care
% simuleaza functionarea circuitului electric din Exemplul 2.4.7
% si realizeaza reprezentarile grafice din fig. 2.4.4 (a) si (b).
%
% Valorile elementelor ce intra in structura circuitului:
R=2000; % rezistenta;
L=0.025; % inductanta;
C=1e-7; % capacitatea;
% Valorile constante pe intervale ale semnalului de intrare:
vecu_ms=[2]; % tensiune - o singura valoare;
% Momentele de timp corespunzatoare extremitatilor din dreapta
% ale intervalelor pe care intrarea ia valori diferite,
% simularea incepand la momentul 0:
vect_ms=[1e-3]; % moment de timp - o singura valoare;
%
% Constructia modelului intrare-stare-iesire (2.4.3)&(2.4.4).
% Definirea matricei patrate A (2.4.7)
% din ecuatia de stare (2.4.3):
A=[0 1/C;-1/L -R/L];
% Definirea vectorului coloana b (2.4.8)
% din ecuatia de stare (2.4.3):
bcol=[0;1/L];
% Definirea vectorului linie c_transpus (2.4.9)
% din ecuatia de iesire (2.4.4):
clin=[-1 -R];
```

```
% Definirea constantei d (2.4.7)
% din ecuatia de iesire (2.4.4):
d=1;
% Definirea conditiei initiale x(0)(2.4.5)
% pentru vectorul de stare x(t) din ecuatia de stare (2.4.3):
x0=[0;0];
%
% Calculul si afisarea valorilor proprii ale matricei A:
eig(A)
% Pauza pana la apasarea unei taste.
pause
%
% Efectuarea simularii prin apelul functiei ms_cst.m
% construita de utilizator:
[timp,udetimp,xdetimp,ydetimp]=...
   ms_cst(A,bcol,clin,d,vect_ms,vecu_ms,x0);
%
% Reprezentarea grafica a rezultatelor simularii (figura 2.4.4).
% Fig. 2.4.4(a) - Plotarea evolutiei variabilelor de stare:
figure(1); % accesarea primei ferestre - pentru fig. 2.4.4(a);
clg; % stergere (daca fereastra exista deja si contine informatii);
% plotarea primei variabile de stare - aria superioara;
subplot(211),plot(timp,xdetimp(1,:),'w');
grid; % trasarea grilei;
xlabel('timp [s]'); % informatii referitoare la axa Ox;
ylabel ('tensiune condensator [V]'); % informatii referitoare la axa Oy;
% plotarea celei de a doua variabile de stare - aria inferioara;
subplot(212),plot(timp,xdetimp(2,:),'w');
grid; % trasarea grilei;
xlabel('timp [s]'); % informatii referitoare la axa Ox;
ylabel ('curent bobina [A]'); % informatii referitoare la axa Oy;
% Pauza pana la apasarea unei taste
pause;
%
% Fig. 2.4.4(b) - Plotarea evolutiei variabilei de iesire:
figure(2); % accesarea celei de a doua ferestre - pentru fig. 2.4.4(b);
clg; % stergere (daca fereastra exista deja si contine informatii);
plot(timp,ydetimp,'w'); % plot variabila de iesire;
grid; % trasarea grilei;
xlabel('timp [s]'); % informatii referitoare la axa Ox;
ylabel('tensiune bobina [V]'); % informatii referitoare la axa Oy;
```

În procedura de tip script `ex_2_4_7.m` nu au fost utilizate informațiile furnizate de funcția `ms_cst.m` prin intermediul parametrului `udetimp`, dar într-un context mai general existența acestui parametru de ieşire poate fi necesară, motiv pentru care a şi fost luat în considerare la proiectarea funcției `ms_cst.m`.

Exemplul 8.3.6.

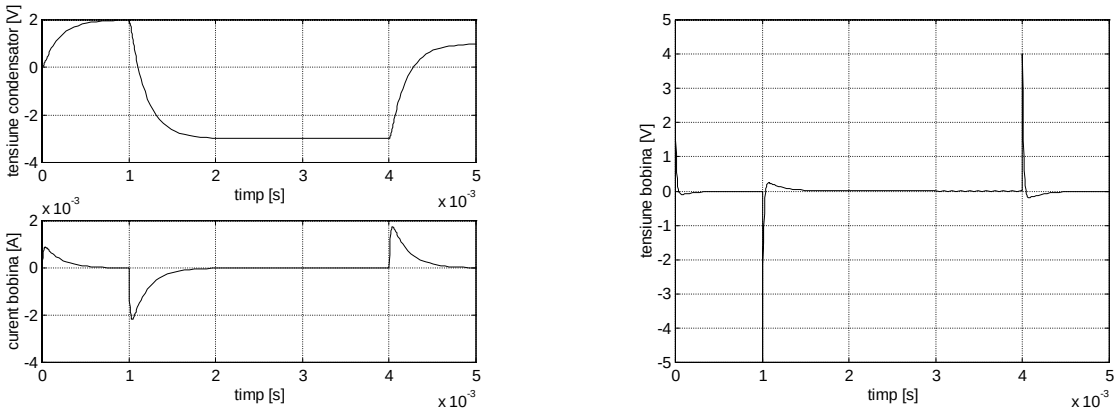
Ne plasăm în acelaşi context experimental ca în Exemplul 2.4.7 din Capitolul 2, numai că ne interesează simularea comportării circuitului electric din Exemplul 2.4.7 pentru următorul semnal de intrare de tip funcţie scară:

$$u(t)=\begin{cases}2\,\mathrm{V}, & 0\le t<10^{-3};\\ -3\,\mathrm{V}, & 10^{-3}\le t<4\cdot10^{-3};\\ 1\,\mathrm{V}, & 4\cdot10^{-3}\le t\le 5\cdot10^{-3}.\end{cases}$$

Utilizarea procedurii `ex_2_4_7.m`, în care se modifică următoarele două atribuiri:

```
vecu_ms=[2 -3 1];
vect_ms=[1e-3 4e-3 5e-3];
```

permite efectuarea acestei simulări, conducând la reprezentările grafice din fig. 8.3.2.



(a) **(b)**

Fig. 8.3.2. Răspunsul circuitului din Exemplul 2.4.7 la semnalul de intrare de tip funcţie scară considerat în Exemplul 8.3.6.: **(a)** evoluţia variabilelor de stare (prima variabilă - fereastra superioară; a doua variabilă - fereastra inferioară); **(b)** evoluţia variabilei de ieşire.

Exemplul 8.3.7.

Pe aceleaşi principii ca cele ilustrate în Exemplul 8.3.5, poate fi implementată o funcţie utilizator care să apeleze oricare dintre funcţiile MATLAB de tip built-in `euler`, `rk23`, `rk45`, `adams`, `gear`, `linsim`, în scopul efectuării integrării numerice (sub rezerva adecvanţei metodei pentru problema care se rezolvă). Modul de apel al acestor funcţii diferă de modul de apel al lui `ode45` sau `ode23`. Totodată, pentru a primi informaţiile concrete cuvenite despre dinamica sistemului ce face obiectul simulării, funcţionarea oricăreia din cele cinci rutine enumerate mai sus se bazează pe apelarea unei funcţii utilizator de tip "S-function", cu structură standard impusă (care diferă de structura impusă funcţiilor utilizator apelabile de `ode45` sau `ode23`). Din aceste raţiuni, considerăm deosebit de utilă prezentarea de mai jos a codurilor sursă pentru procedura `ms_cst_s.m` care foloseşte `rk45`, precum şi a funcţiei utilizator `ms_s_fun.m` de tip "S-function" pe care o necesită rk45. Cititorul va putea astfel să dezvolte o comparaţie relevantă între această soluţie software şi cea prezentată în Exemplul 8.3.5, care se baza pe utilizarea `ode45`. Reamintim faptul că atât `ode45`, cât şi `rk45` utilizează aceeaşi metodă de integrare numerică.

Procedura `ms_cst_s.m` posedă aceiaşi parametri de intrare şi ieşire ca şi `ms_cst.m` pe care am descris-o în Exemplul 8.3.5, ceea ce permite un mod de apelare identic. De pildă, referindu-ne la unitatea de program de tip script `ex_2_4_7.m` (discutată mai sus), înlocuirea numelui `ms_cst` cu numele `ms_cst_s` este singura modificare ce trebuie făcută. De asemenea, organizarea internă s-a păstrat, în principiu, aceeaşi, cu *modificările aferente* apelării lui `rk45`. Numele `rk45` poate fi înlocuit cu numele oricăreia din celelalte funcţii MATLAB amintite anterior (`euler`, `rk23`, `adams`, `gear`, `linsim`), fără nici o altă schimbare în sintaxa apelului, sub rezerva adecvanţei metodei de integrare.

```
function [timp,udetimp,xdetimp,ydetimp]=...
   ms_cst_s(A,bcol,clin,d,vect_ms,vecu_ms,x0);
%
% function [timp,udetimp,xdetimp,ydetimp]=...
% ms_cst_s(A,bcol,clin,d,vect_ms,vecu_ms,x0);
%
% Functie utilizator care calculeaza raspunsul
% starii si al iesirii unui sistem descris
% printr-un model liniar intrare-stare-iesire de forma:
% x'(t)=A*x(t)+bcol*u(t) - in textul lucrarii (2.4.3),
% y(t)=clin*x(t)+d*u(t) - in textul lucrarii (2.4.4),
% la o succesiune de r trepte de amplitudini u1, u2,...,ur,
% aplicate pe intervalele de timp [0,t1), [t1,t2),...,[t(r-1),tr].
%
% Pentru efectuarea integrarii numerice,
% apeleaza functia MATLAB built-in "rk45",
% pentru care se construieste functia utilizator "ms_s_fun.m".
%
% Utilizarea altei metode de integrare presupune inlocuirea
% functiei MATLAB built-in "rk45" cu una din urmatoarele
% functii MATLAB built-in "euler","rk23","adams","gear"
% (sub rezerva adecvantei metodei de integrare),
% parametrii de apel ramanand identici.
%
% Transmiterea unor informatii catre functia utilizator "ms_s_fun.m"
% se realizeaza prin variabile declarate de tip global.
%
% Intrari:  A, bcol, clin, d,
%           vect_ms=[t1 t2 .... tr],
%           vecu_ms=[u1 u2 .... ur],
%           x0.
%
% Iesiri:   timp, udetimp, xdetimp, ydetimp.

% Variabile declarate global pentru a fi transmise
% functiei utilizator "ms_s_fun.m".
global alfa beta gamma delta star_in
%
```

```
alfa=A;
beta=bcol;
gamma=clin;
delta=d;
star_in=x0;
%
% Initializarea variabilelor de lucru:
v_t=[0 vect_ms];
v_x(:,1)=x0;
%
% Initializarea variabilelor ce reprezinta parametri de iesire:
timp=[];
udetimp=[];
xdetimp=[];
ydetimp=[];
%
% Progresul integrarii numerice este asigurat pe fiecare
% interval de timp [0,t1), [t1,t2),...,[t(r-1),tr] in parte,
% contorizand numarul intervalelor.
% Determinarea numarului de intervale:
nrint=length(vecu_ms);
for j=1:nrint
   tini=v_t(j); % inceputul intervalului curent;
   tfin=v_t(j+1); % sfarsitul intervalului curent;
   xini=v_x(:,j); % conditia initiala pentru intervalul curent;
   ut=[tini vecu_ms(j);tfin vecu_ms(j)]; % intrare constanta;
   % Apelul functiei MATLAB "rk45" pentru intervalul curent
   % (vezi comentariile privind utilizarea altei functii):
   [twork,xwork,ywork]=rk45('ms_s_fun',[tini tfin],xini,[],ut);
   % Crearea unui vector cu toate elementele egale cu
   % valoarea intrarii pentru intervalului curent;
   % numarul de elemente este egal cu numarul de momente de timp
   % generate automat de functia "rk45":
   uwork=vecu_ms(j)*ones(1,length(twork));
   % Construirea parametrilor de iesire,
   % prin adaugarea informatiilor corespunzatoare
   % intervalului curent de timp:
   timp=[timp twork']; % timp;
   udetimp=[udetimp uwork]; % intrare;
   xdetimp=[xdetimp xwork']; % stare;
   ydetimp=[ydetimp ywork']; % iesire;
   % pregatirea conditiei initiale pentru urmatorul interval:
   v_x(:,j+1)=(xwork(length(twork),:))';
end
```

În apelul lui `rk45` s-au utilizat valorile implicite pentru elementele de control al integrării numerice (ce sunt modificabile prin intermediul vectorului `options`), motiv pentru

care penultimul parametru de intrare este `[]`. Utilizarea acestor valori a fost posibilă datorită faptului că problema rezolvată nu prezintă dificultăți numerice. Cu această setare implicită `[]` pot fi apelate, de exemplu, `rk23`, `linsim` sau `adams`, dar nu şi `euler` (care necesită intervenția utilizatorului pentru setarea vectorului `options`).

Funcția utilizator `ms_s_fun.m` a fost concepută după principiile standard impuse de arhitectura de tip "S-function" şi diferă esențial de structura funcției utilizator `xpms_cst.m` prezentată în Exemplul 8.3.5.

```
function [sys, x0] = ms_s_fun(t,x,u,flag)
%
% function [sys, x0] = ms_s_fun(t,x,u,flag)
%
% Functie utilizator (cu structura standard impusa de S-function)
% apelata de functia MATLAB built-in "rk45"
% in cadrul functiei utilizator "ms_cst_s.m",
% pentru a defini un model intrare-stare-iesire, continuu in timp.
%
% Functia poate fi utilizata de oricare din functiile MATLAB,
% de tip built-in, "euler", "rk23", "rk45", "adams", "gear",
% sub rezerva adecvantei metodei.

% Variabile declarate global pentru a fi primite
% de la functia utilizator "xpms_cst_s.m":
global alfa beta gamma delta star_in
%

% Organizarea specifica de S-Function:
if abs(flag)==1
   sys=alfa*x+beta*u; % derivatele vectorului de stare;
elseif flag==3
   sys=gamma*x+delta*u; % iesirea sistemului;
elseif flag==0
   sys=[length(alfa),0,1,1,0,0]; % dimensiunile parametrilor modelului;
   x0=star_in; % starea initiala;
else
   sys=[];
end
```

Funcția utilizator `ms_s_fun.m` se păstrează neschimbată în cazul folosirii oricăreia din celelalte funcții MATLAB amintite anterior (`euler`, `rk23`, `adams`, `gear`, `linsim`).

8.4. Utilizarea mediului SIMULINK în simularea sistemelor descrise prin scheme bloc

Simulatorul denumit SIMULINK se înscrie în clasa simulatoarele ce permit descrierea sistemelor prin scheme bloc (SIMULINK, 1996). Astfel de simulatoare prezintă avantajul unei mari flexibilități în utilizare, datorită posibilității de conectare a mai multor blocuri într-o entitate unică, pentru care se realizează simularea. SIMULINK este integrat în MATLAB, ceea ce îi conferă accesul la resursele algoritmice şi computaționale ale acestuia din urmă, constituind, astfel, unul din mediile de dezvoltare software dedicate calculelor tehnico-ştiințifice cu o foarte largă răspândire pe plan mondial.

SIMULINK pune la dispoziție biblioteci de blocuri dedicate, concepute după principiul “pre-designed modules”, care sunt adaptabile cu maximă uşurință obiectivelor concrete ale utilizatorului. Filozofia de programare grafică "drag and drop" (extrage şi plasează) ce stă la baza SIMULINK asigură simplitatea modului de definire a aplicațiilor şi flexibilitatea organizării experimentelor de simulare, prin reducerea substanțială a efortului de programare. Această simplificare majoră a activității propriu-zise de programare nu se face în detrimentul complexității structurii sistemelor a căror funcționare utilizatorul doreşte să o simuleze, datorită capacității blocurilor SIMULINK de a acoperi o arie largă de probleme tipice. Mai mult chiar, mediul SIMULINK a fost conceput de aşa manieră încât, principial vorbind, poate fi întrebuințat şi în condițiile necunoaşterii unui limbaj de programare.

Pentru a asigura o accesibilitate cât mai mare a textului acestei secțiuni, toți termenii care se referă la utilizarea nemijlocită a mediului MATLAB sunt scrişi cu fontul deja introdus în secțiunea precedentă, iar pentru termenii care se referă la dialogul cu SIMULINK sau la facilitățile oferite de acesta, se va folosi un alt font, de asemenea diferit de cel al textului curent.

8.4.1. Lansarea simulatorului SIMULINK

Programul SIMULINK constituie o extensie pentru pachetul MATLAB şi poate fi exploatat numai ca aplicație WINDOWS. Principalul avantaj îl reprezintă posibilitatea operării cu blocuri, al căror mod de conectare este precizat cu ajutorul unei interfețe grafice, performante.

Pentru lansarea SIMULINK se parcurg următoarele etape:

- se activează MATLAB, ca aplicație WINDOWS;
- din fereastra MATLAB, se lansează programul SIMULINK, prin introducerea (pe prompterul MATLAB "»") a comenzii `simulink`.

În urma acestor operații, este deschisă fereastra SIMULINK care permite accesul la o bibliotecă de blocuri standard (sau bibliotecă de blocuri SIMULINK).

Închiderea ferestrei MATLAB atrage în mod automat şi închiderea ferestrei SIMULINK, dar nu şi invers.

8.4.2. Construcţia modelului de simulare sub formă de schemă bloc

Construcția unui model de simulare necesită parcurgerea următoarelor etape:

- *Deschiderea ferestrei de lucru* SIMULINK (care este diferită de fereastra de lucru MATLAB ce a fost deschisă anterior). Se realizează din meniul **File** al ferestrei SIMULINK, cu opțiunea **New**.
- *Aducerea în fereastra de lucru a blocurilor necesare din biblioteca SIMULINK*. Biblioteca SIMULINK este organizată în mai multe grupuri de blocuri, fiecare din aceste grupuri posedând o pictogramă (*eng.* icon) separată în fereastra SIMULINK (**Sources, Sinks, Discrete, Linear, Nonlinear, Connections, Extras**), conform fig.8.4.1. Prin accesarea unui anumit grup (prin dublă punctare pe pictograma respectivă, cu butonul din stânga al mouse-ului), se deschide fereastra aferentă grupului, care conține blocuri ce pot fi deplasate, din fereastra grupului, în fereastra de lucru.

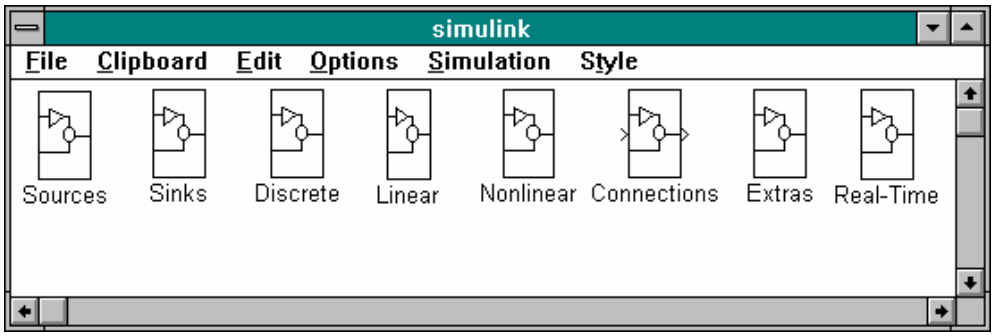


Fig. 8.4.1. Fereastra SIMULINK

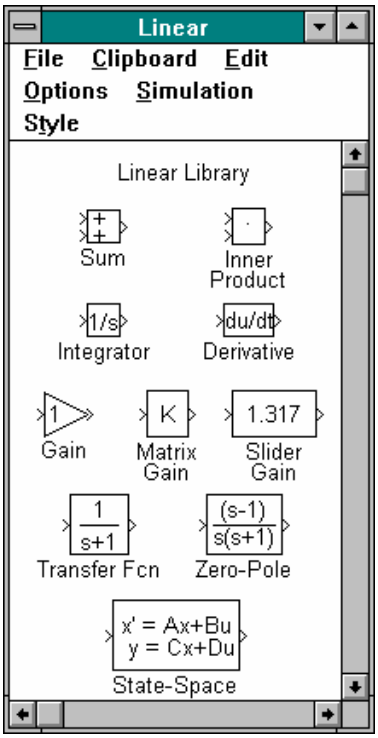


Fig.8.4.2. Fereastra grupului **Linear** (care conține blocuri liniare)

În fig.8.4.2 se prezintă, drept exemplu, fereastra corespunzătoare grupului de blocuri liniare, care se deschide prin dubla punctare a pictogramei **Linear** din fereastra SIMULINK. Aducerea unui bloc în fereastra de lucru presupune selectarea acestuia în fereastra grupului (apăsând butonul din stânga al mouse-ului) şi apoi deplasarea propriu-zisă în fereastra de lucru (ținând butonul din stânga al mouse-ului apăsat).

- *Manevrarea blocurilor în fereastra de lucru*. Orice bloc din fereastra de lucru poate fi deplasat, multiplicat, şters sau rotit. Pentru aceasta, mai întâi, blocul în cauză se va selecta prin apăsarea butonului din stânga al mouse-ului. Pentru deplasare se va ține butonul din stânga al mouse-ului apăsat. Pentru multiplicare se va ține butonul din dreapta al mouse-ului apăsat. Pentru ştergere se va folosi tasta **Delete**. Pentru rotire se va folosi comanda **Rotate** din meniul **Options** al ferestrei de lucru. Deselectarea unui bloc selectat se realizează prin punctare (cu butonul din stânga al mouse-ului) în afara blocului selectat.
- *Conectarea blocurilor*. Conexiunile între blocuri se

realizează cu ajutorul cursorului grafic, care se deplasează ținând butonul din stânga al mouse-ului apăsat. Conectarea oricărui bloc se face prin intermediul săgeților din reprezentarea sa grafică, semnificând accesul semnalului (semnalelor) de intrare, respectiv ieşire. Traseele de conectare pot fi realizate ca un singur segment de dreaptă sau ca o juxtapunere de segmente, trasate sub unghiuri diferite (sub formă de linie frântă).

- *Ştergerea traseelor de conectare*. Orice traseu poate fi şters cu tasta **Delete**, după ce, mai întâi, a fost selectat (prin punctare, cu butonul din stânga al mouse-ului).
- *Specificarea parametrilor unui bloc din schemă*. Fiecare bloc adus din biblioteca SIMULINK în fereastra de lucru posedă un set de valori implicite ale parametrilor asociați blocului. Pentru introducerea valorilor curente ale parametrilor asociați unui anumit bloc din fereastra de lucru se deschide cutia de dialog a blocului respectiv prin dubla punctare a blocului cu butonul din stânga al mouse-ului. După introducerea valorilor curente pentru parametrii blocului, cutia de dialog se închide apăsând butonul **OK** al acestei cutii (cu ajutorul mouse-ului). În câmpurile cutiei de dialog se pot utiliza şi nume de variabile MATLAB, ale căror valori numerice trebuie să fie precizate în spațiul de lucru MATLAB, când se startează simularea (deci nu neapărat în momentul construirii modelului SIMULINK).

8.4.3. Surse de semnale şi blocuri de vizualizare pentru un model SIMULINK

Un model SIMULINK reproduce schema bloc a sistemului studiat. Precizarea unui anumit semnal (anumitor semnale) de intrare se realizează aducând, în fereastra de lucru, din biblioteca SIMULINK (grupul **Sources**) blocul corespunzător sursei de semnal adecvate aplicației de simulare. Manevrarea, conectarea şi setarea valorilor parametrilor unui bloc sursă se realizează conform celor prezentate în paragraful 8.4.2.

Reprezentarea grafică a semnalului (semnalelor) de ieşire se realizează cu ajutorul unor dispozitive de vizualizare **Scope** care se află în biblioteca SIMULINK (grupul **Sinks**). Manevrarea, conectarea şi setarea valorilor parametrilor unui bloc **Scope** se realizează conform celor prezentate în paragraful 8.4.2. Pe parcursul execuției simulării, fiecărui bloc **Scope** îi este afectată o fereastră care permite afişarea grafică.

Dacă mai multe semnale se doresc a fi afişate pe acelaşi dispozitiv de vizualizare **Scope**, ele vor fi conectate la dispozitivul de vizualizare printr-un bloc **Mux** (multiplexor) disponibil în biblioteca SIMULINK (grupul **Connections**).

De asemenea, semnalele de intrare pot fi generate în mediul MATLAB şi stocate în spațiul de lucru al acestuia, de unde se transmit către schema SIMULINK cu ajutorul unui bloc de tip **From Workspace**. Tot astfel, rezultatele unei simulări bazate pe o schemă SIMULINK (în particular, semnalele de ieşire) pot fi memorate direct în spațiul de lucru MATLAB, cu ajutorul unui bloc de tip **To Workspace**.

8.4.4. Salvarea, încărcarea şi actualizarea modelelor SIMULINK

Un model SIMULINK (incluzând sursele de semnal şi dispozitivele de vizualizare), nou creat în fereastra de lucru, se salvează (ca fişier cu extensia `.m`), din meniul **File** al ferestrei de lucru, cu opțiunea **Save as**.

Un model SIMULINK, existent ca fişier de tip `m`, se încarcă din meniul **File** al ferestrei SIMULINK, cu opţiunea **Open**.

Un model SIMULINK, existent ca fişier de tip `m`, după ce a fost încărcat, poate fi actualizat. Salvarea modelului SIMULINK actualizat se face cu meniul **File** al ferestrei de lucru, cu opţiunea **Save** (sub acelaşi nume) sau cu opţiunea **Save as** (sub un nume nou).

8.4.5. Execuţia simulării

Simularea se bazează pe integrarea numerică a unui set de ecuaţii diferenţiale, ataşat de către programul SIMULINK reprezentării grafice de tip schemă bloc. Modul de construcţie al acestor ecuaţii diferenţiale este transparent pentru utilizator, iar execuţia simulării este practic realizată de o rutină de integrare numerică a pachetului MATLAB. Din acest motiv, referirea corectă a mediului de simulare se face cu numele MATLAB-SIMULINK.

În acest context, mai amintim că pentru un model de tip SIMULINK poate fi construită o reprezentare de stare liniară în mici variaţii de tipul (2.6.20) şi (2.6.21), cu ajutorul funcţiei `linmod` apelată (în mediul MATLAB) cu numele fişierului ce conţine schema SIMULINK respectivă. În urma apelului, funcţia `linmod` returnează (în spaţiul de lucru MATLAB) matricele aferente unei atare reprezentări, conform principiilor liniarizării discutate în paragraful 2.6.2.

- Alegerea metodei de integrare se face din raţiuni numerice, ţinând cont de specificul dinamicii sistemului studiat. Selectarea unei anumite metode se face (înaintea startării simulării) din meniul **Simulation** al ferestrei de lucru, cu opţiunea **Parameters** care deschide cutia de dialog SIMULINK **Control Panel** - vezi fig.8.4.3.

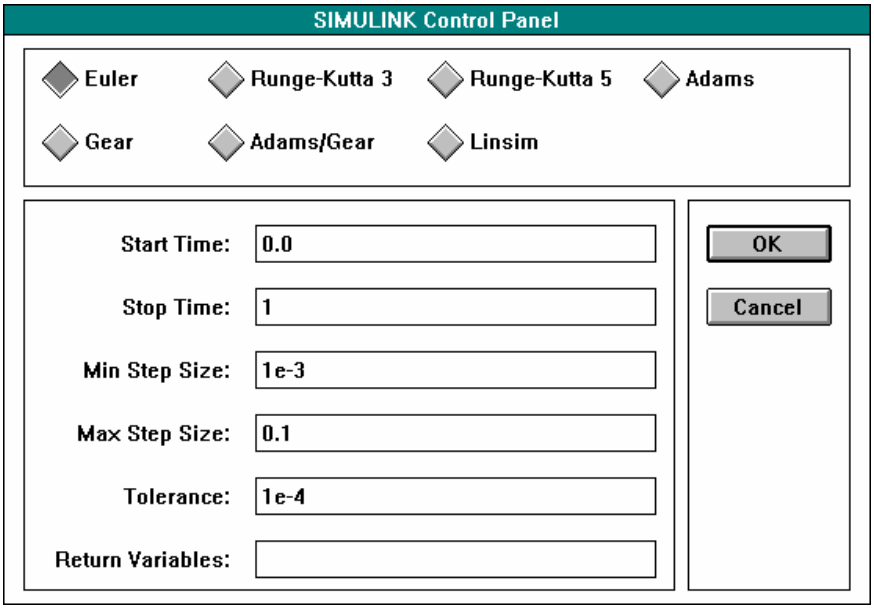


Fig.8.4.3. Cutia de dialog SIMULINK **Control Panel**

Efectuarea integrării numerice se realizează (transparent pentru utilizator) prin apelul funcţiilor (rutinelor) disponibile în MATLAB, care au fost prezentate în paragraful 8.3.4 din secţiunea 3 a capitolului curent. Corespondenţa dintre metodele de integrare selectabile din

SIMULINK **Control Panel** şi funcţiile MATLAB de tip built-in destinate integrării numerice este următoarea:

- **Euler** – apelează funcţia MATLAB `euler`;
- **Runge–Kutta 3** – apelează funcţia MATLAB `rk23`;
- **Runge–Kutta 5** – apelează funcţia MATLAB `rk45`;
- **Adams** – apelează funcţia MATLAB `adams`;
- **Gear** – apelează funcţia MATLAB `gear`;
- **Adams/Gear** – apelează fie funcţia MATLAB `adams`, fie funcţia MATLAB `gear`, permiţând comutarea automată de la una la cealaltă, în conformitate cu specificul problemei ca şi comportare de tip "stiff';

Linsim – apelează funcţia MATLAB `linsim`;.

Pe lângă metoda de integrare, tot din SIMULINK Control Panel se vor preciza valorile numerice ale parametrilor ce permit controlul integrării (ca interval de timp şi precizie numerică): **Start Time, Stop Time, Min Step Size, Max Step Size, Tolerance**. Semnificaţia parametrului Tolerance depinde de metoda de integrare numerică.

Închiderea cutiei de dialog se realizează cu butonul **OK**.

Startarea simulării se realizează din meniul **Simulation** al ferestrei de lucru, cu opţiunea **Start** (se presupune că toate câmpurile cutiei de dialog SIMULINK Control Panel au fost setate corespunzător, în prealabil).

Oprirea simulării (înaintea timpului specificat în SIMULINK Control Panel) se realizează din meniul **Simulation** al ferestrei de lucru, cu opţiunea **Stop**.

Exemplul 8.4.1.

Se consideră sistemul din Exemplul 5.5.3 a cărui schemă este reprezentată în fig. 5.5.10. Simularea sistemului folosind schema bloc construită în MATLAB – SIMULINK se poate realiza în condiţiile în care se consideră valori concrete ale parametrilor elementelor din bond-graph-ul sistemului. Pentru partea hidraulică s-a considerat că sursa de presiune furnizează o presiune de $9.2\cdot10^6$ N/m^2 (furnizată de exemplu, de o pompă cu palete), fluidul de lucru fiind uleiul hidraulic H20 (STAS 9691 – 80) având densitatea $\rho = 900$ kg/m^3 şi vâscozitatea dinamică $\mu = 54\cdot10^{-3}$ Ns/m^2 la temperatura de 20^{o}C. Între sursa de presiune şi cilindrul hidraulic uleiul este pompat printr-o conductă având lungimea $l = 1$ m şi diametrul interior $d = 0{,}02$ m. Cu aceste date, valoarea inductanţei fluidice a uleiului din conductă este

$$L_h = \frac{\rho \cdot l}{A_c} = 2.8648\cdot10^6 \text{ kg/m}^4,$$

în care A_c desemnează aria conductei. Valoarea rezistenţei fluidice a conductei este

$$R_h = \frac{128\mu l}{\pi d^4} = 1.3751\cdot10^7 \text{ kg/s}\cdot\text{m}^4.$$

Cilindrul hidraulic de la capătul conductei este unul tipizat şi are aria $A = 0.0491$ m^2.

Deplasarea pistonului spre dreapta este împiedicată de arcul elastic care are constanta elastică $k_e = 2.4\cdot10^3$ N/m. Totodată pistonul trebuie să deplaseze o masă de valoare $m = 10^5$kg, care întâmpină o forţă rezistentă proporţională cu viteza de tip frecare vâscoasă (valoarea

coeficientului de proporționalitate fiind $\gamma = 10^4$ N·s/m) şi asupra căreia mai acționează o forță constantă $F = 4.5 \cdot 10^5$N.

Schema bloc a acestui sistem cu valorile numerice de mai sus, realizată în mediul MATLAB-SIMULINK, este reprezentată în fig. 8.4.4, fiind construită în conformitate cu schema bloc generică din fig. 5.5.15. S-a considerat şi o a doua variabilă de ieşire, având semnificația de deplasare a masei, motiv pentru care s-a introdus încă un bloc de tip integrator.

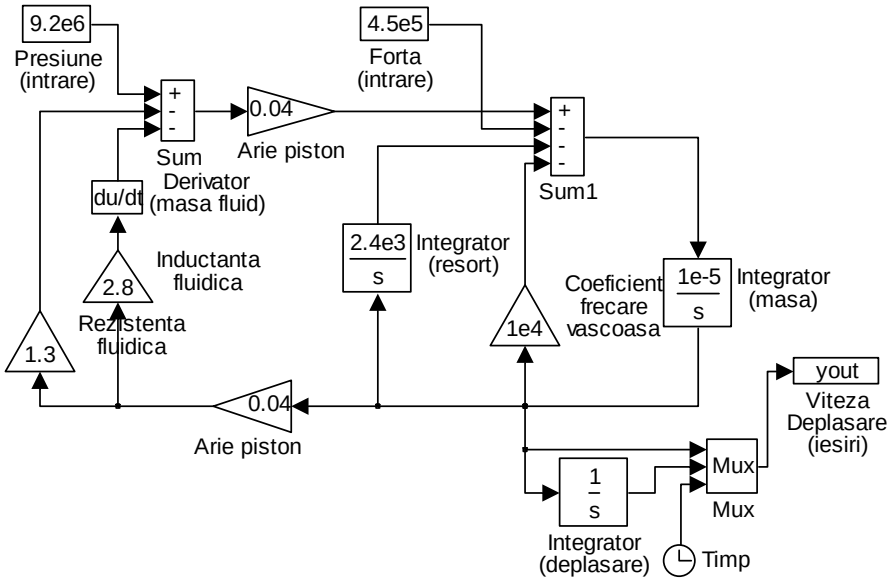
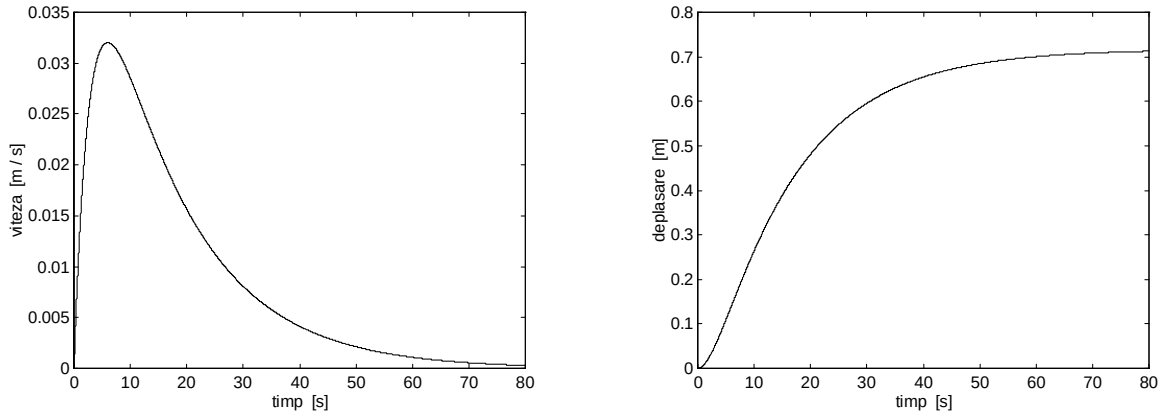


Fig. 8.4.4. Schema SIMULINK utilizată pentru studiul prin simulare al sistemului considerat în Exemplul 8.4.1

În urma simulării funcționării sistemului pentru intervalul de timp [0, 80] secunde, evoluția variabilelor de ieşire (viteza şi respectiv deplasarea masei) este cea reprezentată grafic în figura 8.4.5. (a) şi respectiv 8.4.5. (b). Trebuie menționat faptul că folosirea oricăreia dintre metodele de integrarea numerică **Runge-Kutta 5**, **Adams**, **Gear**, **Adams/Gear** şi **Linsim** conduce la rezultate identice.

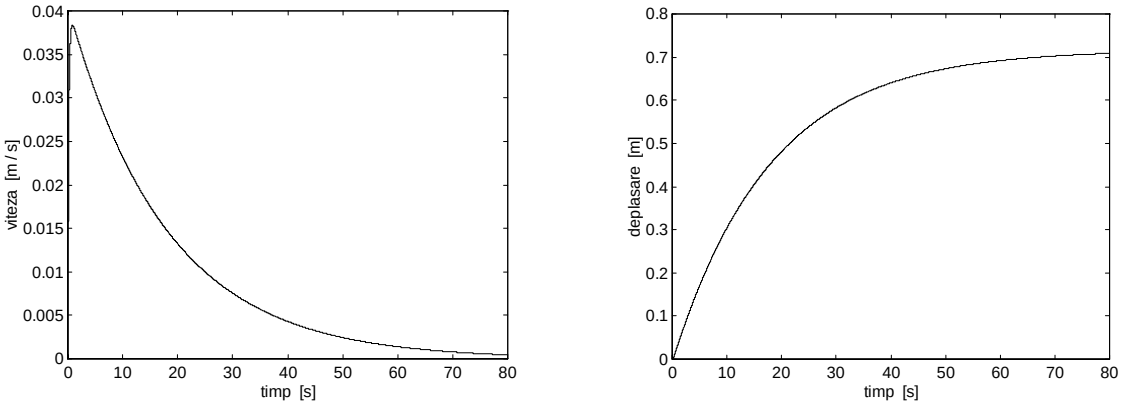


(a) **(b)**

Fig. 8.4.5. Rezultatele simulării în mediul MATLAB-SIMULINK a comportării sistemului considerat în exemplul 8.4.1: **(a)** viteza masei; **(b)** deplasarea masei.

Exemplul 8.4.2.

Considerăm sistemul studiat în Exemplul 8.4.1, pentru care valoarea masei deplasată de tija pistonului este de $m = 10^3$kg (adică de 100 de ori mai mică decât în Exemplul 8.4.1). Schema SIMULINK este aceeaşi ca în fig. 8.4.4., cu excepţia valorii atribuite constantei din blocul "`Integrator (masa)`", care se înlocuieşte cu `1e-3`. În urma simulării, se obţin reprezentările grafice pentru variabilele de ieşire (viteza şi respectiv deplasarea masei) reproduse în fig. 8.4.6(a) şi respectiv 8.4.6(b).



(a) **(b)**

Fig. 8.4.6. Rezultatele simulării în mediul MATLAB-SIMULINK a comportării sistemului considerat în exemplul 8.4.2: **(a)** viteza masei; **(b)** deplasarea masei.

Comparând reprezentările grafice din fig. 8.4.5(a) şi respectiv din fig. 8.4.6(a), se observă că accelerația masei (adică derivata vitezei) la începutul mişcării este mult mai mare în situația studiată în Exemplul 8.4.2 decât în situația studiată în Exemplul 8.4.1. Faptul este uşor explicabil prin aceea că în Exemplul 8.4.2 se consideră o masă de 100 de ori mai mică decât în Exemplul 8.4.1.

Spre deosebire de Exemplul 8.4.1, în exemplul curent se constată că pentru efectuarea simulării numerice pot fi utilizate numai metodele de integrare numerică **Gear** şi **Adams/Gear**, în timp ce **Runge-Kutta 5**, **Adams** şi **Linsim** eşuează. O primă explicație de natură intuitivă este legată tocmai de valorile acceleraţiei la începutul mişcării, care sunt calculate numeric de blocul cu acțiune pur derivativă. Calculul derivatei realizându-se aproximativ (prin evaluarea unui raport incremental), erorile ce afectează raportul incremental în Exemplul 8.4.2 sunt mult mai mari decât în Exemplul 8.4.1. O explicație riguroasă din perspectiva calculului numeric, se obține prin construirea *modelelor de stare liniare în mici variații* de forma (2.6.20) şi (2.6.21), cu ajutorul funcției `linmod` apelată pentru schema SIMULINK din Exemplul 8.4.1 şi respectiv din Exemplul 8.4.2. Ecuația de stare obținută pentru Exemplul 8.4.1 are o comportare *stiff moderată*, valorile proprii aferente matricei Jacobian rezultate din liniarizare fiind `0, -0.3659, -0.0656`, ceea ce permite utilizarea funcțiilor **Runge-Kutta 5**, **Adams** şi **Linsim** (a se vedea şi comentariile din paragraful 8.2.7). În schimb, ecuația de stare obținută pentru Exemplul 8.4.2 are o comportare *stiff dură*, autovalorile aferente matricei Jacobian rezultate din liniarizare fiind `0, -43.0954, -0.0557`, ceea ce impune numai utilizarea funcțiilor bazate pe algoritmi de tip Gear.

Înlocuirea blocului cu acțiune derivativă pură "`Derivator (masa fluid)`" din fig. 8.4.4 printr-un *bloc liniar* cu funcția de transfer `s/(0.02s+1)` *care aproximează operația de*

derivare, permite utilizarea tuturor metodelor de integrare numerică menţionate în Exemplul 8.4.1. Această soluţie de modificare a schemei SIMULINK este prezentată în fig. 8.4.7.

Prin construirea modelului de stare liniar în mici variaţii de forma (2.6.20) şi (2.6.21), cu ajutorul funcţiei `linmod` apelată pentru schema SIMULINK din fig. 8.4.7, ecuaţia de stare are o comportare stiff moderată, valorile proprii aferente matricei Jacobian rezultate din liniarizare fiind `0, -433.4934, -4.9258, -0.0562`. Rezultatele simulării nu mai sunt reproduse în cadrul textului, deoarece ele coincid cu reprezentările grafice din fig. 8.4.6.

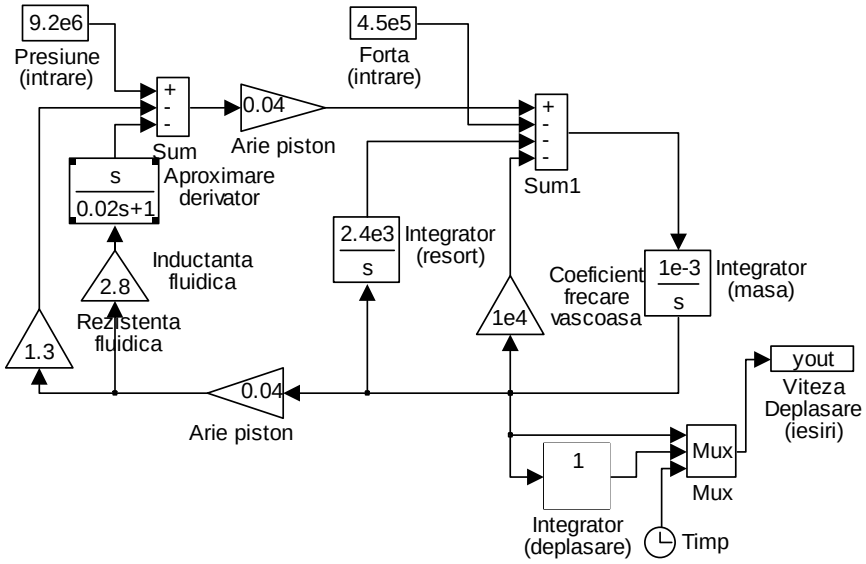


Fig.8.4.7. Schema SIMULINK utilizată pentru studiul prin simulare al sistemului considerat în Exemplul 8.4.2, în care blocul cu acţiune de derivare pură din fig. 8.4.4 este înlocuit printr-un bloc liniar cu funcţia de transfer `s/(0.02s+1)` care aproximează operaţia de derivare

În legătură cu utilizarea blocului liniar cu funcţia de transfer `s/(0.02s+1)` în schema SIMULINK din fig. 8.4.7, facem precizarea că aproximarea operaţiei de derivare se poate justifica imediat prin compararea diagramei Bode a acestui bloc cu diagrama Bode a unui derivator pur - pentru detalii privind diagramele Bode se pot consulta manuale de automatică, cum ar fi, de exemplu (Ionescu, 1985) sau (Voicu, 1998). Alegerea coeficientului `0.02` la numitorul funcţiei de transfer de mai sus s-a realizat în ideea că acesta are semnificaţia unei constante de timp ce trebuie să fie mult mai mică decât constantele de timp proprii dinamicii sistemului studiat, pentru a nu-i altera comportarea.

8.5. Construirea automată a modelelor în mediul MATLAB folosind software-ul KALIBOND

Deşi MATLAB este un mediu foarte mult utilizat pentru analiza, proiectarea şi simularea sistemelor atât în practica inginerească cât şi în învăţământ, totuşi el nu conţine un set de programe (tool-box) care să permită modelarea directă cu metoda bond-graph, chiar dacă această metodă s-a dovedit a fi una dintre cele mai reuşite şi utilizate metode de

modelare a sistemelor dinamice, având o largă răspândire în mediile inginereşti şi universitare. Una dintre soluțiile acestei probleme o constituie software-ul KALIBOND (Jörgl *et al*., 1997), care face posibilă construirea bond-graph-urilor în MATLAB şi, totodată automatizează etapa de modelare, furnizând descrierea de stare aferentă bond-graph-ului. Secțiunea de față este în totalitate dedicată prezentării acestui software.

Principalele caracteristici ale software-ului KALIBOND sunt rezumate astfel:

- Este conceput pentru a permite modelarea sistemelor cu dinamică liniară.
- Comunicarea cu utilizatorul se realizează prin intermediul unei interfețe grafice prevăzută cu un meniu ce include opțiunile de manipulare a software-ului şi o fereastră grafică, destinată desenării şi editării bond-graph-urilor.
- Poate realiza, în mod automat (la solicitarea utilizatorului), asignarea cauzalității în bond-graph.
- Calculează, în mod automat, reprezentarea de stare a dinamicii sistemului descris prin intermediul unui bond-graph cauzal, matricele aferente devenind disponibile în spațiul de lucru al mediului MATLAB.
- Pentru orice model, variabilele de stare sunt alese automat, astfel încât să aibă semnificația de variabile ale energiei corespunzând elementelor acumulatoare în cauzalitate integrală, adică impuls generalizat pentru elementele de tip I şi deplasare generalizată pentru elementele de tip C.
- Variabilele de ieşire trebuie alese de către utilizator.
- În versiunea KALIBOND prezentată, nu pot fi utilizate elemente controlate.
- Are facilități proprii de simulare a răspunsului la semnale de intrare de tip impuls sau treaptă unitate (care nu necesită introducerea de comenzi MATLAB).

8.5.1. Apelarea software-ului KALIBOND

Apelarea software-ului KALIBOND se face prin tastarea în fereastra MATLAB a comenzii `kalibond` şi apoi apăsarea tastei `<Enter>`. În urma acestei acțiuni, va fi afişată pe ecran o fereastră de lucru aşa cum se arată în fig. 8.5.1., având la partea superioară o bară de meniuri. În paragrafele ce urmează, vom detalia facilitățile oferite de fiecare dintre aceste meniuri.

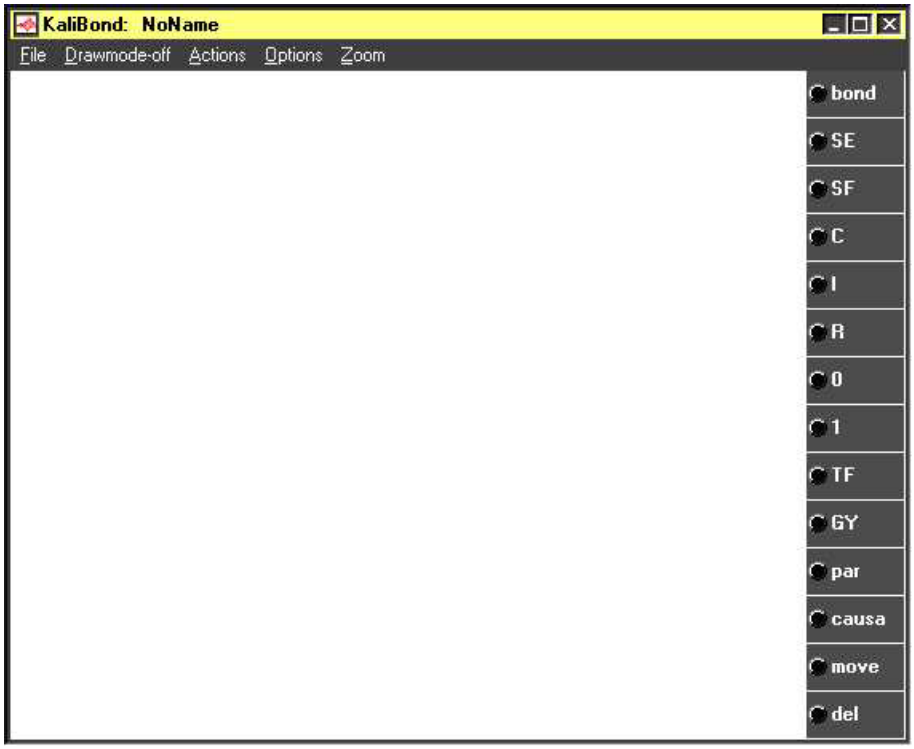


Fig. 8.5.1. Fereastra de lucru a software-ului KALIBOND

8.5.2. Meniul File

Prin deschiderea meniul **File,** apar următoarele opțiuni:

New

Această opțiune şterge ecranul şi schimbă numele fişierului în NoName. Dacă bond-graph-ul existent a fost modificat înainte de ultima salvare, atunci va fi afişat un mesaj de siguranță care întreabă dacă se doreşte salvarea ultimei forme a bond-graph-ului.

Load

Aduce în fereastra de lucru un bond-graph construit anterior şi salvat într-un fişier. Dacă pe ecran există un bond-graph modificat în raport cu ultima salvare, va apărea un mesaj care întreabă dacă se doreşte salvarea ultimei forme a bond-graph-ului.

Save

Salvează bond-graph-ul din fereastra de lucru.

Save as

Salvează bond-graph-ul din fereastra de lucru sub un alt nume care va deveni şi numele bond-graph-ului existent în fereastra de lucru.

Print

Tipăreşte desenul bond-graph-ului la imprimantă.

Printer setup

Modifică tipul de imprimantă.

Export

Salvează reprezentarea grafică a bond-graph-ului şi dă posibilitatea de a o introduce în cadrul altor documente sub forma a două tipuri de format de fişier:

- Encapsulated PostScript
- Encapsulated Color PostScript

Exit KaliBond

Se părăseşte mediul KALIBOND. Dacă s-au făcut modificări în fereastra de lucru după ultima salvare, atunci se întreabă dacă se doreşte salvarea sub ultima formă. Părăsirea mediului KALIBOND trebuie făcută numai în această manieră, deoarece funcţia discutată realizează ştergerea memoriei.

8.5.3. Meniul Drawmode-on / Drawmode-off

La deschiderea ferestrei de lucru, în bara de meniuri apare scris **Drawmode-on**, dar meniul în sine cu acest nume devine activ numai după ce se punctează pe el. Totodată, în urma punctării pe **Drawmode-on**, scrisul se schimbă în **Drawmode-off** (care, la rândul său, poate fi activat prin punctare, invalidând toate funcţiile activate de **Drowmode-on** descrise mai jos).

Meniul **Drawmode-on** activează funcţiile necesare desenării bond-graph-ului. Nu pot fi activate simultan mai multe funcţii. Aceste funcţii sunt:

bond

Activarea funcţiei permite desenarea bondurilor în felul următor:

1. se punctează (cu butonul din stânga al mouse-ului) locul de începere a bondului (originea arcului orientat). În acest punct apare un semn de întrebare care ţine locul simbolului elementului bond-graph ce va fi plasat acolo ulterior;
2. se punctează (cu butonul din stânga al mouse-ului) locul sfârşitului bondului (vârful arcului orientat) care va fi automat înzestrat cu o săgeată. Un semn de întrebare care ţine locul elementului bond-graph va apare şi aici, la fel ca în pasul anterior;
3. acest pas este necesar numai dacă nu este suficientă o singură linie dreaptă pentru desenarea bondului (bondul este o linie frântă). Se procedează la fel ca în pasul 2 cu diferenţa că se acţionează butonul din dreapta al mouse-ului.

Se repetă paşii 1, 2 şi 3 până la desenarea tuturor bondurilor. Acestea sunt numerotate automat.

SE, **SF**, **C**, **I**, **R**, **TF**, **GY**, **0**, **1**.

Aceste funcţii permit scrierea elementelor pe structura bond-graph-ului ce este deja desenată. Prin activarea uneia dintre funcţii şi apoi punctarea pe un semn de întrebare, acesta din urmă este înlocuit cu elementul dorit. De asemenea se poate puncta un element deja existent pentru a-l înlocui cu cel furnizat de funcţia activă.

par

Această funcţie permite introducerea parametrilor elementelor C, I, R, TF şi GY, în felul următor:

1. se punctează elementul al cărui parametru trebuie atribuit. În acest moment se deschide o mică fereastră în partea superioară a ferestrei de lucru în care, dacă este cazul, este afişată valoarea anterioară a parametrului elementului;
2. se punctează cu cursorul mouse-ului în interiorul micii ferestre şi se scrie valoarea parametrului care trebuie să fie nenulă;
3. se apasă tasta <Enter>.

causa

Această funcție asignează manual cauzalitatea pe un bond, astfel:

1. se punctează numărul bondului;
2. se punctează elementul sistemului unde trebuie aşezată liniuța cauzală.

Pentru a şterge liniuța cauzală se punctează numărul bondului din nou.

move

Această funcție permite mutarea unui element sau a unui punct unghiular al unui bond reprezentat printr-o linie frântă prin punctarea elementului sau a punctului şi deplasarea cu mouse-ul în locul dorit ținând apăsat butonul din stânga (tragerea cu mouse-ul).

del

Cu ajutorul acestei funcții se şterg elemente din desenul bond-graph-ului, astfel:

1. un bond se şterge prin punctarea numărului acestuia;
2. un element se şterge prin punctarea lui.

După ştergerea unui element, trebuie şterse toate bondurile conectate la el.

8.5.4. Meniul Actions

Dacă se deschide meniul **Actions**, apar următoarele opțiuni:

Delete Causal Strokes

Această opțiune şterge toate liniuțele cauzale.

Assign Causality

Această opțiune asignează cauzalitatea. În decursul atribuirii se încearcă întotdeauna să se atribuie cauzalitate integrală unui număr cât mai mare de elemente I şi C. După terminarea operației, programul afişează un mesaj care dă numărul de elemente cu cauzalitate integrală şi respectiv cu cauzalitate derivativă. Dacă datorită unor conflicte cauzale de neevitat, cauzalitatea nu poate fi atribuită tuturor bondurilor, programul afişează un mesaj de eroare şi opțiunea **show causal conflicts** este automat activată.

Observație. Programul atribuie liniuță cauzală numai bondurilor care sunt acauzale în momentul punctării funcției de atribuire cauzală. Toate bondurile care deja au cauzalitate atribuită nu sunt afectate. Acest fapt conduce la recomandarea ca, pentru a fi siguri că a fost făcută o atribuire cauzală corectă, trebuie să fie şterse toate liniuțele cauzale deja desenate. De asemenea, în bond-graph-urile care conțin elemente în cauzalitate derivativă, deoarece aceasta poate fi atribuită unor diverse elemente I sau C, este posibilă alegerea manuală a acestora, alegere ce poate diferi de soluția preconizată de program.

State Space Matrice's Name

Această opțiune permite utilizarea altor nume pentru matricele coeficienților din descrierea intrare–stare–ieşire, care, inițial, sunt notate de către program cu literele **A**, **B**, **C**, **D**, **E** şi **F**, sistemul fiind scris în mod obişnuit sub forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}\,, \tag{8.5.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{u}}\,, \tag{8.5.2}$$

ce coincide cu descrierea (2.5.20) şi (2.5.21) din paragraful 2.5.2. În această descriere, variabilele de stare sunt alese automat de software-ul KALIBOND ca fiind variabilele energiei corespunzătoare elementelor I şi C în cauzalitate integrală. Pentru modificarea

notațiilor, se punctează în interiorul ferestrei de editare, se introduce numele variabilei şi se apasă tasta <Enter>.

Output - Vector

Această opțiune permite desemnarea componentelor vectorului variabilelor de ieşire. Elementele acestuia sunt separate prin semnul punct şi virgulă (;). Introducerea variabilelor se finalizează cu apăsarea tastei <Enter> şi apoi punctarea pe **OK**. Vectorul variabilelor de ieşire poate conține oricare variabilă a puterii şi/sau a energiei.

Compute

Această opțiune, utilizând bond-graph-ul cauzal, determină automat reprezentarea de stare a sistemului (8.5.1) şi (8.5.2). Matricele de la **A** la **F** vor fi stocate în variabilele declarate anterior în spațiul de lucru MATLAB.

Simulate

Această opțiune trasează grafic răspunsul sistemului în cazul intrărilor de tip impuls sau treaptă, în scopul studierii imediate a dinamicii sistemului.

8.5.5. Meniul Options

Meniul **Options** oferă facilități pentru detectarea erorilor, prin colorarea bond-graph-ului în funcție de opțiunile selectate.

Dacă se activează opțiunea **Show about structure** are loc următorul mod de colorare:

- roşu pentru:
  - elementele nedefinite;
  - elementele fără bonduri ataşate;
  - bondurile fără un element la una din extremități;
  - elementele uniport la care sunt ataşate mai multe elemente;
  - elementele biport sau multiport având un singur bond ataşat;
  - transformatoare sau giratoare având ambele semisăgeți orientate către element sau în afara lui;
- galben - elemente fără parametri;
- negru - OK.

Dacă se activează opțiunea **Show Integral Causalities** are loc următorul mod de colorare:

- verde - elementele acumulatoare de energie în cauzalitate integrală;
- roşu - elementele acumulatoare de energie în cauzalitate derivativă;
- negru - toate celelalte elemente.

Dacă se activează opțiunea **Show Causal Conflicts** are loc următorul mod de colorare:

- verde - bonduri cu liniuță cauzală;
- negru - bonduri neatribuite cauzal;
- roşu - conflict cauzal.

Activarea opțiunii **Off** conduce la afişarea monocromă, dar cu creşterea vitezei de desenare.

8.5.6. Meniul Zoom

Meniul **Zoom** realizează măriri sau micşorări ale imaginii.

Opțiunea **Zoom** măreşte o zonă din bond-graph. Acest lucru se realizează prin punctarea unui colț al zonei ce se doreşte a fi mărită şi deplasarea cu mouse-ul până în colțul opus al zonei, acțiune după care se eliberează butonul mouse-ului.

Opțiunea **Un-Zoom** este o funcție având efectul invers al funcției Zoom.

Opțiunea **Zoom-max** conduce la mărimea bond-graph-ului la dimensiunile ecranului.

Exemplul 8.5.1.

Se consideră sistemul din Exemplul 5.5.3 a cărui schemă este reprezentată în fig. 5.5.10, având parametrii utilizați în Exemplul 8.4.1. Bond-graph-ul realizat în mediul KALIBOND este reprezentat în fig. 8.5.2, păstrând topologia generică din fig. 5.5.14 din cadrul Exemplului 5.5.3. Prin acționarea comenzii **Compute** din meniul **Actions**, KALIBOND furnizează în spațiul de lucru al MATLAB-ului matricele din descrierea generalizată (8.5.1) şi (8.5.2):

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 10^{-5} \\ -2244.8 & -0.4034 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0459 & -0.9354 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 10^{-5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cu aceste matrice, efectuarea în MATLAB a simulării pentru aceleaşi mărimi de intrare ca în Exemplul 8.4.1 (adică pentru SE1=$9.2\cdot10^6$, SE2=$4.5\cdot10^5$ în fig. 8.5.3) conduce la mărimile de ieşire reprezentate grafic în fig. 8.5.3 (a - viteza masei şi, respectiv, b - deplasarea masei). Merită de subliniat faptul că există o bună concordanță între aceste rezultate şi cele obținute în fig. 8.4.5, prin simularea bazată pe schema SIMULINK din fig. 8.4.4. Micile diferențe care apar se justifică prin aproximările pe care le introduce blocul cu acțiune pur derivativă din schema SIMULINK din fig. 8.4.4.

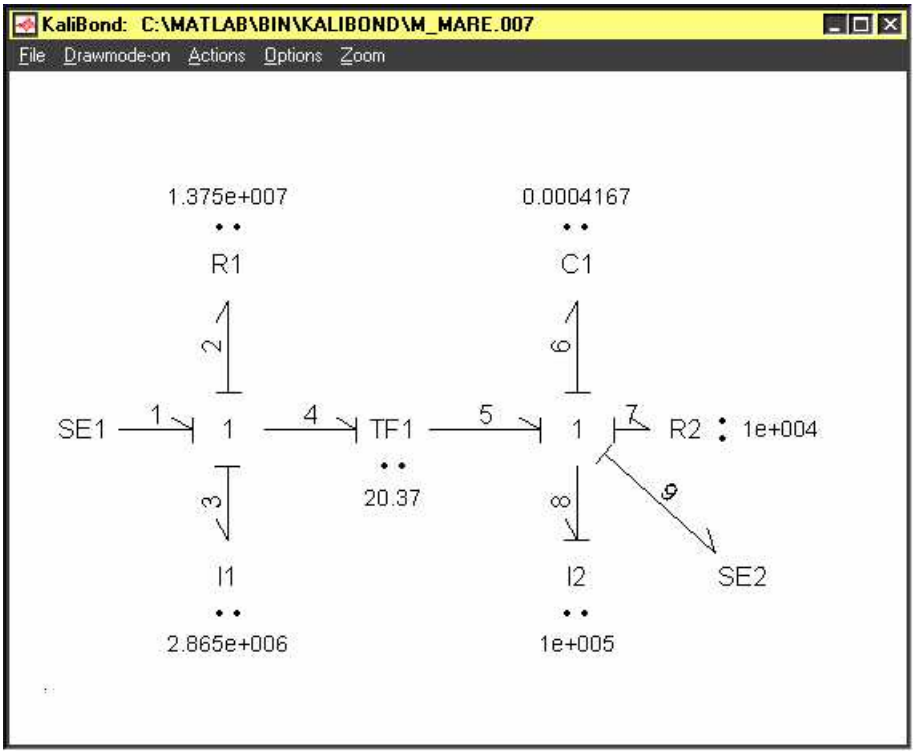
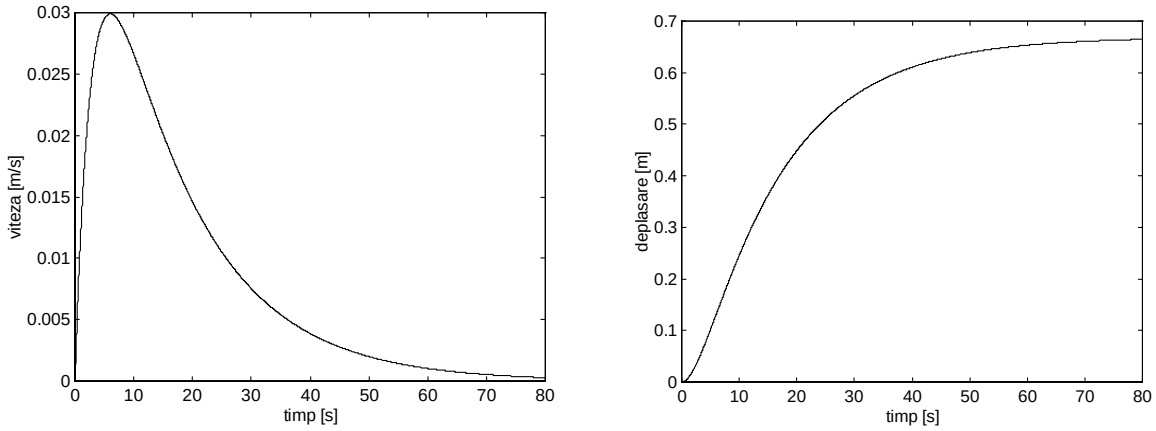


Fig.8.5.2. Copie după fereastra KALIBOND care conține bond-graph-ul aferent sistemului studiat în Exemplul 8.5.1

De asemenea, mai precizăm că autovalorile matricei **A** sunt `-0.0666`, `-0.3368`, ceea ce arată că sistemul de ecuații diferențiale (8.5.1) nu are comportare stiff, permițând utilizarea oricărei metode numerice de integrare pusă la dispoziție în MATLAB.



(a) **(b)**

Fig. 8.5.3. Rezultatele simulării în mediul MATLAB a comportării sistemului considerat în Exemplul 8.5.1: **(a)** viteza masei; **(b)** deplasarea masei.

Exemplul 8.5.2

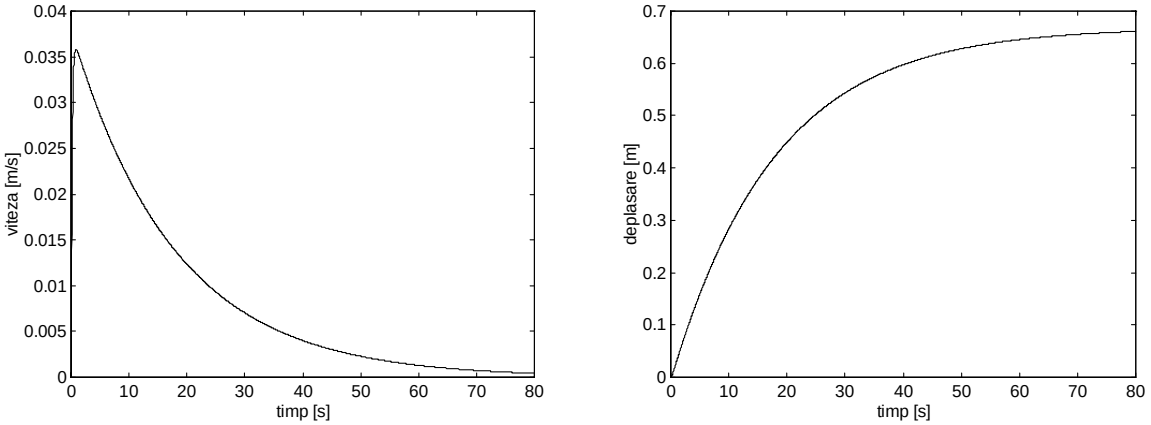
Considerăm sistemul studiat în Exemplul 8.5.1, pentru care valoarea masei deplasată de tija pistonului este de $m = 10^3$kg (adică exact aceiaşi parametri ca în Exemplul 8.4.2).

Bond-graph-ul realizat în KALIBOND este acelaşi ca cel din fig. 8.5.2, cu excepţia valorii numerice atribuite elementului I2, care se înlocuieşte cu `1e+3`. Prin acţionarea comenzii **Compute** din meniul **Actions**, KALIBOND furnizează în spaţiul de lucru al MATLAB-ului matricele din descrierea generalizată (8.5.1) şi (8.5.2):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ -303.66 & -5.458 \end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0062 & -0.1265 \end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

În urma simulării în mediul MATLAB, se obţin reprezentările grafice pentru variabilele de ieşire (viteza şi respectiv deplasarea masei) reproduse în fig. 8.5.4(a) şi respectiv fig. 8.5.4(b). Ca şi în cazul discuţiei din exemplul anterior, trebuie remarcată buna concordanţă dintre aceste rezultate şi cele obţinute în fig. 8.4.6 (prin simularea bazată pe schema SIMULINK), pentru micile diferenţe existente fiind valabilă aceeaşi justificare.

Valorile proprii ale matricei **A** sunt `-0.0562`, `-5.4018`, ceea ce arată că sistemul de ecuaţii diferenţiale (8.5.1) are o comportare stiff moderată, permiţând, în principiu, utilizarea oricărei metode numerice de integrare pusă la dispoziţie de MATLAB.



(a) **(b)**

Fig. 8.5.4. Rezultatele simulării în mediul MATLAB a comportării sistemului considerat în Exemplul 8.5.2: **(a)** viteza masei; **(b)** deplasarea masei.

Observaţie: Analizând comparativ problemele legate de integrarea numerică ce au apărut în Exemplul 8.4.2 şi, respectiv, Exemplul 8.5.2, se constată că utilizarea în simulare a modelelor de tip schemă bloc poate conduce la unele dificultăţi care nu apar în cazul modelelor de tip reprezentare de stare (în ciuda faptului că modelele respective sunt echivalente ca şi descrieri analitice). Cu alte cuvinte, dificultăţile numerice nu sunt generate de dinamica propriu-zisă a sistemului, ci sunt consecinţe ale modelului folosit pentru a simula această dinamică. Astfel, situaţia de comportare stiff dură evidenţiată în prima parte a Exemplului 8.4.2 nu se manifestă în Exemplul 8.5.2, deoarece problema de integrare numerică formulată pentru modelul din Exemplul 8.5.2 este mult mai bine condiţionată numeric, decât cea formulată pentru modelul din Exemplul 8.4.2.

Anexa I – Transformarea Laplace

În manipularea modelelor matematice ale unor sisteme fizico tehnice, se caută adesea stabilirea unei corespondenţe (transformări) biunivoce între două mulţimi de funcţii (denumite funcţii original şi, respectiv, funcţii imagine), astfel încât operaţiilor din prima mulţime să le corespundă operaţii mai simple în cea de a doua mulţime. Astfel de corespondenţe stau la baza *metodelor de calcul operaţional*. Aceste metode se caracterizează prin aceea că problema se formulează în clasa funcţiilor original şi se rezolvă în clasa funcţiilor imagine (datorită simplităţii operaţiilor), după care soluţia găsită în mulţimea imaginilor este adusă în mulţimea originalelor. Un atare deziderat este realizat de transformarea funcţională Laplace, care permite utilizarea frecventă a metodei operaţionale în construirea modelelor şi studierea proprietăţilor acestora.

Definiţia 1. O funcţie *f,* definită pe **R**, cu valori reale sau complexe, se numeşte *original* dacă posedă următoarele proprietăţi:

1° $f(t) = 0, \quad t < 0$;

2° $f(t)$ este derivabilă pe porţiuni;

3° există constantele $M > 0$ şi $a \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$|f(t)| \le Me^{at}, \qquad t \ge 0. \tag{AI-1}$$

Observaţia 1. Constanta *a* din condiţia 3° a Definiţiei 1 precizează *indicele de creştere* al funcţiei original *f*, în sensul că valorile lui *f* nu depăşesc valorile unei anumite funcţii exponenţiale, cu exponentul liniar în variabila *t*, conform (AI-1).

Să notăm cu O mulţimea (clasa) funcţiilor original. Dacă *f*, *g* sunt funcţii original (adică $f, g \in$ O), se demonstrează cu uşurinţă că atât suma, cât şi produsul lor sunt funcţii original (adică $f+g \in$ O şi $fg \in$ O).

Definiţia 2. Fie $f \in$ O arbitrară şi *a* indicele său de creştere. Funcţia $F : \Delta = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(s) > a\} \to \mathbf{C}$, definită prin:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \tag{AI-2}$$

se numeşte *transformata Laplace* sau *imaginea prin transformarea Laplace* a funcţiei $f(t)$. Simbolul L notează *operatorul de transformare Laplace*.

Observaţia 2. Definiţia 2 este justificată de faptul (uşor demonstrabil) că integrala din (AI-2) este absolut convergentă pentru orice $s \in \Delta$, iar funcţia *F* definită prin această integrală este olomorfă pe semiplanul Δ.

Să notăm prin I mulţimea (clasa) funcţiilor imagine. Astfel, se poate defini aplicaţia (operatorul sau transformarea funcţională) L: O $\to$ *I*, $\mathrm{L}\{f(t)\}=F(s)$, care asociază fiecărei funcţii original $f(t)$ o funcţie imagine $F(s)$, calculabilă conform (AI-2). Transformarea funcţională L se numeşte *transformare Laplace*. Existenţa transformării funcţionale inverse, notată L^{-1}, este asigurată de următoarea teoremă.

Teorema 1. Dacă o funcţie complexă *F* de variabilă complexă $s = \sigma + j\omega$ îndeplineşte următoarele condiţii:

1° $F(s)$ este olomorfă pe un semiplan $\Delta = \{s \in \mathbf{C} \mid s > a\}$;

2° $F(s)$ tinde către zero, uniform în raport cu argumentul lui s, când $|s| \to \infty$, oricare ar fi semiplanul $\{s \in \mathbf{C} \mid s > c > a\}$;

3° Integrala $\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)ds$ este absolut convergentă;

atunci funcția f definită prin

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ \dfrac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st} ds & , t \geq 0, \end{cases} \tag{AI-3}$$

este o funcție original şi imaginea ei este F.

Aplicația inversă L^{-1}: I $\to O$, $\mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ asociază fiecărei funcții imagine $F(s)$ o funcție original $f(t)$, calculabilă conform (AI-3). Transformarea funcțională L^{-1} se numeşte *inversa transformării Laplace*.

Observația 3. În cazul în care funcția $F(s)e^{st}$ are numai singularități de tip pol, pentru calculul integralei din (AI-3) se poate utiliza *teorema reziduurilor*, cu un contur de integrare adecvat ales (de exemplu, a se vedea (Şabac, 1981)). Astfel se obține:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Re}\, z_{p_i}\left[F(s)\, e^{st}\right], \; t > 0, \tag{AI-4}$$

în care reziduul corespunzător polului p_i de multiplicitate q_i are următoarea expresie:

$$\mathrm{Re}\, z_{p_i}\left[F(s)e^{st}\right] = \frac{1}{(q_i-1)!}\left\{\frac{d^{q_i-1}}{ds^{q_i-1}}\left[(s-p_i)^{q_i}\, F(s)e^{st}\right]\right\}_{s=p_i}. \tag{AI-5}$$

Proprietățile transformării Laplace care își găsesc o utilizare frecventă în aplicații sunt date de următoarele teoreme. Formulările de mai jos ale acestor teoreme sunt prezentate într-o manieră concisă, axată pe exprimarea rezultatelor. Pentru enunțul complet (care cuprinde toate condițiile ce garantează validitatea rezultatelor), recomandăm consultarea unui manual de matematică, cum ar fi, de exemplu, (Şabac, 1981).

Teorema 2. Liniaritatea transformării Laplace:

$$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{O}, \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}: \mathrm{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathrm{L}\{f_1\} + c_2 \mathrm{L}\{f_2\}. \tag{AI-6}$$

Teorema 3. Derivarea originalului:

$$\mathrm{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s) - f(+0)s^{k-1} - \ldots - f^{(k-1)}(+0), \quad k = 1,2,3\ldots \tag{AI-7}$$

Teorema 4. Derivarea imaginii:

$$\mathrm{L}\{(-t)^k f(t)\} = F^{(k)}(s), \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{AI-8}$$

Teorema 5. Integrarea originalului:

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t \ldots \int_0^t f(t)dt^k\right\} = \frac{1}{s^k}F(s), \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{AI-9}$$

Teorema 6. Translarea originalului:

$$\mathrm{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}F(s); \quad \tau > 0. \tag{AI-10}$$

Teorema 7. Translarea imaginii:

$$\mathsf{L}\ \{f(t)e^{zt}\} = F(s-z); \quad z \in \mathbf{C}. \tag{AI-11}$$

Teorema 8. Asemănarea argumentelor:

$$\mathsf{L}\ \{f(\alpha t)\} = \alpha^{-1}F(\alpha^{-1}s); \quad \alpha > 0. \tag{AI-12}$$

Teorema 9. Produsul a două originale (produsul de convoluție a două imagini):

$$\begin{aligned}\mathsf{L}\ \{f_1(t)f_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z)F_2(s-z)dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-z)F_2(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi j}(F_1 * F_2)(s) = \frac{1}{2\pi j}(F_2 * F_1)(s)\,.\end{aligned} \tag{AI-13}$$

Teorema 10. Produsul de convoluție a două originale (produsul a două imagini):

$$\begin{aligned}\mathsf{L}\ \{(f_1 * f_2)(t)\} &= \mathsf{L}\ \left\{\int_0^t f_1(t-\theta)f_2(\theta)d\theta\right\} = \\ &= \mathsf{L}\ \left\{\int_0^t f_1(\theta)f_2(t-\theta)d\theta\right\} = F_1(s)F_2(s).\end{aligned} \tag{AI-14}$$

Teorema 11. Originalul unei funcții raționale (teorema dezvoltării):

Pentru $F(s) = Q(s)/P(s)$, în care $P(s)$ şi $Q(s)$ sunt două polinoame, cu grad $P = n >$ grad $Q = m$, având polii distincți p_i, fiecare de multiplicitate q_i, $i = 1,\cdots,r$, cu $\sum_{i=1}^{r} q_i = n$, originalul se obține cu formula:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t}, \quad t \geq 0\,, \tag{AI-15}$$

unde:

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}[(s-p_i)^{q_i}F(s)]\right\}_{s=p_i}, \quad i = 1,\cdots,r, \quad j = 1,\cdots,q_i. \tag{AI-16}$$

Teorema 12. Valoarea inițială a originalului (teorema valorii inițiale):

Dacă $F(s)$ este o funcție rațională, atunci există $f(+0) = \lim_{t\downarrow 0} f(t)$ şi are loc egalitatea de calcul

$$f(+0) = \lim_{t\downarrow 0} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)\,. \tag{AI-17}$$

Teorema 13. Valorea finală a originalului (teorema valorii finale):

Dacă $F(s)$ este o funcție rațională olomorfă pe semiplanul $\{s \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\ s \geq 0\}$, având cel mult un pol simplu în zero, atunci există $f(+\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$ şi are loc egalitatea de calcul

$$f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)\,. \tag{AI-18}$$

În practică, pentru abordarea diverselor aplicații, se poate face apel la tabele (sau dicționare) de transformate Laplace, care facilitează operarea atât cu transformarea directă L, cât şi cu cea inversă L^{-1}. Un astfel de dicționar este furnizat în Tabelul AI-1.

Dacă $F(s)$ desemnează o funcție rațională strict proprie, calculul originalului $f(t)=\mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}$ se poate realiza prin descompunerea lui $F(s)$ în rționale simple, de forma celor din coloana a doua a tabelului AI-1. După stabilirea corespondenței dintre rațonalele simple şi originalele lor din coloana întâia, se utilizează proprietatea de liniaritate pentru a intra în posesia lui $f(t)$.

Tab. AI-1 Dicționar de transformate Laplace uzuale

Funcție original $f(t)$, $t\in\mathbf{R}_+$	Funcție imagine $F(s)=\mathrm{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$ (impuls Dirac cu $\int_0^\infty \delta(t)dt=1$)	1
$D^k\delta(t)$, $k=0,1,2,\ldots$	s^k
$\delta(t-\tau)$; $\tau\geq 0$	$e^{-\tau s}$
$\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 1\end{cases}$ (treaptă Heaviside)	$\frac{1}{s}$
$t^k\sigma(t)$, $k=0,1,2,\ldots$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\sigma(t-\tau)$; $\tau\geq 0$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\mathrm{sh}\,\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2-\omega_0^2}$
$\mathrm{ch}\,\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2-\omega_0^2}$
$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+2as+a^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega_0^2}$
$t^k e^{-at}\sin\omega_0 t$, $k=0,1,2,\ldots$	$(-1)^k\left(\frac{\omega_0}{s^2+2as+a^2+\omega_0^2}\right)^{(k)}$
$t^k e^{-at}\cos\omega_0 t$, $k=0,1,2,\ldots$	$(-1)^k\left(\frac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega_0^2}\right)^{(k)}$

Anexa II - Conversia numerelor întregi din reprezentare binară în reprezentare hexazecimală

Problematica exprimării numerelor întregi în bazele 2 şi 16 este tratată în majoritatea textelor elementare de programarea şi/sau construcţia calculatoarelor. Pornind de la premisa că exprimarea în baza 2 a numerelor întregi este cunoscută cititorului, vom proceda la o scurtă prezentare a modului în care se realizează conversia în baza 16. Precizăm că reprezentarea hexazecimală (în baza 16) se bucură de avantajul unei scrieri mai compacte decât reprezentarea binară (în baza 2), utilizând un număr de 16 simboluri distincte, după cum este detaliat mai jos.

În cele ce urmează, notaţiile $(.)_B$ şi $(.)_H$ desemnează scrierea poziţională în bazele de numeraţie 2 şi respectiv 16.

Exprimările în baza de numeraţie 16 (sau baza hexazecimală) necesită extinderea setului de cifre 0,1,…,9 utilizate în baza 10, cu încă *şase cifre* sau *simboluri* a, b, c, d, e, f (sau, echivalent, în scriere cu majuscule, A, B, C, D, E, F) cu semnificaţiile $(1010)_B = (a)_H = 10$, $(1011)_B = (b)_H = 11$, $(1100)_B = (c)_H = 12$, $(1101)_B = (d)_H = 13$, $(1110)_B = (e)_H = 14$ şi $(1111)_B = (f)_H = 15$. Orice grup de patru cifre binare poate fi reprezentat, în mod unic, printr-o cifră hexazecimală de la 0 la f (după cum reiese şi din fraza anterioară), avantajul scrierii poziţionale în baza 16 constând în reducerea numărului de simboluri folosite.

La conversia numerelor întregi din baza 2 în baza 16, grupurile de câte patru cifre binare se formează începând cu poziţia cea mai puţin semnificativă, către poziţia cea mai semnificativă (adică de la dreapta la stânga) şi, dacă este nevoie, completând cu valori binare 0 la stânga poziţiei celei mai semnificative, cu scopul de a forma cel mai semnificativ grup de patru cifre binare.

De exemplu, valoarea utilizată în mediul MATLAB pentru cantitatea denumită "deplasare" (a se vedea paragraful 8.1.2 din Capitolul 8) este $d = (1111111110)_B = (3fe)_H = 3*16^2+15*16+14*16^0 = 1022$.

Anexa III – Comenzi MATLAB uzuale

În această anexă, sunt prezentate pe scurt câteva dintre cele mai uzuale comenzi din mediul MATLAB. Pentru explicații mai amănunțite privitoare la orice comandă, se tastează `help nume_comandă`.

Operații de bază

`help nume_fişier`	afişează comentariile din partea de sus a unui fişier de tip `.m`
`quit`	părăseşte mediul MATLAB
`exit`	analog comenzii `quit`
`type nume_fişier`	afişează conținutul unui fişier `.m`
`who`	afişează variabilele existente în acel moment
`whos`	analog comenzii who, dar mai detaliat
`clear`	şterge variabilele din memorie
`what`	afişează fişierele de tip `.m` aflate intr-un director
`which`	localizează fişierele de tip `.m`
`format`	schimbă formatul de afişare a rezultatelor
`demo`	lansează programe demonstrative din MATLAB

Valori disponibile în MATLAB

`pi`	π
`inf`	∞
`flops`	contorul operațiilor efectuate în virgulă mobilă
`i,j`	$\sqrt{-1}$
`ans`	răspunsul curent
`clock`	timp generat de ceas

Operații aritmetice şi cu matrice

`+`	adunarea a două numere (scalari), vectori sau matrice
`-`	scăderea a două numere (scalari), vectori sau matrice
`*`	înmulțirea a două numere, vectori sau matrice compatibile
`.*`	înmulțirea element cu element a matricelor sau vectorilor de aceeaşi dimensiune
`/`	împărțirea numerelor, împărțirea la dreapta a matricelor compatibile
`./`	împărțirea element cu element a matricelor sau vectorilor de aceeaşi dimensiune
`\`	împărțirea la stânga a matricelor compatibile
`^`	ridicarea la putere a unui număr sau matrice pătratică
`.^`	ridicarea la putere element cu element a vectorilor sau matricelor
`'`	transpunerea unui vector sau a unei matrice
`size`	dimensiunea unui vector sau a unei matrice
`length`	lungimea unui vector
`sum`	suma elementelor unui vector

`norm`	norma unui vector

Funcții matematice uzuale

`sin, cos, tan`	funcții trigonometrice uzuale
`acos, asin`	inversele acestor funcții
`exp, log`	exponențială şi logaritm natural
`sqrt`	rădăcină pătrată
`rand`	generare de numere aleatoare cuprinse între 0 şi 1
`round`	rotunjire la cel mai apropiat număr întreg
`fix`	rotunjire la cel mai apropiat număr întreg, neglijând partea fracționară
`abs`	valoarea absolută a unui număr real sau complex
`angle`	argumentul unui număr complex
`real, imag`	partea reală şi, respectiv, partea imaginară a unui număr complex
`conj`	conjugatul unui număr complex

Funcții referitoare la matrice

`det`	determinantul unei matrice pătratice
`eig`	valorile şi vectorii proprii ai unei matrice pătratice
`inv`	inversa unei matrice pătratice
`rref`	forma eşalon redus pe linii a unei matrice
`rank`	rangul unei matrice
`svd`	valorile şi vectorii singulari ai unei matrice

Operații grafice

`plot`	reprezentare grafică într-un sistem de coordonate *x*-*y* cu scară liniară
`hold on/off`	supra-afişare, păstrând reprezentarea grafică anterioară
`clg`	ştergerea ferestrelor grafice
`mesh`	reprezentarea unei suprafațe tridimensionale (3D)
`meshgrid`	generarea domeniului pentru o suprafață tridimensională
`contour`	reprezentarea liniilor de nivel corespunzătoare unei suprafețe
`bar`	reprezentare grafică cu bare
`title`	scrierea titlului
`xlabel, ylabel`	scrierea notațiilor pe axe
`axis`	scara axelor
`text`	introducerea unui text în grafic
`print`	tipărirea ferestrei grafice curente

Operații asupra funcțiilor

`fmin`	minimul unei funcții de o variabilă
`fmins`	minimul unei funcții de mai multe variabile
`fzero`	zeroul unei funcții
`spline`	funcția spline aplicată elementelor unui vector
`quad`	calculul unei integrale definite

`ode23`	integrarea unui sistem de ecuații diferențiale prin metoda Runge-Kutta de ordinul 2 şi 3

Calcule statistice

`mean`	media elementelor unui vector
`std`	abaterea standard
`cumsum`	sumă cumulativă
`cov`	corelația dintre valorile elementelor unui vector
`min, max`	minimul şi, respectiv, maximul elementelor unui vector

Operații de încărcare/salvare

`save`	salvează datele într-un fişier
`load`	încarcă datele dintr-un fişier
`diary nume_fişier`	salvează textul unei sesiuni MATLAB
`chdir`	schimbă directorul
`dir`	afişează conținutul directorului

Index şi dicţionar român - englez

A

absorbitor de vibraţii <vibration absorber> - 347
algoritm numeric <numerical algorithm>
de integrare a ecuaţiilor diferenţiale **v**. metode de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale
performanţe ale unui <performance of a numerical algorithm> - 376
angrenaj <gear> - 256, 274
aproximare <approximation>
a unui bloc derivator <approximation of a derivative block> - 434
datorată unei metode de integrare numerică **v.** metode de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale, ordinul unei
în aritmetica virgulei mobile **v.** aritmetica virgulei mobile, eroare de rotunjire în
realizată prin liniarizarea unui model **v**. liniarizare
aritmetica virgulei mobile <floating point arithmetic> - 366
eroare de rotunjire în <roundoff error in floating point arithmetic > - 374
operaţii în <operations in floating point arithmetic > - 374
reprezentarea unui număr în <representation of a number in floating point arithmetic> - 367

B

bloc <block>
derivator <derivative block, differentiator> - 83
integrator <integration block, integrator> - 83
împărţitor <division block> - 84
înmulţitor <multiplication block> - 84
proporţional <proportional block> - 83
sumator <addition block> - 84
bond <bond> - 197
activ <active bond> - 286
bond-graph<bond graph> - 195
acauzal <acausal bond graph> - 199
cauzal <causal bond graph> - 221
construcţia unei diagrame bloc pe baza unui <construction of a block diagram model from a bond graph> - 238
constrcţia unui model de stare pe baza unui <construction of a state-space model from a bond graph> - 224
cu cauzalitate derivativă <bond graph with derivative causality> - 272
cu comutatoare <switched bond graph> - 318
reguli de atribuire cauzală într-un <rules for causality assignment in a bond graph> - 221
reguli de construţie a unui <rules for bond graph construction> - 199
reguli de simplificare a unui <rules for bond graph simplification> - 218

C

capacitor <capacitor> **v.** element C
caracteristică de funcţionare a unui element **v.** element
cauzalitate(*a*) <causality> - 8, 12, 18, 198
atribuire de <causality assignment> **v.** bond-graph, reguli de atribuire cauzală într-un
conductivă <conductive causality> - 13, 170, 204
conflict de **v.** conflict de cauzalitate
derivativă <derivative causality > - 18, 165, 167, 200, 202

elementului C <causality of C element> - 167, 202
elementului GY <causality of GY element> - 175,207
elementului I <causality of I element> - 165, 200
elementului R <causality of R element> - 13, 170, 204
elementului S_e <causality of S_e element> - 205
elementului S_f <causality of S_f element> - 205
elementului SW <causality of SW element> - 320
elementului TF <causality of TF element> - 174, 206
integrală <integral causality > - 18, 165, 167, 200, 202
joncțiunii 0 <causality of 0 junction> - 177, 208
joncțiunii 1 <causality of 1 junction> - 178, 209
mixtă < mixed causality > - 305
rezistivă <resistive causality > - 13, 170, 204
câmp multiport <multiport field> - 302
C <C field> - 303
explicit<explicit> - 304, 308, 309
I < I-field> - 306
I-C <I-C field> - 309
implicit<implicit> - 306, 309, 311
R <R-field> - 309
cilindru hidraulic <hydraulic cylinder> - 281, 432, 440
condiționarea problemelor de calcul numeric <conditioning of numerical computational problems> - 375
conflict de cauzalitate< causality conflict> - 327
convertor de putere < power converter> - 358

D

deplasare generalizată <generalized displacement> - 113, 162
diagramă bloc <block diagram> - 82
disipator <dissipator> **v.** element disipativ

E

ecuație <equation>
de ieşire < output(-variable) equation> - 44, 66, 70, 73
de stare <state(-space) equation> - 44, 66, 70, 73
de stare, generalizată <generalized state(-space) equation> - 70
de stare, liniară < linear state(-space) equation> - 44, 66
de stare, neliniară < nonlinear state-space equation> - 73
diferențial-algebrică <differential- algebraic equation > - 69, 273
diferențială (*ordinară*) <(ordinary) differential equation> - 14, 23, 379, 383
diferențială stiff <stiff differential equation> - 397, 434, 442
efort <effort> - 113, 161
element
C (*capacitiv*) <C (capacitive) element> - 114, 164, 202
C (*capacitiv*), *modulat* <modulated C (capacitive) element> - 287
cauzalitatea unui **v.** cauzalitate
controlat <controlled element> **v.** element modulat
diport <2-port element> - 199
disipativ <dissipative element > **v.** element R
GY (*girator*) <GY (gyrator) element> - 114, 156, 173, 207, 266
GY (*girator*), *modulat* <modulated GY (gyrator) element> - 288
I (inductiv) <I (inductive) element> - 114, 164, 200
I (inductiv), *modulat* <modulated I (inductive) element> - 286
J0 (*joncțiune* 0) <J0 (0 junction) element> - 114, 176, 208
J1 (*joncțiune* 1) <J1 (1 junction) element> - 114, 176, 209
modulat < modulated element> - 285
multiport < multi-port element> **v.** elemente *n*-port
n-port <n-port element> - 199
R (*rezistiv*) <R (resistive) element> - 114, 169, 204
R (*rezistiv*), *modulat* <modulated R (resistive) element> - 287, 318

S_e (*sursă efort*) < S_e (effort source) element > - 114, 169, 205
S_e (*sursă efort*), *modulat* < modulated S_e (effort source) element > - 287
S_f (*sursă flux*)< S_f (flow source) element> - 114, 169, 205
S_f (*sursă flux*), *modulat*<modulated S_f (flow source) element> - 287
SW (*comutator*) <SW (switch) element> - 320
TF (*transformator*) <TF (transformer) element> - 114, 173, 206
TF (*transformator*), *modulat* <modulated TF (transformer) element> - 288
uniport <1-port element> - 199
entropie <entropy> - 147

F

flux <flow> - 113, 162
funcție de transfer < transfer function> - 16, 17, 43, 55

G

girator <gyrator> **v.** element GY

H

Hurwitz, criteriul lui <Hurwitz criterion> - 109

I

impuls generalizat <generalized impulse> - 113, 162
incintă încălzit <heated tank> - 259. 329
inductor <inductor> **v.** element I
integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale **v.** metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale

J

joncțiune <junction>
0 (*zero*) <0 junction> **v.** element J0
1 (*unu*) <1 junction> **v.** element J1

K

KALIBOND, software – 435

L

lege constitutivă a unui câmp multiport <constitutive low of a multiport field> **v.** câmp multiport
lege constitutivă a unui element <constitutive law of an element> **v.** element
liniarizare <linearisation> - 75
liniuță cauzală < causal stroke> - 198

M

manipulator <manipulator> - 340
MATLAB, software - 400
matrice de complianță <compliance matrix> - 305
matrice de rigiditate < stiffness matrix> - 303
matrice de transfer < transfer matrix> - 67
metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale <methods for numerical integration of differential equations> - 379.
Adams <Adams methods> - 391
cu pas adaptiv <adaptive stepsize methods> - 388, 396
cu pas constant <constant stepsize methods> - 390
directe <direct methods> - 383
Euler <Euler methods> - 384, 399
explicite <explicit methods> - 384
Gear <Gear methods> - 397
implementarea în MATLAB *a unor* <MATLAB implementation of some methods for numerical integration of differential equations > - 414
implicite <implicit methods> - 384, 399
indirecte **v.** metode multipas
multipas <multistep methods> - 390
ordinul unei <order of a method> - 381
Runge Kutta <Runge Kutta methods> - 385
unipas **v.** metode directe
model <model>
acauzal <acausal model> - 8
cauzal <causal model> - 8
cu parametri concentrați <lumped-parameter model> - 5, 113
cu parametri distribuiți <distributed-parameter model> - 5
de ordinul I <first order model> - 22

de ordinul n <*n*-th order model> - 45, 66
derivator <derivative model, differentiator> - 16
descriptor <descriptor model> - 68
de semnal mic <small signal model> - 77, 434
de stare <state(-space) model> - 44, 66
diagramă bloc <block diagram model> - **v.** diagramă bloc
diferenţial-algebric <differential-algebraic model> - 69, 273
funcţie de transfer **v.** funcţie de transfer
hibrid <hybrid model> - 318
implicit <implicit model> - 68, 80
integrator <integration model, integrator> - 14
intrare-ieşire <input-output model> - 14, 16, 23
intrare-stare-ieşire **v.** model de stare
în mici variaţii <model of small variations> **v.** model de semnal mic
liniar <linear model> -14, 22, 44, 66
liniarizat <liniarized model> - 75
multiport <multiport model> - 313
neliniar <nonlinear model> - 72
proporţional <proportional model> - 12
variant in timp <time variant model> - 91
motor de curent continuu <DC motor> - 353

O

ordinul unei metode de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale **v.** metode de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale, ordinul unei

P

pârghie <lever> - 262, 277, 316
pendul simplu <simple pendulum> - 96, 291
pompă cu piston <pump with piston> - 336
port <port> - 199
pseudo bond-graph <pseudo bond graph> - 210
punct de echilibru <equilibrium point> - 94
asimptotic stabil <asymptotically stable equilibrium point> - 37, 95
global asimptotic stabil <globally asymptotically stable equilibrium point> - 101
instabil <unstable equilibrium point> - 95
stabil (*simplu*) <stable equilibrium point> - 94
puntea Wheatstone <Wheatstone bridge> - 338

R

răspuns (*al unui sistem liniar*) < (linear system) response>
complet <complete response> - 25, 38, 40, 48, 66
forţat <forced response> - 25, 27, 36, 43, 48, 54, 56, 61
liber <free response> - 25, 37, 48
redresor electric <electrical rectifier> - 323
regim <state>
forţat <forced state> -25, 27, 48, 54
liber <free state> -25, 37, 48, 51
permanent < steady-state> - 32, 36, 57, 61
staţionar <stationary state> - 27, 58
tranzitoriu <transient state> - 28, 32, 36, 57, 61
reguli <rules>
de atribuire cauzală într-un bond-graph **v.** bond-graph
de construcţie a unui bond-graph **v.** bond-graph
de simplificare a unui bond-graph **v.** bond-graph
reprezentări grafice în MATLAB <graphing in MATLAB> - 411
rezistor <resistor> **v.** element R
rezervor hidraulic <hydraulic tank>
cu model liniar <hydraulic tank with linear model> - 79, 87, 141
cu model neliniar < hydraulic tank with nonlinear model > - 77, 86, 141

S

scripete <pulley> - 265
semnal <signal> - 6, 197, 286
de intrare <input signal> - 7
de ieşire <output signal> - 7
servomotor hidraulic <hydraulic servo system> - 332
simulare <simulation> - 365
SIMULINK, software - 428
sisteme (*fizice*) <(physical) systems>
cu comutaţie <switching systems> - 318
cu modele analoge < system with analogous models> - 180, 222
electrice < electrical systems> - 115
fluidice < fluid systems> - 138

hidraulice < hydraulic systems> **v.** sisteme fluidice
mecanice în mişcare de rotaţie <mechanical rotation systems> - 130
mecanice în mişcare de translaţie <mechanical translation systems> - 122
termice < thermal systems> - 147
stabilitate <stability> - 93
externă<*external stability*> - 105
internă <internal stability> - 94
structură de joncţiunui < junction structure > - 313
sursă <source>
de efort < effort source> **v.** element S_e
de flux < flow source> **v.** element S_f
ideală de putere <ideal source of power> - 9

T

termometru <thermometer> - 339
transformator <transformer> **v.** element TF

V

valoare proprie (*autovaloare*)< eigenvalue> 49, 101
variabile <variables>
ale energiei < energy variables> - 113, 163
ale puterii <power variables> - 113, 162
de ieşire < output-variables> - 12, 14, 17, 23, 44, 46, 66,73
de intrare <input variables> - 12, 14, 17, 23, 44, 46, 66,73
de stare < state variables> - 44, 45, 66, 73